

케이블의 비선형 거동효과를 고려한 사장교 강거더의 좌굴 안전성 평가

Buckling Stability in the deck Steel Girder of Cable stayed Bridge Considered Nonlinear Behavior of Stay Cable

최 학 재*
Choe, Hak-ze

ABSTRACT

The focused topic according to be slender and longer of cable stayed bridge's main span is as follows ① Aerodynamic stability ② Lateral movement of stiffening girder caused by wind force during and after construction ③ Global bucking of stiffening girder caused by axial force. Among this, the number 3 has not received much attention in the past due to high buckling safety factor of stiffening girder. However, according to be slender of stiffening girder, the topic of buckling stability of girder is not any more unconcerned subject. The purpose of this paper is to examine the effect of stay cable's nonlinear behavior on the buckling stability of cable-stayed bridge.

1. 서 론)

사장교의 주경간이 장대화, slender 화 됨에 따라 문제되는 것 으로는 다음과같은 현상을 들수있다. ① 바람에 의한 교량의 동적거동에 대한 안전성 ② 시공시 및 완공후 상부거더의 횡방향 변위 ③ 교량거더의 좌굴안전성 등을 들 수 있다. 이중에서 3항에 해당하는 교량 상부거더의 좌굴에 대하여는 많은 연구결과가 미흡한 상태에있다. 이는 거더좌굴에 대해서는 많은 안전을 때문에 여태까지 커다란 관심이 없었기 때문이다. 그러나 교량거더의 slender 화 에 의한 좌굴에 대해서는 교량이 장대화 함에 따라 더 이상 무관심속에 있을 항목이 아니므로, 본 연구 에서는 상부거더의 좌굴 안전성검토 에 대하여는 사장교임을 감안, 케이블 을 탄성매개체로 가정하여 탄성기초 위의 축력을 받는 빔-기둥 좌굴로 검토를 수행한다.

2. 탄성기초 위에 놓여 있는 빔-기둥 좌굴⁽¹⁾

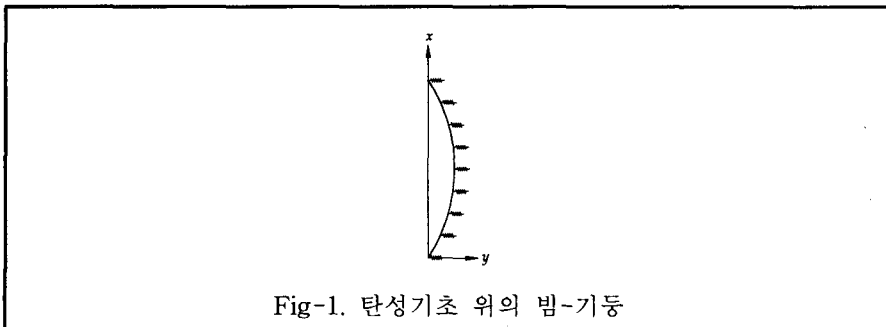


Fig-1. 탄성기초 위의 빔-기둥

* 한석 엔지니어링 구조부 상무이사, 토목구조기술사, choehakze@lycos.co.kr

에너지 이론을 이용하여 빔-기둥 의 극한 압축하중을 구하기 위해서 양단 힌지인 보의 일반치짐 곡선을 다음과 같이 표현한다.

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{휨변형 에너지 } \Delta U_1 = EI/2 \int (d^2y/dx^2)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \sum n^4 a_n^2 \dots\dots\dots (2)$$

부재길이가 dx인 빔의 y 방향 으로의 수평반력은 $\beta y dx$, 이에 대한 에너지는 $\beta y^2 dx/2$

($\beta=a/a$: 단위값을 갖는 처짐 발생시, 단위길이의 빔-기둥 부분에 해당되는 탄성매체(케이블)의 반력값.

a : 케이블의 탄성상수(= $EASin^2\alpha/L$), a : 케이블간의 간격)

y 방향으로의 수평반력에 대한 탄성매체 즉 케이블의 전체에너지는 다음과 같다.

$$\Delta U_2 = \frac{\beta}{2} \int y^2 dx \quad \dots\dots\dots (3)$$

식(1)을 식(3)에 대입하여 정리하면

$$\Delta U_2 = \frac{\beta L}{4} \sum a_n^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

압축하중 P 에 의하여 행하여진 일

$$\Delta T = \frac{P\pi^2}{4L} \sum n^2 a_n^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

외력과 내력은 같다는 가정하에 (2)+(4) = (5)

위의 조건에 의하여 극한하중 P는

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \times \frac{\sum n^2 a_n^2 + (\beta L^4 / \pi^4 EI) \sum a_n^2}{\sum n^2 a_n^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

위의 식 으로부터 극한하중 P를 얻기 위해서는 계수 a_1, a_2, a_3, \dots 사이에 최소 P를 얻기 위한 상호관계가 수립 되어야 하며, 이는 가장 단순한 sine 곡선을 가지는 영(zero)이 아닌 계수 a_m 을 가정하면 다음의 곡선 식을 얻을 수있다.

$$y = a_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad \dots\dots\dots (7)$$

따라서 극한하중 P는 다음과같은 표현이 가능하다.

