

박막이 부착된 마이크로 채널 내의 유동해석

정 재 택*

Flow analysis in Micro Channel with a Couple of Fins

Jae-Tack Jeong*

Two-dimensional Stokes flows through a micro channel with a couple of symmetric vertical fins are investigated. At far up- and down-stream from the fins, the plane Poiseuille flow exists in the channel. The slip boundary conditions are applied to take account of the Knudsen number effects. For the analysis, the method of eigen function expansion and collocation method are employed. By the results, the streamline patterns and pressure distributions are shown and the force exerted on the fin and the excess pressure drop due to the fins are determined as functions of the length of the fin and Knudsen number. It may be conjectured that the force and the excess pressure drop are almost independent of the Knudsen number.

Key Words: 마이크로채널 (micro channel), 미소유동(micro flow), 슬립속도(slip velocity), 스토크스 유동(Stokes Flow), 박막(fin), 누센 수(Knudsen number), 부가적 압력강하(excess pressure drop), 박리유동(Separated Flow)

1. 서 론

최근 MEMS 분야나 생명공학의 기술이 발달함에 따라서, 마이크로채널의 제작이나 마이크로 채널 내의 유동장에도 관심이 높아지고 있다. 특히 채널 내의 유동제어와 관련하여 채널 벽면에 박막이 부착되거나 채널의 단면이 확대되거나 축소되는 경우 등에 대한 연구가 이루어지고 있다. 이와같은 마이크로채널 내의 유체 유동해석은 Bio-MEMS 분야에서 장치의 신뢰도나 정밀도 향상을 위하여 그 중요성이 점점 높아지고 있다.

이러한 2차원 채널의 여러 가지 형태에 대하여 그동안 많은 연구가 이루어져왔다. Wang¹⁾은 여러 개

의 상하 대칭인 핀과 엇갈린 핀이 부착된 2차원 채널내의 Stokes 유동을 고유함수 전개와 점 배열(point collocation) 방법으로 유선과 압력 등을 이론적으로 해석하였다. 그리고 Yoon²⁾ 등은 상하 대칭으로 1쌍의 박막이 수직으로 부착된 2차원 채널을 통과하는 층류 유동장에 대하여 레이놀즈 수 $0 < Re < 100$ 범위에서 이론 및 수치해석의 방법으로 유동함수, 압력분포, 박막이 받는 힘을 구하고 등을 구하고 유선을 도시하였다. 여기서, 그들은 레이놀즈 수가 임계값을 넘게 되면 유동이 불안정해지며 상하 대칭성이 깨짐을 밝혔다. 그 외에도 채널 내의 유동에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다.³⁻⁵⁾

본 연구에서는 Fig.1과 같이 상하 대칭으로 한 쌍의 박막이 수직으로 부착된 2차원 마이크로채널 내의 기체유동에 대하여 이론해석 및 수치해석을 수행한다. 유동장의 크기가 마이크로 스케일로 줄어들어

*정회원, 전남대학교 기계시스템 공학부,
*E-mail : jtjeong@chonnam.ac.kr

누센 수(Knudsen number)가 $0.001 \leq Kn \leq 0.1$ 로 되면, 경계에서 유동의 점착조건(no-slip condition)이 만족되지 않고 슬립이 일어나며 이 슬립속도는 다음과 같이 기체의 평균자유행로 λ 와 벽면에서의 속도 구배에 비례하게 된다.⁶⁾

$$u_s = \frac{2-F}{F} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1)$$

여기서, F 는 tangential momentum accommodation coefficient 이다. 이와 같은 슬립속도 경계조건을 모델링하는 연구도 수행된 바 있다.⁷⁾

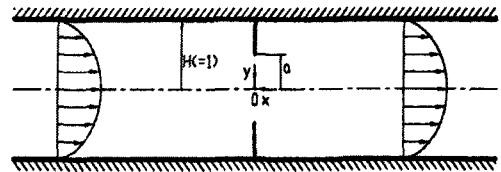
해석방법으로는 스토크스 유동장을 고유함수 전개와 점 배열 방법을 사용하여 박막의 길이와 누센 수의 변화에 따라 경계조건을 만족하는 유동함수와 압력분포를 구하였다. 연구 결과로서, 박막의 길이와 누센 수의 변화에 따라, 채널 내의 유선과 압력분포를 도시하고 벽면에서의 슬립속도분포, 박막이 받는 힘과 박막에 의한 부가적 압력강하 등의 유동 특성을 조사하였다.

