2005 Proceedings of the Autumn Conference, Korea Statistical Society

공분산 구조를 만족하는 다변량 포아송 확률난수 생성

정 형 철[1] 김 대 학[2] 정 병 철[3]

요 약

본 논문에서는 k개의 포아송 확률변수가 서로 종속 되어 있는 다변량 포아송 분포를 따를 때, 주어진 분산-공분산 행렬 구조를 유지하는 다변량 포아송 확률난수 생성 방법에 대해 다루었다. 특히, 확률난수를 생성하기 위해 선형방정식을 푸는 두 가지 수치해석 알고리즘을 제안하였으며, Park 등 (1996)의 다변량 베르누이 확률난수 생성에 활용된 알고리즘과의 연관성을 다루었다.

주요용어 : 다변량 포아송분포, 종속구조, 확률난수 생성, 선형방정식

1. 소개

k개의 포아송 확률변수가 각각 포아송 확률분포 $P(\lambda_i), i=1,\cdots,k$를 따르며, 서로 복잡한 상관구조를 형성한다고 하자. 포아송분포와 같은 이산분포가 다변량 구조를 형성하면, 많은 수의 모수 때문에 확률계산, 모수추정 및 난수발생 등 통계적 추론에 상당한 어려움이 따를 수 있다. k변량 포아송분포의 통계적 추론에 있어서 Tsiamyrtzis and Karlis (2004)는 다변량 포아송 확률을 계산하는 알고리즘을 제안한 바 있다. 그런데, 무엇보다도 우선되는 것은 다변량 포아송분포와 그의 모수에 대한 정확한 정의가 요구된다고 하겠다. 그러므로 본 연구에서 먼저, Krummenauer (1998a,b)의 k변량 베르누이 분포로부터 유도된 다변량 포아송분포를 소개하고, 다변량 포아송분포를 표현하는 모수의 특징을 살펴보고자 한다. 특히, 본 연구에서는 Krummenauer (1998a)와 Karlis (2003)에 의해 정의된 일반적 다변량 포아송 분포로부터 확률난수를 생성하는 방법을 다루고자 한다. 이를 위해 선형방정식을 푸는 두 가지 수치해석 알고리즘을 제안하였으며, Park 등 (1996)의 다변량 베르누이 확률 난수 생성에 활용된 알고리즘과의 연관성을 다루었다. 무엇보다도, 본 연구에서는 3 변수 이상의 관계를 설명하는 공통모수가 주어지지 않은 상황에서, 두 변수들 간의 분산-공분산 행렬을 만족하는 다변량 포아송 확률난수를 생성하는 방법을 중심으로 다루고자 한다.

본 논문의 2장에서는 다변량 포아송분포의 일반적 모수에 대해, 3장에서는 주어진 모수 행렬로부터 난수 생성하는 방법에 대해 소개하였다. 그리고 4장에서는 특별한 분산-공분산 행렬이 주어졌을 때, 이를 만족하는 확률난수를 생성하는 두 알고리즘을 다루었으며, 5장에서는 결론 및 토론을 기술하였다.

2. 다변량 포아송분포

2.1 k 변량 다변량 이항분포를 이용한 경우

1) (445-743) 경기도 화성시 봉담읍 와우리 수원대학교 통계정보학과, 조교수
2) (712-702) 경북 경산시 하양읍 금락리 대구가톨릭대학교 정보통계학과, 교수
3) (130-743) 서울시 동대문구 전농동 서울시립대학교 통계학과, 조교수

$B_1,\cdots,B_k$가 각각 베르누이 분포 $B_i \sim B(1,p_i), i=1,\cdots,k$를 따른다고 하자. 여기서 $p_i,\cdots,p_k$는 베르누이 주변확률 분포의 성공확률을 의미한다. 이제, $\varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\}$에 대해 $p_I = P(B_i = 1 \ \forall i \in I)$를 정의하자. 집합의 원소를 표현하기 위해, $i_1,i_2,\cdots,i_l \in \{1,2,\cdots,k\}$에 대해 첨자로 표현된 $p_{i_1,i_2,\cdots,i_l} = p_{\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}} = p_{i_1 i_2 \cdots i_l}$ 등은 같은 의미이며, $i_1,i_2,\cdots,i_l \in \{1,2,\cdots,k\}$의 모든 순열 $j_1,j_2,\cdots,j_l$에 대해 $p_{i_1,i_2,\cdots,i_l} = p_{j_1,j_2,\cdots,j_l}$이라 놓자. 이제, k 변량 베르누이 분포에 대한 모수 집합은 다음과 같이 표현된다(Krummenauer; 1998a).

$$\boldsymbol{P} := \{p_I : I \subseteq \{1,\cdots,k\}, I \neq \varnothing\}$$

예를 들어 $k=3$이면, $I := \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$으로, 7개의 집합을 표현하며, $p_{12} = p_{21} = p_{\{1,2\}}$라 하겠다.

이제, $\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(n)}$을 독립적인 k-변량 베르누이 분포를 따른다고 할 때, $\boldsymbol{X}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{X}^{(n)}$ 은 k 변량 이항분포를 따르며, 이를 다변량이항분포라 하고, $MVB_k(n,\boldsymbol{p})$라 표현할 수 있다(Krummenauer; 1998a). 이제, 모수의 집합

$$\Lambda := \{\lambda_I : \varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\}\}$$

에 대해, $\boldsymbol{np} \to \Lambda$라면, $MVB_k(n,\boldsymbol{p})$는 주변 확률 분포가 포아송 $P(\lambda_i), i=1,\cdots,k$를 따르는 다변량 포아송분포 $MVP(\Lambda)$로 확률 약수렴하게 된다. 여기서, $MVP(\Lambda)$의 확률생성함수(probability generating function)은

$$f(s_1,\cdots,s_k) = \exp\left\{\sum_{\varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\}} \lambda_I \Pi_{i \in I}(s_i - 1)\right\}$$

이다(Krummenauer; 1998a).