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left(m^2 + \frac{\beta L^4}{m^2 \pi^4 EI} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

위의 식 구성은 케이블 및 빔-기둥 의 특성과 좌굴상태 에서의 빔-기둥을 분할하는 1/2 sine 곡선의 수를 의미한다. P를 최소화 하는 m을 결정하기 위해서는 β 가 영(zero)이 되는 특별한 경우를 고려한다. 매우 유연한($\beta=0$) 케이블일 경우

$$\left(m^2 + \frac{\beta L^4}{m^2 \pi^4 EI} \right) \approx m^2 = 1.0$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

즉 식(9)는 양단 힌지인 경우의 좌굴 공식을 의미한다.

β가 증가함에 따라 m=2 인 경우가 m=1인 경우에 비하여 식(8)에서 P가 작아지는 경우가 있다. m=1에서 m=2 로 전이되는 한계 β값은 식(8)의 P값이 m=1 혹은 m=2에 상관 없이 같은 값이 주어질 때 발생한다.

$$1 + \frac{\beta L^4}{\pi^4 EI} = 4 + \frac{\beta L^4}{4\pi^4 EI} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\beta L^4}{\pi^4 EI} = 4 \quad \dots\dots\dots (11)$$

위의 식에서 주어진 β보다 작은 경우는 좌굴빔-기둥 에서 굴곡점이 없으며 ,따라서 m=1.0 으로 간주 할 수있다. 주어진 β보다 큰값을 가질 경우 좌굴상태의 빔-기둥에서 굴곡점이 빔-기둥 의 중간에서 발생하며 이때 m=2로 간주한다.

굴곡점의 숫자를 m에서 m+1로 전이하는 β를 구하기 위해 다음과 같은 식을 고려할 수 있으며

$$\frac{\beta L^4}{\pi^4 EI} = m^2(m+1)^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

위의 식 으로 구해진 m을 식(8)에 대입 정리하면 다음과 같은 좌굴공식을 구할수 있다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

L : 빔의 감소길이

다음 표-1 에는 빔-기둥 의 단면특성에 따른 빔-기둥의 좌굴 감소길이를 나타낸다.

표-1. 탄성기초상 빔-기둥의 좌굴감소길이(=L)

$\frac{\beta \ell^4}{(16EI)}$	0	1	3	5	10	15	20	30	40	50	75	100
L/ℓ	1	0.927	0.819	0.741	0.615	0.537	0.483	0.437	0.421	0.406	0.376	0.351
$\frac{\beta \ell^4}{(16EI)}$	200	300	500	700	1,000	1,500	2,000	3,000	4,000	5,000	8,000	10,000
L/ℓ	0.286	0.263	0.235	0.214	0.195	0.179	0.165	0.149	0.140	0.132	0.117	0.110

※ ℓ: 빔의 실제길이

사장교의 상판 거더의 전체좌굴 검토를 위하여 탄성기초 위의 빔-기둥 조건 이 성립 하기 위한 조건은 주탑의 강성,주형의 휨강성, 케이블 강성의 상호작용에 의한 만족 조건이 필요하나 본 연구에서는 Serge Montens 가 제안한 다음 조건을 사용한다.

$$a \geq 3d \quad \dots\dots\dots (14)^{(2)}$$

a : 탄성기초상 빔의 탄성길이 = $\sqrt[4]{4EI/K}$

E : 거더의 탄성계수

I : 거더의 단면2차모멘트

K : 케이블 의 등가연직강성(= $EAsin^2\alpha/L$)