2. 문제의 해석

본 연구에서는, Fig.1과 같이, 간격이 $2H(H=1)$ 이고 서로 평행한 평판으로 이루어진 2차원 마이크로채널 안쪽에 상하 대칭이고 길이는 $(1-a)$ 인 박막이 평판에 수직으로 부착된 경우 마이크로채널 내를 흐르는 유동을 고려한다. 충분히 긴 채널의 입구와 출구에서는 단위 유량의 완전 발달된 2차원 포아제(Poiseuille) 유동이 존재한다. 유체의 모든 물성치는 일정하고 채널에 부착된 박막의 두께는 매우 얇다고 가정하였다. Fig.1과 같이 2차원 직교 좌표계 (x,y) 를 취하고 유동함수 $\Psi(x,y)$ 를 도입하면 x, y 방향의 무차원 속도성분 u, v 는 다음과 같이 표현된다.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2)$$

Fig. 1 Definition sketch of flow field



마이크로채널의 간격이 매우 작으므로 유동장의 레이놀즈 수가 매우 작아지며 Stokes의 근사에 의하여 지배방정식에서 관성항은 무시할 수 있다. 따라서, 유동함수 $\Psi(x,y)$ 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 biharmonic equation⁸⁾이 된다.

$$\nabla^4 \Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi = 0 \quad (3)$$

$\Psi(x,y)$ 에 대한 경계조건으로는 slip 조건에 의해, 상하 평판($y = \pm 1$)에서,

$$\Psi = \pm 1, \Psi_y = \mp C \Psi_{yy} \quad (4a)$$

이고, 상하 박막($x = 0, a \leq |y| \leq 1$)에서는

$$\Psi = \pm 1, \Psi_x = C \Psi_{xx} \quad (4b)$$

이며, 입구와 출구($x \rightarrow \pm \infty$)에서는 슬립 경계조건이 적용된 포아제(Poiseuille) 유동

$$\Psi(x,y) \rightarrow \frac{6Cy + 3y - y^3}{2 + 6C} \quad (4c)$$

으로 접근한다. 슬립경계조건을 나타내는 식 (4a)는 누센 수(Knudsen number)를 $Kn \equiv \frac{\lambda}{H}$ 로 정의하고 식 (1)을 무차원화 한 결과이다. 여기서 상수 C 는

$$C = \frac{2-F}{F} Kn \quad (5)$$

로 표현되며, $C=0$ 인 경우는 슬립속도가 0 이 되므로 보통의 유동에서 점착조건(no-slip condition)이

적용되는 경우에 해당된다. 또, 유동장내에서는 속도와 응력이 연속이므로, $x=0, -a < y < a$ 에서

$$\Psi_x=0, \Psi_{xx}=0 \tag{6}$$

을 만족해야 한다.

유동장의 대칭성을 고려하면,

$$\Psi(x, y) = \Psi(-x, y) = -\Psi(x, -y) \tag{7}$$

를 만족하므로, 우리는 유동영역을 ($0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq 1$) 인 영역만 고려해도 충분하다.

이와같은 유동장의 대칭성과 무한원에서의 경계조건 (4c)를 고려하면 유동 함수 $\Psi(x, y)$ 는 $x \geq 0$ 인 영역에서 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\Psi(x, y) = \frac{6Cy + 3y - y^3}{2 + 6C} + \int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x S(\xi, y) d\xi + \sum_{n=1}^\infty \sin n\pi y T_n(x) \tag{8}$$

여기서 우변 첫째 항은 슬립 경계조건이 적용된 2차원 채널 내의 포아제 (Poiseuille) 유동을 의미한다. 식(8)에서 $A(\xi)$ 는 미지이며, 미지함수 $S(\xi, y)$ 와 $T_n(x)$ 는 식(8)이 식(3)을 만족시키기 위하여 다음의 식을 만족해야 한다.

$$\frac{d^4 S}{d\xi^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 S}{d\xi^2} + \xi^4 S = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^4 T}{dx^4} - 2n^2 \pi^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + n^4 \pi^4 T = 0. \tag{10}$$

