

# 웨이브렛의 주파수-시간 평면 해석에 관한 연구

배상범<sup>\*</sup> · 류지구<sup>\*\*</sup> · 김남호<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>부경대학교 공과대학 제어계측공학과, <sup>\*\*</sup>부경대학교 공과대학 전자공학과

## A Study on Frequency-Time Plane Analysis of Wavelet

Sang-Bum Bae<sup>\*</sup> · Ji-Goo Ryu<sup>\*\*</sup> · Nam-Ho Kim<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.

<sup>\*\*</sup>Dept. of Electronics Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : blueskybsb@mail1.pknu.ac.kr

### 요 약

현재, 신호를 해석하기 위한 많은 방법들이 제시되고 있으며, 대표적인 방법으로는 푸리에 변환과 웨이브렛 변환이 있다. 이러한 방법들에서, 푸리에 변환은 모든 주파수 범위에 대해 cosine과 sine 파형의 조합으로써 신호를 표현하지만, 신호 내에서 특정 주파수 성분이 발생한 시간정보를 제공하지 않으며, 분석 신호의 전체적인 특징만을 나타낸다. 따라서 이러한 한계를 극복하기 위해, 다중해상도 해석이 가능한 웨이브렛 변환이 음성과 영상처리, 컴퓨터 비전 등의 광범위한 분야에서 응용되고 있다. 그리고 웨이브렛 변환은 스케일 변수에 따라 변화하는 윈도우를 사용하여, 시간-주파수 국부성을 나타낸다. 본 논문에서는 cosine과 sine 형태의 웨이브렛을 사용하여, 푸리에 변환의 새로운 접근법을 제시하였으며, 주파수-시간 평면의 유한한 지점에서 신호의 특징을 분석하였다.

### ABSTRACT

Recently, many methods to analyze signal have been proposed and representative methods are the Fourier transform and wavelet transform. In these methods, the Fourier transform represents signal with combination cosine and sine at all locations in the frequency domain. However, it doesn't provide time information that particular frequency occurs in signal and depends on only the global feature of the signal. So, to improve these points the wavelet transform which is capable of multiresolution analysis has been applied to many fields such as speech processing, image processing and computer vision. And the wavelet transform, which uses changing window according to scale parameter, presents time-frequency localization. In this paper, we proposed a new approach using a wavelet of cosine and sine type and analyzed features of signal in a limited point of frequency-time plane.

### 키워드

wavelet, multiresolution, time-frequency localization

## 1. 서 론

최근, 사회가 고도의 디지털 정보화 시대로 발전함에 따라, 획득된 신호를 처리하여 유용한 정보를 추출하는 다양한 처리 방법들이 소개되고 있다.

연속과 이산시간 신호 및 시스템을 분석하기 위한 중요한 도구로서 사용되고 있는 푸리에 변환은 주기와 비주기 신호로 분류되는 결정적 신호를 연구하기 위해 광범위하게 사용되고 있다. 이러한 푸리에 변환은 임의의 신호를 표현하기 위해 무한개의 cosine과 sine 파형의 조합을 사용한다. 그러나 푸리에 변환은

신호내의 특정 주파수 성분에 대한 시간 정보를 제공하지 않는다. 이와 같이 시간 해상도가 고려되지 않음에 따라, 주파수 영역의 각 성분들은 신호의 전체적인 동작에만 의존한다.

푸리에 변환의 단점을 극복하기 위해, Gabor에 의해 제시된 STFT(short time fourier transform)는 시간 전이와 주파수 스케일링을 갖는 기저함수를 사용하였다[1],[2]. 즉, 일정한 간격으로 시간축을 따라 이동하는 윈도우를 사용하고, 각 위치에서의 푸리에 변환으로부터 시간과 주파수 특성을 동시에 표현하였다. 그러나 STFT가 고정된 길이의 윈도우에 의해, 시

간-주파수 국부성이 상충관계를 가지므로, 분석 신호에 따라 시간-주파수 해상도를 결정짓는 적절한 윈도우를 설계해야만 한다.

그러나 웨이브렛 변환은 광대역, 멀티스케일 신호를 표현하기 위해 사용될 수 있으며, 신호의 시간 정보와 스케일 정보 사이의 상관관계를 표현하는 시간-스케일 공간을 제시한다[3]-[5]. 즉, 짧은 지속시간을 갖는 고주파 신호에 대해서는 짧은 길이의 윈도우를 사용하고, 긴 지속시간을 갖는 저주파 신호에 대해서는 긴 길이의 윈도우를 사용하여, 신호의 모든 위치에서 변환을 수행함에 따라, 시간-주파수 국부성을 나타낸다.