d : 케이블 간격

3. 케이블의 비선형거동⁽³⁾

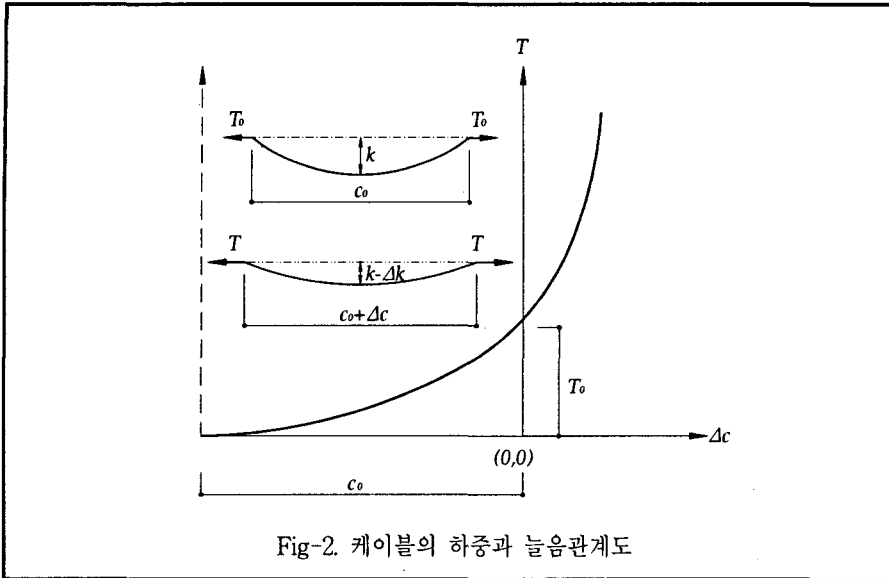


Fig-2. 케이블의 하중과 늘임관계도

다음 Fig-2 에서 보듯이 하중 증가에 따른 케이블의 늘임 거동은 초기 0(zero)에서는 매우 작은 하중에 대해서도 매우 큰 신장이 되는 현상을 볼 수 있다.

사하중에 의한 인장력 T_0 에 도달 한 이후에 활하중 및 기타 하중에 의한 케이블의 늘임거동 은 그림에서 보듯이 비선형 거동을 볼 수 있다.

이러한 현상은 케이블의 sag 변화에 의한 케이블의 늘임 공식 (15)에서도 잘나타 나고 있으며 이는 기학적 비선형 거동을 의미한다.

$$\frac{\delta}{c} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E} + \frac{\gamma_{cb}^2 a^2}{24} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \dots\dots\dots (15)$$

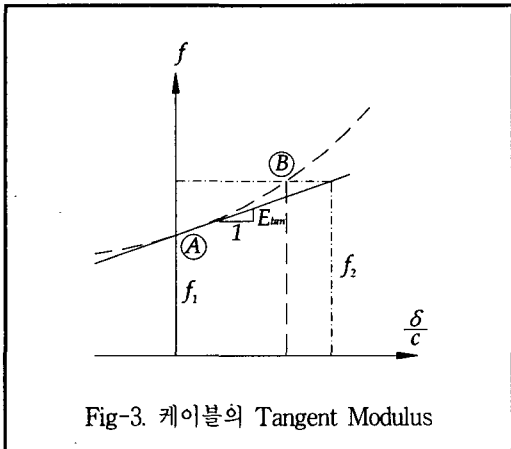


Fig-3. 케이블의 Tangent Modulus

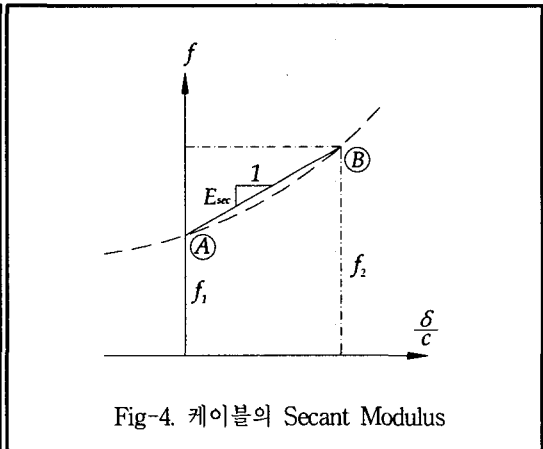


Fig-4. 케이블의 Secant Modulus

T_0 에서의 케이블의 거동을 직선부재로 환산키 위해서는 이 부분 에서의 (응력/상대신장) 비율, 즉 탄젠트 기울기인 E_{tan} (Tangent modulus)가 필요하다.

이는 Fig-3에서 나타내고 있으며 공식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{E_{\tan}} = \frac{1}{E} + \frac{\gamma_{cb}^2 a^2}{12\sigma_1^3} \quad \dots\dots\dots (16)$$

사하중 이외의 하중에 대한 케이블의 거동에 대하여도 이를 정확히 예측하기 위해서는 Fig-4 에서 보인 바 와 같은 A점과 B점의 기울기에 대한 Secant modulus 가 필요하다.