여기서 경계조건 $\Psi(x, 1) = 1$ 을 적용하면 $S(\xi, 1) = 0$ 이므로 $S(\xi, y)$ 와 $T_n(x)$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$S(\xi, y) = \cosh \xi \sinh \xi y - y \sinh \xi \cosh \xi y \tag{11}$$

$$T_n(x) = e^{-n\pi x} [C_n(n\pi x + 1) + D_n] \tag{12}$$

위의 식을 식 (8)에 대입하면 유동함수 $\Psi(x, y)$ 는 일부 경계조건 $\Psi(x, 1) = 1, \Psi_x(0, y) = 0$ 을 만족하고 있다. 이 때 식 (6)의 경우에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $T_n(x) \rightarrow 0$ 으로 됨을 알 수 있다.

이제 식(8)에 식(4a)와 같은 $y=1$ 에서의 슬립경계조건

$$\Psi_y(x, 1) = -C \Psi_{yy}(x, 1) \tag{13}$$

을 적용하고 x 에 관하여 Fourier cosine 변환을 취하면 $A(\xi)$ 에 대한 표현식을 얻을 수 있으며, 이를 다시 식(8)에 대입하고 정리하면 $\Psi(x, y)$ 에 관한 다음과 같은 표현식을 얻을 수 있다.

$$\Psi(x, y) = \frac{6Cy + 3y - y^3}{2 + 6C} - \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \text{Im} \left\{ \frac{4n^4 \pi^4}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2} B_n + \frac{2n^2 \pi^2 D_n}{\xi_m^2 + n^2 \pi^2} \right\} \times \sum_{m=1}^\infty \frac{\cosh \xi_m \sinh \xi_m y - y \sinh \xi_m \cosh \xi_m y}{E(\xi_m)} e^{i \xi_m x} \tag{14}$$

식(14)에서 'Im' 은 복소수의 허수부분을 의미하며,

$$E(\xi_m) = \sinh^2 \xi_m + C(\sinh^2 \xi_m + 2\xi_m \sinh \xi_m \cosh \xi_m) \tag{15}$$

이다. 그리고, 복소수 ξ_m ($m = 1, 2, 3 \dots$)은 방정식

$$\xi - \sinh \xi \cosh \xi - 2C \xi \sinh^2 \xi = 0 \tag{16}$$

의 복소수 근 (complex root) 중 1상한에 있는 근이다. 따라서, 식(14) 복소 고유값 (complex eigen value)과 복소 고유함수 (complex eigen function)를 갖는 일종의 고유함수 전개 형태로 볼 수 있다.

위의 식 (14)에 포함된 미지수 B_n, D_n 은 다음의 남

은 경계 조건(4b)와 (6)을 만족하도록 결정되어야 한다. 즉,

$$\Psi(0, y) = 1, \quad a \leq y \leq 1 \quad (17a)$$

$$\Psi_x(0, y) = C\Psi_{xx}(0, y), \quad a \leq y \leq 1 \quad (17b)$$

$$\Psi_{xxx}(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (18c)$$

$$\Psi_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (18d)$$

여기서, 적당한 N 값을 취하여 식(14)의 n 에 대한 총합을 N 항까지 만으로 한정시키고, $x=0, 0 < y < 1$ 에 있는 $2N$ 개의 유한한 점에 경계조건 식 (17) 또는 (18)을 적용하면 $2N$ 개의 미지수 B_n, D_n ($n=1, 2 \dots N$)에 관한 선형 연립방정식계를 구성할 수 있다. 이 선형 연립방정식들을 풀면 B_n, D_n ($n=1, 2 \dots N$)을 구할 수 있으므로 이제 식(14)로부터 유동함수를 구할 수 있다. 본 문제에서는 $2N \cong 100$ 로 하면 충분함을 알 수 있었다.