본 논문에서는 푸리에 변환의 새로운 응용으로서, cosine과 sine 형태의 웨이브렛을 사용하여 신호를 분석하였다. 이러한 정현함수를 이용한 웨이브렛은 연속 웨이브렛 변환과 달리, 특정한 지점에 대해서 유한개의 윈도우 전이 지점을 사용한다. 그러나 주파수 영역의 모든 지점에 대해서 변환이 수행됨에 따라, 다중해상도 해석이 가능하다.

## II. 웨이브렛 변환

어떤 함수  $\psi(t)$ 의 푸리에 변환을 다음의 식 (1)과 같이 정의한다. 이때,  $\Psi(\omega)$ 가 식 (2)의 허용조건을 만족하면, 함수  $\psi(t)$ 를 mother 웨이브렛으로 정의한다.

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$C \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2)$$

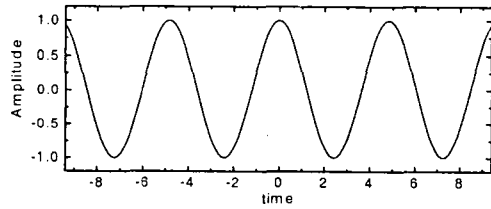
$\psi(t)$ 의 이동과 확장에 의해 식 (3)의 baby 웨이브렛을 얻을 수 있으며,  $a$ 는 scale 변수이고  $b$ 는 translation 변수이다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3)$$

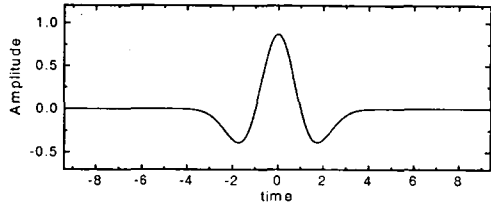
따라서 신호  $f(t) \in L^2(R)$ 이면, 연속 웨이브렛 변환(CWT)은 식 (4)와 같이 정의되며, \*는 켈레 복소를 의미한다.

$$Wf(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (4)$$

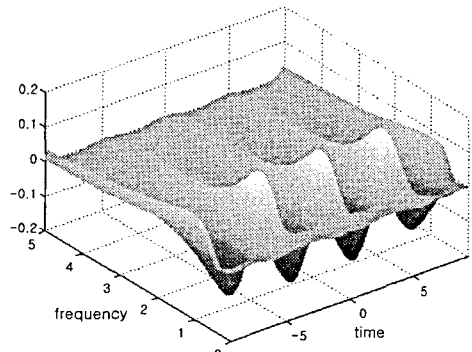
식으로부터, scale 변수  $a$ 가 변화함에 따라 연산을 위한 웨이브렛 윈도우의 넓이가 확대 또는 축소되어, 주파수 영역에 따른 다중 해상도 해석을 가능하게 한다.



(a)  $\cos(\omega t)$



(b) 웨이브렛 함수



(c) 웨이브렛 변환 결과

그림 1. 신호에 대한 웨이브렛 변환

그림 1은 식 (5)로 표현되는 2차 미분 가우스 웨이브렛을 사용하여  $f(t) = \cos(\omega t)$ 에 대한 surface plot을 나타내고 있다.

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (5)$$

## III. 푸리에 변환의 주파수-시간 평면 해석

푸리에 분석으로부터 신호에 대한 정보를 획득하기 위해, 다음의 식들과 같은 함수를 정의한다.

$$\psi^c(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in [-\pi, \pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi^s(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in [-\pi, \pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

즉, 위의 식은 구간  $[-\pi, \pi]$ 에서 정의되는 푸리에 변환의 기저함수를 나타낸다. 또한, 위의 두 식은 시간-스케일과 시간이동에 의해, 각각  $\psi_{\omega, b_n}^c(t)$ 와  $\psi_{\omega, b_n}^s(t)$ 으로 표현될 수 있다.