따라서 케이블의 Secant Modulus을 공식으로 표현하면 다음과 같다.

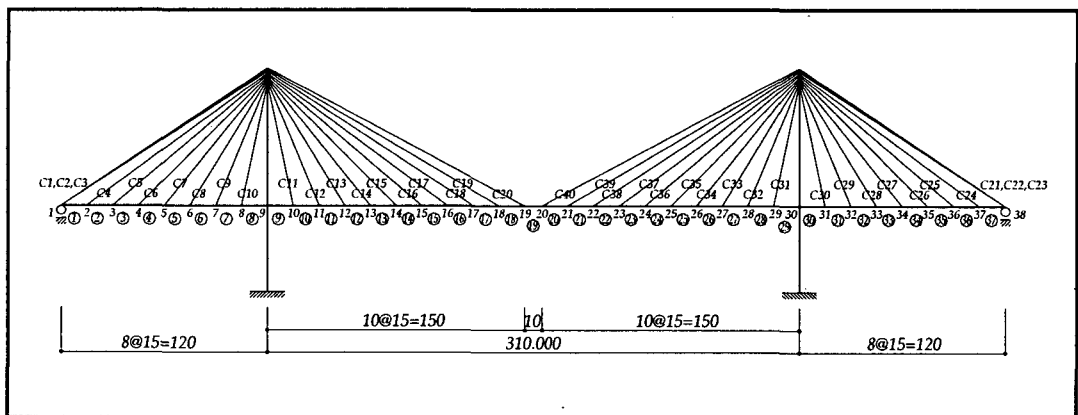
$$\frac{1}{E_{\text{sec}}} = \frac{1}{E} + \frac{\gamma_{cb}^2 a^2}{24} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

- E_{sec} : 케이블의 Secant Modulus
- E : 케이블의 탄성계수
- γ_{cb} : 케이블의 단위중량
- a : 주탑으로부터 케이블 지지점 까지의 거리
- σ_1 : 사하중만에 의한 케이블 응력
- σ_2 : 사하중+활하중 및 기타하중에 의한 케이블 응력

따라서 활하중에 의한 케이블의 비선형 거동을 예측하기 위해서는 식(17)을 사용하면 쉽게 해결 할 수 있으며,또 다른 방법으로는 기하학적 비선형 해석을 할 수 있는 프로그램으로 이를 표현 할 수 있다. 위의 식 (17)을 사용하여 활하중 및 기타하중에 대한 케이블의 비선형 거동을 예측한 교량의 대표적인 예로는 일본의 Tataru Bridge를 들 수 있다.

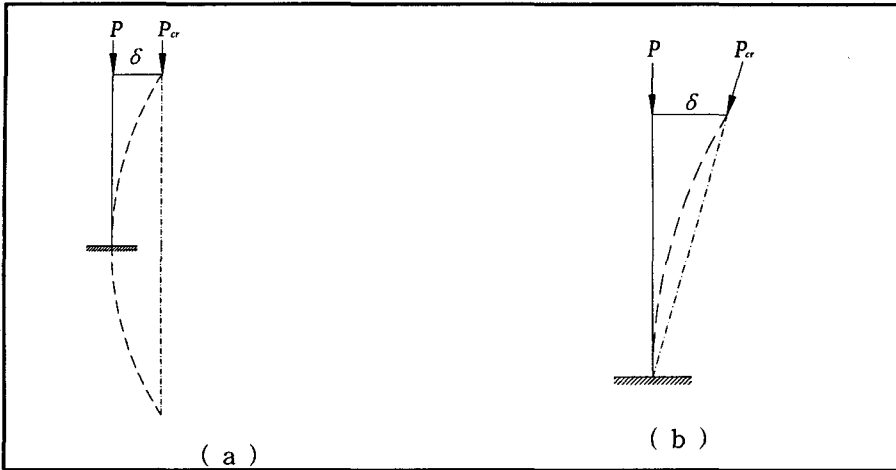
본연구에서는 활하중 및 기타하중에 대한 케이블의 비선형 거동을 예측하기 위하여 식(17)과 프로그램을 사용 P-Δ 해석을 수행하여 탄성해석의 결과치 와 각각을 비교 분석 한다.

[예 제-1] 사장교의 상부거더(Stiffening Girder)에 대한 전체 좌굴 안전율을 고려하기 위한 사장교의 경간구성은 (120 + 310 + 120 m= 550m) 3경간 연속의 경우를 고려한다.