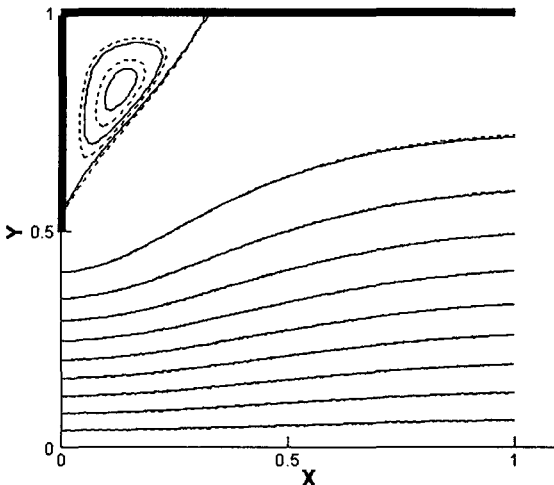


Fig. 2 Streamline for $\alpha=0.5$ (solid line for $Kn=0$ and dotted line for $Kn=0.01$)

3. 계산결과 및 고찰

3.1 유동함수

유동함수는 (14)식으로 주어진다. 여기서 상수 B_n, D_n 은 앞 절에서의 방법으로 구해졌다. $a=0.5, Kn=0, 0.01$ 인 경우에 대하여 유동함수 값을 계산하여 Fig.2에 유선을 도시하였다. 슬립 속도가 작기 때문에 전체 유동장의 형태에는 큰 변화가 없지만, 박막 근처의 점성 에디(viscous eddy)의 크기는 상당한 변화가 나타난다.

3.2 압력분포

스토크스(Stokes) 유동에서 무차원 압력 $p(x, y)$ 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$p_x = \nabla^2 \Psi_y, \quad p_y = -\nabla^2 \Psi_x \quad (19)$$

따라서, 방정식 (14)를 사용하고 식(19)을 적분하면, 압력 분포 $p(x, y)$ 가 다음과 같이 구해진다.

$$p(x, y)/\mu = \frac{-3x}{1+3C} - 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Re \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n^4 \pi^2 B_n}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2} + \frac{n^2 D_n}{\xi_m^2 + n^2 \pi^2} \right\} \times \frac{\xi_m (\cosh \xi_m y e^{i\xi_m x} - 1)}{\sinh \xi_m + C(\sinh \xi_m + 2\xi_m \cosh \xi_m)} \quad (20)$$

여기서 μ 는 유체의 점성계수이고, Re 는 복소수의 실수부분을 의미한다. 식(20)에서 우변 첫 항은 박막이 없는 마이크로채널의 경우의 슬립이 고려된 포아제 유동에서의 선형적인 압력강하를 나타내고 있다. $a=0.5, Kn=0, 0.01$ 인 경우에 대하여 압력을 계산하여 Fig.2에 압력분포를 도시하였다. $Kn=0.01$ 일 때는 벽면에서 슬립이 일어나므로 같은 유량에 대하여 $Kn=0$ 일 때(슬립이 일어나지 않을 때)보다 채널 벽면에서 전단응력이 작아지므로 유동장 내에서 압력구배도 작아지게 된다. 이 점을 감안하면, 채널 내의 슬립유동에서 유동방향으로 압력은 보다 천천히 감

소하지만, 박막에 의한 부가적 압력강하는 Knudsen 수의 효과(슬립경계조건)에 거의 무관함을 알 수 있다.

유동장에서 $p(0^-, y) = -p(0^+, y)$ 이므로 아래 식(14)와 같이 계산할 수 있다.

$$F = -2 \int_a^1 p(0^+, y) dy \quad (21)$$

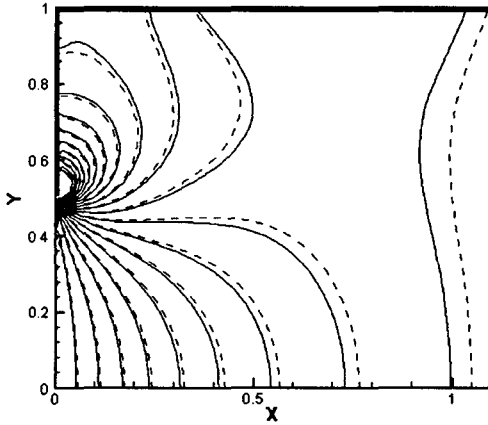


Fig. 3 Pressure distribution for $\alpha=0.5$ (solid line for $Kn=0$ and dotted line for $Kn=0.01$)

부가적 압력강하는 압력에 관한 식 (20)의 우변 2째 항에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때의 값의 2배에 해당된다. Kn 값을 0으로 고정시키고, 박막이 받는 힘과 부가적 압력 강하량을 a의 변화에 따라 계산하여 Fig.4에 그래프로 나타내었다. $a \rightarrow 0$ 일 때, 즉, 박막 사이의 틈새가 매우 작아짐에 따라 박막이 받는 힘과 압력 강하량은 급격히 증가함을 알 수 있다. 다른 Kn 수($Kn=0.01, 0.1$)에 대해서도 계산해 보았으나 그래프 상 거의 차이가 나지 않기 때문에 그래프에 나타내지 않았다.