일반적으로, 임의의 신호  $f(t)$ 에 대한 푸리에 변환은 식 (8)과 같이 표현된다.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \} dt \quad (8)$$

그리고 연속되는 정현파는  $2\pi/\omega$ 의 간격으로 시간축 상에서  $\dots, I_{-1}, I_0, I_1, \dots$ 와 같이 분할할 수 있으며, 이때  $I_n = [-\frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}, \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}]$ 이다. 따라서 식 (8)로 표현된 푸리에 변환은 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_n \int_{I_n} f(t) \cos(\omega t) dt \\ &\quad - j \sum_n \int_{I_n} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^c \left( \omega \left[ t - \frac{2\pi n}{\omega} \right] \right) dt \\ &\quad - j \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^s \left( \omega \left[ t - \frac{2\pi n}{\omega} \right] \right) dt \end{aligned} \quad (9)$$

위의 식으로부터, 실수부와 허수부를 다음의 두 식과 같이 나타낸다.

$$W_c(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\omega, b_n}^c(t) dt \quad (10)$$

$$W_s(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\omega, b_n}^s(t) dt \quad (11)$$

식으로부터  $b_n = (2\pi/\omega)n$ 이며, 주파수  $\omega$ 에 의존하고 신호  $f(t)$ 를 따라 이동한다. 위의 과정으로부터, 푸리에 변환은  $W_c(\omega, b_n)$ 과  $W_s(\omega, b_n)$ 에 의해서 다음의 식 (12)와 같이 표현된다.

$$F(\omega) = \sum_n W_c(\omega, b_n) - j \sum_n W_s(\omega, b_n) \quad (12)$$

따라서 주파수-시간 평면에서 전이될 수 있는 지점들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= \left\{ (\omega, b_n); \omega \in (-\infty, +\infty), \right. \\ &\quad \left. b_n = \frac{2\pi n}{\omega}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm N(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $N(\omega)$ 는 구간  $[-k\pi, k\pi]$ 에서 분석되는 신호에 대해서 식 (14)와 같다.

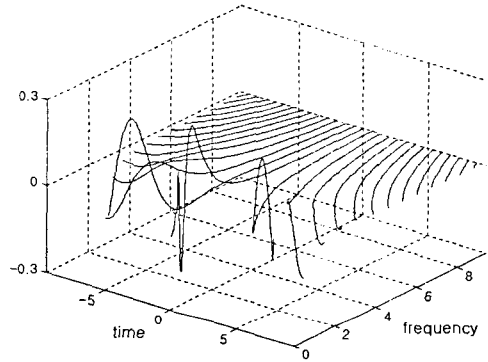


그림 2.  $\cos(\omega t)$ 의 웨이브렛 변환  $W_c(\omega, b_n)$

$$N(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega < \frac{1}{3} \\ \lfloor \frac{k\omega - 1}{2} \rfloor, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

만약,  $k=3$ 으로 주어지는 구간에서 신호  $f(t)$ 가 정의된다면, 이때  $\psi^c$ 를 이용한 그림 1(a)의  $f(t) = \cos(\omega t)$ 에 대한 웨이브렛 변환은 그림 2와 같다. 따라서 신호를 분석하기 위해, 요구되는 전이의 수는 식 (15)와 같다.

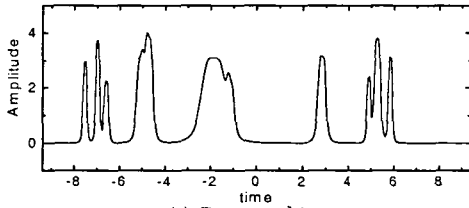
$$M = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \\ 2n + 1, & \text{if } \omega \in \left(\frac{2n+1}{3}, \frac{2n+3}{3}\right) \end{cases} \quad (15)$$

#### IV. 시뮬레이션 및 결과

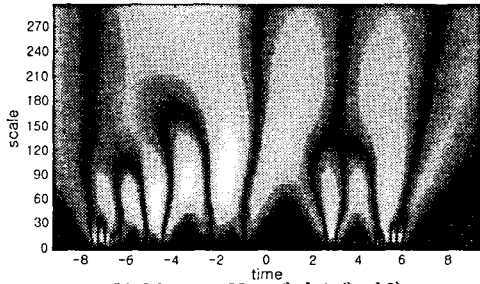
본 논문에서는 신호를 분석하기 위해, 푸리에 변환의 기저함수인 cosine과 sine을 사용한 새로운 형태의 분석 웨이브렛을 제시하였다. 그리고 주파수-시간 평면상에서, 이러한 웨이브렛을 이용한 신호의 분석 특성을 살펴보기 위해, 테스트 신호로서 Bumps 신호를 사용하였다. 이때 sample rate는 100[Hz]이며, 기존의 연속 웨이브렛 함수와 비교하였다.

그림 3은 Bumps 신호에 대한 시뮬레이션 결과를 나타내고 있다. 그림으로부터 (a)는 시간 영역에서의 Bumps 신호이며, (b)는 Mexican Hat 웨이브렛을 이용한 변환결과이고, (c)는 본 논문에서 제시한 cosine 웨이브렛을 이용한 변환 결과이다. 그리고 (d)는 이산 전이 파라미터를 이용한 cosine 웨이브렛 변환 결과이며, (e)는 sine 웨이브렛 변환 결과를 나타낸다.