특 정 : * 전체 대칭 구조계를 이루고,이로인한 주탑의 유효길이 계수를 최소화 하기위하여 주탑부분의 주형 경계조건은 댐퍼를 이용 갑작스러운 하중(활하중, 내진하중기타)에 대해서는 상부거더의 교축방향 움직임을 억제 하였으나, 온도하중과 같이 서서히 발생하는 하중 에서는 자유로운 움직임을 발생케 하였다.

3.1 주탑 설계



(a)의 경우는 일반적인 빔-기둥 거동의 예를 보여주며 좌굴거동시 유효길이 계수 $k=2.0$ 을 나타낸다. 이때의 극한좌굴 기둥 공식은 Euler 좌굴공식 $P_{cr} = \pi^2 EI / (kL)^2$ 으로 나타낼 수 있다.

(b)의 경우에는 fan 형식의 사장교 주탑의 거동을 보이고 있으며 이때 유효길이 계수는 일반적으로 0.8~0.95 정도의 값을 보인다. 이와같이 주탑의 유효길이 계수가 변화하는 이유는 anchor cable 및 구조계의 조건에 의한다. 하지만 시공중 anchor cable 이 없는 경우에는 주탑에 발생하는 모멘트를 최소화 할 수 있는 시공방법을 설계자와 시공자는 고려 하여야한다. 본 설계에서는 주경간이 310m일 경우에 대하여 최적의 주탑 높이를 결정하기 위하여 공식(18)을 사용 주탑의 최적 높이를 결정 하였다. 주탑의 최적높이를 결정하는데 결정적 요인은 케이블과 주탑의 단위길이당 공사비이며, 이 공식을 이용 최적의 주탑높이를 결정키 위한 분석결과는 Fig-5와 같다. 따라서 주탑높이 $H=90.0m$ 로 결정하였다.

$$C_{cp} = 2(Q_{Fm} + Q_{Fa} + Q_{ac})u_{cb} + 2Q_{pl}u_{pl} \quad \dots\dots\dots (18)^{(3)}$$

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| Q_{Fm} : 중앙부 케이블량 | Q_{Fa} : 측경간 케이블량 |
| Q_{ac} : anchor cable 량 | Q_{pl} : 주탑부 수량 |
| u_{cb} : 케이블 단위가격 | u_{pl} : 주탑부 단위가격 |

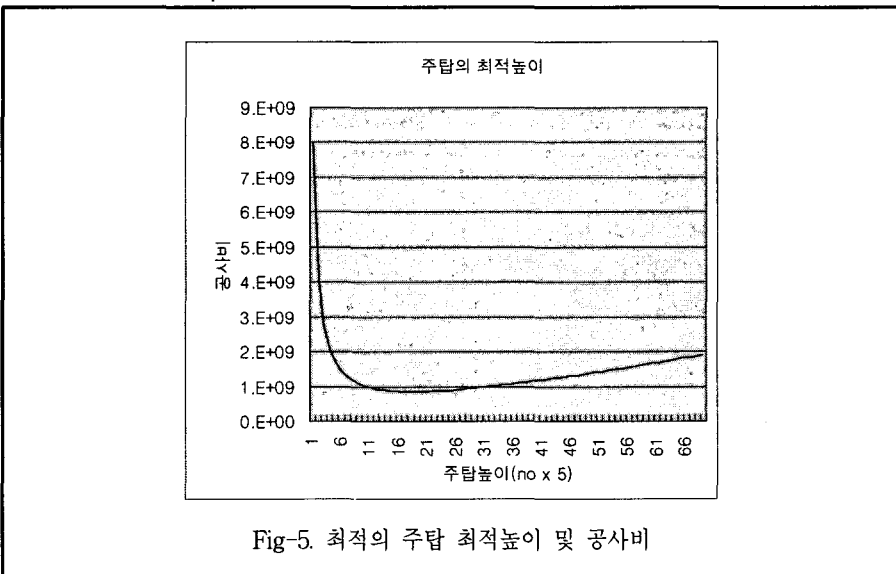
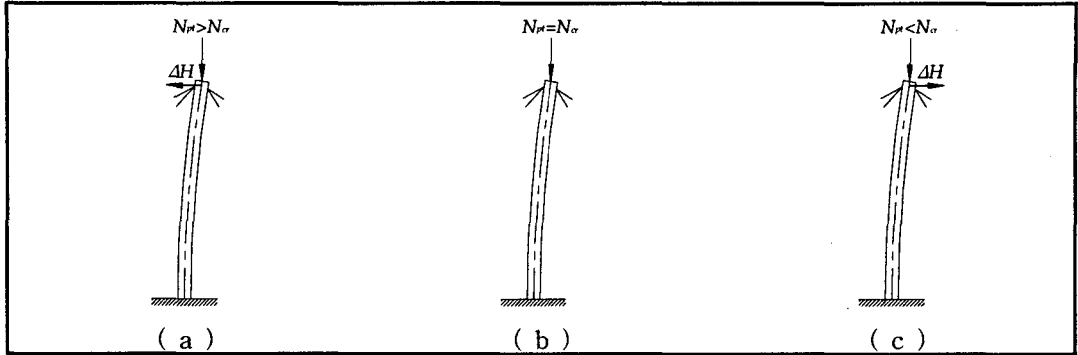