4. 결 론

박막이 수직으로 부착된 2차원 마이크로채널내의 유동에서 유량을 일정하게 유지시키고 박막의 길이와 Knudsen 수의 변화에 따른 유동함수를 구하였다. 채널 벽면과 박막에 슬립 경계조건을 적용하여 Stokes 유동($Re_H=0$)을 이론적으로 고찰하였다. 슬립속도가 속도구배에 비례하여 존재한다는 조건을 사용하면, no-slip인 경우와 마찬가지로, 유동함수를 고유함수 전개 형태로 표현하여 해를 구할 수 있었다.

구해진 해로부터 Knudsen 수와 박막의 길이 변화에 따른 결과를 검토하였다. 슬립속도가 작으므로 전체 유동장의 형태는 변화하지 않으나, 박막 근처의 점성에디(viscous eddy)의 크기는 상당한 영향이 나타났다. 압력은 벽면의 슬립 영향으로 압력구배가 작아지며, 박막이 받는 힘과 박막에 의한 부가적 압력 강하량은 박막의 길이에 따라 크게 변화하지만 Knudsen 수의 변화에 의한 영향은 거의 나타나지 않았다.

본 논문에서와 같이 박막이 부착된 마이크로채널의 형상에 대한 슬립유동 해석 방법은 Bio-MEMS

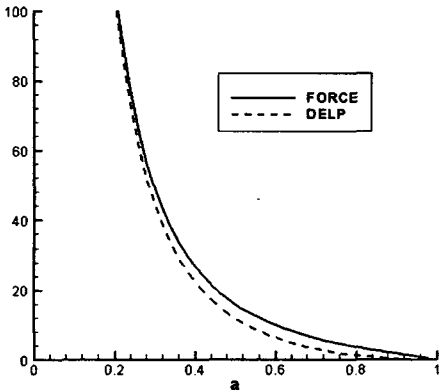


Fig. 4 Force exerted on the fins and pressure drop due to the fins in the channel for $Kn=0$. For other values of Kn, the discrepancy is very small.

3.3 박막이 받는 힘과 부가적 압력강하

하나의 박막이 받는 단위 폭 당 힘 F 는 스토크스



분야의 마이크로벨브나 오리피스, 마이크로열교환기 등의 다른 미소유동장에 대한 해석 방법으로도 활용될 수 있으리라 기대된다.

참고문헌

- [1] Wang, C. Y., 1997, "Stokes Flow Through a Transversely Finned Channel", ASME J. Fluids Eng., Vol. 119, pp.110-114.
- [2] 윤석현, 정재택 2002, "박막이 부착된 채널내의 2차원 층류유동장에 대한 연구", 한국전산유체공학회 Vol.7, No.3, pp.53-59.
- [3] M.-U. Kim, Do H. Choi and J.-T. Jeong 1989, "A Two-Dimensional Model of a Half-Pitot Tube, Fluid Dynamics Research", Vol.5, No.2, pp.135-145.
- [4] Wang, C. Y., 1994, "Flow in a Channel with Longitudinal Ribs", ASME J. Fluids Eng., Vol. 116, pp.233-237.
- [5] J.-T. Jeong, 2001, Slow viscous flow in a partitioned channel, Phys. Fluids, Vol. 13, No. 6, pp.1577-1582.
- [6] G.E. Karniadakis, A. Beskok, 2002, "Mico flows Fundamentals and Simulation", Springer-Verlag, New York, pp.45-53.
- [7] J.-T. Jeong,, 2001, Slip boundary condition on an idealized porous wall, Phys. Fluids, Vol.13, No.7, pp.1884-1890.
- [8] Wang, C. Y., 1993, "Stokes flow through a two dimensional filter", Phys. Fluids, Vol.5, No.5, pp.1113-1116.