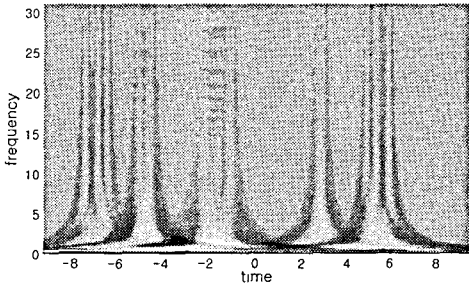
결과로부터, 그림 (b)와 같은 기존의 웨이브렛 변환은 신호를 분석하기 위해, 각 스케일에서 시간축상의 모든 위치에 대해 변환이 수행됨에 따라, 원도우가 서로 중복되며, 매우 많은 양의 계수를 갖게 된다.



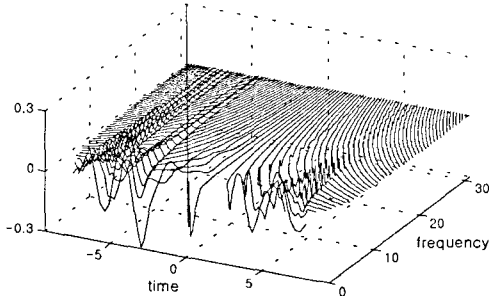
(a) Bumps 신호



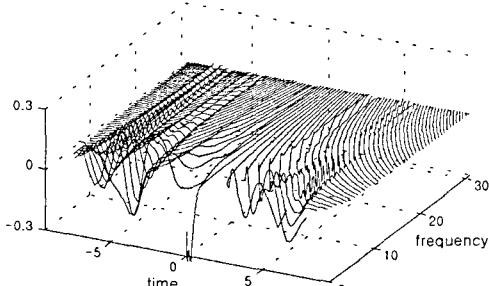
(b) Mexican Hat 웨이블릿 변환



(c) cosine 웨이블릿 변환



(d) 전이 궤적에서의 cosine 웨이블릿 변환



(e) 전이 궤적에서의 sine 웨이블릿 변환

그림 3. Bumps 신호에 대한 웨이블릿 변환

그러나 제안된 방법은 분석 신호에 대해서, 최소 정보만을 획득하기 위해, 주파수에 의존하는 전이 파라미터를 사용하였다. 이에 따라 (d), (e)와 같은 두 형태의 웨이블릿 변환은 많은 양의 변환 데이터를 필요로 하지 않는다. 그리고 변환 결과로부터, 주파수 대역별 신호 구성성분에 대한 profile 정보획득이 용이하였다.

## V. 결론

본 논문에서는 신호를 분석하기 위해, 푸리에 변환의 기저함수인 cosine과 sine 함수를 사용한 새로운 형태의 분석 웨이블릿을 제시하였다.

그리고 제안된 웨이블릿은 주파수에 의존하는 전이 파라미터에 의해 신호를 분석함에 따라, 많은 양의 데이터를 필요로 하지 않는다. 즉, 본질적으로 특정 주파수에서의 푸리에 변환 값이 신호 파형과 cosine 및 sine 파의 적분으로부터 구해지므로, 주파수에 따라 시간축을 주기간격으로 분할할 수 있다. 따라서 이러한 기저함수의 윈도우는 STFT에서 사용하는 고정된 길이의 윈도우와 달리, 주파수에 따라 변하며, 모든 주파수의 정현파를 사용하므로 다중해상도 신호처리를 제공한다.

Bumps 신호를 이용한 시물레이션으로부터, 기존의 웨이블릿 변환은 신호를 분석하기 위해 윈도우가 중복되어 이동함에 따라, 많은 양의 데이터를 포함하였다. 그러나 제안된 방법은 주파수에 의존하는 전이 궤적 상에서 최소 정보만을 획득하였으며, 변환 결과로부터, 신호에 대한 profile 정보획득이 용이하였다.

## 참고 문헌

- [1] J. G. Daugman, "Complete discrete 2-D Gabor transforms by neural networks for image analysis and compression", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., vol. 36, no. 7, pp. 1169-1179, July 1988.
- [2] O. Ersoy, Fourier-Related Transform, Fast Algorithms and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [3] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.
- [4] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets", in Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, 1992.
- [5] C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo, Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms, a Primer. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998.