Fig-5. 최적의 주탑 최적높이 및 공사비

또한 주탑의 단면치수를 결정하기 위하여는 설계자의 설계철학이 제일 중요하다. 일반적으로 주탑의 단면치수를 결정하기 위한 일반적인 개념은 다음과 같다.



이론적으로는 교량의 중앙스팬부에 재하된 하중에 의하여 주탑상단에 발생하는 수평력을 전적으로 anchor cable이 이를 수반할 경우에 주탑에는 아무런 수평하중도 전달되지 않으나 실제로 anchor cable은 온도 및 작용하중에 의한 신장이 발생되며 이에 따라 주탑에는 여러 각도 로의 수평 및 수직하중이 전달된다.

(a)의 경우에는 주탑이 극한상태에 도달한 이후 급격히 증가하는 횡변위에 대하여 주탑을 원래 위치로 회복키 위한 ΔH 의 힘을 anchor cable 받는 경우이며, 이는 전적으로 anchor cable이 ΔH 를 받는다고 가정한다. 따라서 이 경우는 (b)와 (c)의 경우에 비하여 주탑의 단면이 적어 질 수 있다.

(c)의 경우에는 어느정도의 외력에 대하여 주탑이 이를 저항하는 경우를 보이며 이 경우 단면의 치수는 (a)의 경우보다 커진다.(b)의 경우는 (a)와 (c)의 중간 정도 임을 알 수 있다.

본 예제에서는 (c)의 경우를 채택하였다.

3.2 주형 및 초기상태

본연구에 사용된 사장교 주형의 단면상수는 다음 표-2 와 같으며 해석의 간편함을 위하여 전단면 일정한 것으로 가정하였다. 또한 탄성기초 위의 빔-기둥 의 좌굴로 해석하기 위한 한계상태의 단면2차 모멘트를 사용하였다.

- 표-2. 해석 주형 단면 상수 -

단면적(m ²)	Iy-y(m ⁴)	Ix-x(m ⁴)	비틀림상수	비고
1.404	15.975	47.369	5.941	-

본연구에서 초기상태란 시공완료 후의 사장교를 구성하고 있는 부재 즉 주형, 케이블, 주탑이 교량의 사하중에 대하여 가장 최적의 지지조건을 구성하고있는 상태라 할 수 있다.

주형의 경우 최적의 사하중 분배는 주형의 종류에 따라 바뀌어 질 수 있다.

- 표-3. 주형의 종류에 따른 모멘트 분포 -

콘크리트 및 합성 주형	강 주형
<p>$M = \frac{WL^2}{8}$</p>	<p>$M = \frac{WL^2}{16}$</p>
<p>* 케이블 지지점부의 부모멘트에 의한 인장균열 (open crack)를 막기위해 케이블의 장력조절로 정모멘트 만 작용.</p>	<p>* 인장과 압축의 허용치가 거의 같으므로, 지지점 과 중앙부에서 같은 모멘트 발생키 위한 케이블 장력 결정.</p>

표-3 에서와 같은 모멘트 분배를 위한 결정적 요인은 케이블의 장력 결정이다.

본 연구 에서는 주형을 강교로 가정하여 모멘트 분포를 결정 하였으며,따라서 위에서 설명한 것과 같이 초기상태에서 주탑에 발생하는 모멘트는 0(zero),주형에는 정,부 모멘트가 되도록 같게 케이블의 장력을 조절하였다.

Fig-6.에서는 프로그램을 사용 사장교의 초기 상태를 제현하였다.

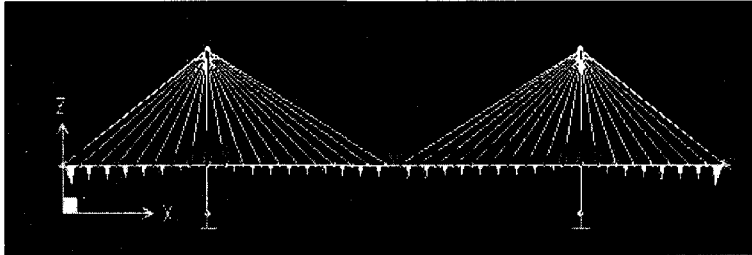


Fig-6. 초기상태에서 교량부(주형,주탑) 모멘트 분포도

표-4에서는 초기상태의 케이블 장력을 표기 하였으며 Fig-7 에서는 이를 도식화 하였다.

-표-4. 초기상태의 케이블 장력 -

케이블 no.	장 력(KN)	케이블 no.	장 력(KN)
c1	1353	c11	814
c2	1481	c12	853
c3	1324	c13	902
c4	1226	c14	971
c5	1137	c15	1049
c6	1049	c16	1137
c7	971	c17	1226
c8	902	c18	1314
c9	853	c19	1412
c10	814	c20	1255

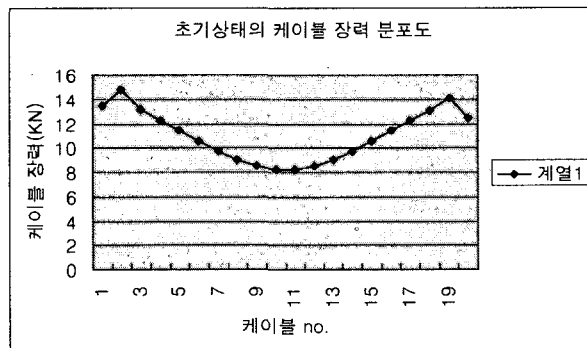


Fig-7. 초기상태에서 케이블장력 분포도

3.3 작용활하중에 의한 케이블의 비선형거동

작용 활하중은 DL-24 이며 주형의 지점부 최대 압축력을 유도해 내기 위하여 이 부재에 대한 영향선을 이용하였다.

본 연구에서는 케이블의 비선형효과를 고려하기 위하여 식(17)를 이용하여 해석한 일본의 Tataru bridge의 해석 경우와 같은 해석을 실시하고, 또한 P- Δ 해석을 실시하여 탄성해석의 결과와 비교 검토 한다.

- 표-5. 탄성해석과 비선형 해석의 차이(케이블장력) -

케이블 no.	탄성해석 (KN)	비선형해석, 공식(17)이용	P- Δ 해석(KN)	케이블 no.	탄성해석 (KN)	비선형해석, 공식(17)이용	P- Δ 해석(KN)
c1	2049	2069	2049	c11	866	866	866
c2	2174	2184	2174	c12	1058	1058	1058
c3	2011	2030	2011	c13	1270	1270	1270
c4	1741	1741	1741	c14	1482	1482	1482
c5	1636	1636	1645	c15	1674	1664	1674
c6	1510	1510	1510	c16	1828	1828	1828
c7	1356	1356	1366	c17	1943	1943	1943
c8	1183	1183	1183	c18	2020	2020	2020
c9	1000	1000	1000	c19	2069	2078	2059
c10	837	837	837	c20	1722	1741	1732

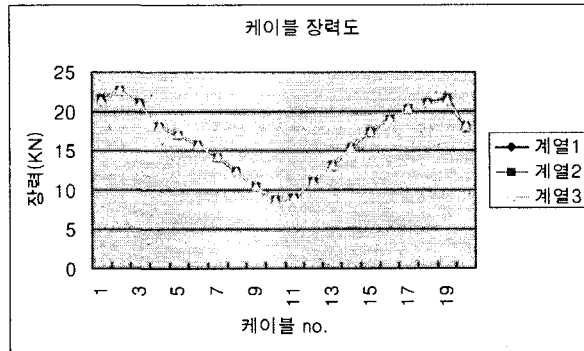


Fig-8. 해석별 케이블 장력도

- 표-6. 탄성해석과 비선형 해석의 차이(주형의 축력) -

주형 no.	탄성해석 (KN)	비선형해석, 식(17)이용	P- Δ 해석 (KN)	주형 no.	탄성해석 (KN)	비선형해석, 식(17)이용	P- Δ 해석 (KN)
1	-4908	-4936	-4908	11	-7631	-7631	-7621
2	-6216	-6245	-6216	12	-7054	-7054	-7054
3	-7371	-7390	-7371	13	-6226	-6226	-6226
4	-8334	-8362	-8334	14	-5158	-5167	-5158
5	-9094	-9123	-9103	15	-3868	-3878	-3878
6	-9633	-9652	-9642	16	-2405	-2415	-2425
7	-9960	-9979	-9970	17	-818	-818	-837
8	-10104	-10124	-10114	18	885	885	856
9	-8131	-8122	-8112	19	2338	2348	2309
10	-7977	-7977	-7968				

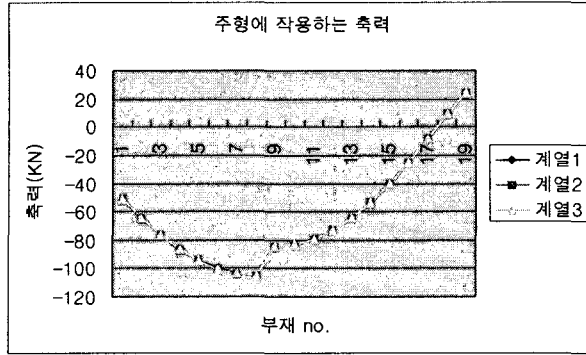


Fig-9. 해석별 주형의 발생축력

위의 결과로 전체좌굴에 대한 주형의 안전계수를 검토하면 다음과 같다. 극한하중은 식(13)에 기초한 AASHTO LRFD Bridge Design Specification, Third Edition, 2004(6.9.4.1 Nominal Compressive Resistance)에 의하면 다음 표-7과 같다.

표-7. 비선형해석 결과에 대한 주형의 좌굴 안전계수 (극한하중 / 사용하중)

부재	Pcr1 (KN) (식-13)	po (KN)	안전율(Pcr1/po)
1	556489	4908	113
2	556489	6255	89
3	556489	7410	75
4	556489	8372	66
5	556489	9142	61
6	556489	9623	58
7	556489	10008	56
8	556489	10104	55
9	553261	8083	68
10	553261	7987	69
11	553261	7602	73
12	553261	7025	78
13	553261	6255	89
14	553261	5196	106
15	553261	3849	144
16	553261	2405	230
17	553261	866	639
18	553261	인장	-
19			

4. 결 론

- ① 본 교량에 대한 케이블의 비선형해석과 선형해석의 차이는 Anchor Cable의 경우에만(10~20 KN(1~2 ton))의 차이를 보일 뿐 나머지 케이블에서는 선형해석과 비선형 해석차이를 볼수 없었다.
- ② 주형에 발생하는 축력의 변화에 있어서는 최대 30KN(3 ton) 정도의 값의 차이를 보였다.
- ③ 전체좌굴에 대한 주형의 안전계수 값은 매우 높은 값을 보였으며, 이 값은 하중계수 보다도 매우 높은 값이다.
- ④ 탄성기초위의 빔-기둥 극한 좌굴 식(13)에 의하여 검토결과 본연구에서는 좌굴시 변곡점을 거의 무시하여도 되는 현상을 볼수 있었고 이는 단면 2차모멘트가 커질수록 양단힌지 조건의 빔 기둥의 거동을 보이나 결국 구조체의 극한좌굴강도는 단면2차모멘트에 비례함을 알수 있었다.
- ⑤ 따라서 교량의 지간장이 커질수록 좌굴에 적절한 안전율을 확보할 수 있는 단면 2차모멘트를 지닌 단면의 선정이 필요하며, 케이블과 케이블의 간격을 좁게 할수록 좌굴저항에 유리함을 알수있었다. 하지만 시공속도를 고려할 경우 이와 적절하게 상충되는 케이블간의 간격을 고려할 필요가 있다.
- ⑥ 본 해석 에서는 탄성기초위의 빔-기둥 해석 조건을 만족 시키기위한 단면 2차모멘트를 사용 하였으나 이에 따른 사하중은 이와 비례하지 않으므로 실제에서의 교량과는 다소 다른 거동 보일수있으나 위의 설계절차에 의하여 거더의 전체좌굴 안전성을 검토 할 수있다.
- ⑦ 활하중이 재하된 상태에서 선형해석시 케이블의 탄성계수는 공식(16)에 의하면 비선형 해석시의 탄성계수 보다 낮으므로 본해석의 경우보다 훨씬 장대교량의 경우에는 처짐이나 기타의 발생 부재력을 과대 혹은 과소로 볼 수 있어 케이블의 비선형 해석은 필수일 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. Timoshenko & Gere, " Theory of Elastic Stability " , pp 94~98
2. Serge Montens, " Buckling of Cable stayed Deck " , Bridges into the 21st Century, pp 923~931
3. Niels J. Gimsing, " Cable Supported Bridge " , Second Edition