이와 같은 표현에 의해 $i_1,i_2,\cdots,i_k \in \{1,2,\cdots,k\}$에 대해 모수 집합 λ_I 중 λ_{i_1}은 각 포아송분포의 주변확률분포의 모수를, λ_{i_1,i_2}는 두 변수의 공분산 관계를, $\lambda_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$은 k개 포아송 변수의 공통 관계를 나타낸다고 하겠다.

2.2 $k+1$ 변량 포아송분포를 이용한 경우

Dwass and Teicher (1956)은 k 변량 포아송분포를 3 변량 축소 방법(trivariate reduction method)으로 표현하였는데, 이제, 이변량 포아송분포에 대한 성질을 기초로 자연스럽게 k 변량 포아송 분포의 일반적인 구조를 살펴보기로 한다.

다음의 확률변수

$$X_1(\lambda_1) = Y_1(\mu_1) + Y_0(\mu_0) = Y_1(\lambda_1 - \lambda_{12}) + Y_0(\lambda_{12})$$
$$X_2(\lambda_2) = Y_2(\mu_2) + Y_0(\mu_0) = Y_2(\lambda_2 - \lambda_{12}) + Y_0(\lambda_{12})$$

를 생각하자. 여기서, 각 $Y_i, i=0,1,2$는 포아송 모수 $\mu_i, i=0,1,2$를 지니며, 서로 독립인 포아송 확률 분포이다. 그러면, X_1,X_2는 각각 모수 λ_1, λ_2 와 $cov(X_1,X_2) = \mu_0 = \lambda_{12}$를 지니는 이변량 포아송분포를 따르게 된다. 이제,

$$E(X_1X_2) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_{12}$$

이므로, $\rho_{12} = \lambda_{12}/\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}$이다. 따라서, $\lambda_{12} = \rho_{12}\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}$가 된다. $\lambda_{12} \leq \lambda_1,\lambda_2$ 이며, 모든 $\lambda_I \geq 0, I \subseteq \{i,j\}$이므로, 상관계수는 $0 \leq \rho_{12} < \dfrac{\min(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2})}{\max(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2})}$의 범위에서 결정된다 하겠다.

이제, 이변량의 경우를 자연스럽게 k 변량의 경우로 확장하자.

$$X_1(\lambda_1) = Y_1(\mu_1) + Y_0(\mu_0) = Y_1(\lambda_1 - \lambda_{ab}) + Y_0(\lambda_{ab})$$

$$X_2(\lambda_2) = Y_2(\mu_2) + Y_0(\mu_0) = Y_2(\lambda_2 - \lambda_{ab}) + Y_0(\lambda_{ab}) \tag{2.1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$X_k(\lambda_k) = Y_2(\mu_k) + Y_0(\mu_0) = Y_2(\lambda_k - \lambda_{ab}) + Y_0(\lambda_{ab})$$

로 놓으면 $X_1, X_2, \cdots, X_k$는 $k+1$개의 모수가 있는 다변량 포아송 분포라 할 수 있다. 여기서도 두 변수 (X_i, X_j) 간의 상관계수의 범위는

$$0 \leq \rho_{ij} < \frac{\min(\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_j})}{\max(\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_j})}$$

로 결정되며, 모든 변수들 간에 비음(non-negative)인 상관구조를 지닌다고 하겠다.

그런데, 위의 $k+1$개 모수를 사용한 표현에 의하면 다변량 포아송분포의 모든 모수를 표현할 수 없으므로 일반적인 표현이라고 할 수 없다. 일반적인 다변량 포아송 구조를 표현 하는 방법에 대해 Loukas and Kemp (1983), Karlis (2003) 등을 참고할 수 있다. 예를 들어 3 변수 포아송분포인 경우

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{123} \\ X_2 &= Y_2 + Y_{12} + Y_{23} + Y_{123} \\ X_3 &= Y_3 + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} \end{aligned} \tag{2.2}$$

로 표현하는 것이 합리적이라 할 수 있다. 여기서, Y_i는 서로 독립인 포아송분포이며 $i \in (\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\})$이다. 식 (2.2)를 참고하면, 분산분석의 모형을 표현하는 방법처럼 k 변량 포아송분포가 표현된다고 하겠다.

3. Λ를 이용한 다변량 포아송 확률난수 생성

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AY}$의 구조 하에서 다변량 포아송 확률난수를 생성하는 방법과 그의 한계점을 살펴보자. Y_I의 모든 모수 집합을 $M := \{\mu_I \in [0,\infty) : \varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\}\}$이라 놓자. 이제, 적절한 모수 집합 Λ 가 주어지면,

$$\lambda_I = \sum_{J \subseteq \{1,\cdots,k\} : J \supseteq I} \mu_J \quad \forall\ \varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\} \tag{3.1}$$

의 관계식은 $\Lambda_{(2^k-1)\times 1} = B_{(2^k-1)\times(2^k-1)} M_{(2^k-1)\times 1}$으로 표현되므로, $M = B^{-1}\Lambda$로 Y_I의 모든 모수 μ_I를 계산할 수 있다. 여기서 B는 식 (3.1)의 계획행렬이며 크기는 $(2^k-1)\times(2^k-1)$이다. 이제, θ_I를 포아송 확률변수 $P(\mu_I)$에서 생성한 확률난수라 하면,

$$X_i = \sum_{I \subseteq \{1,\cdots,k\} : i \in I} \theta_I \quad (i = 1,\cdots,k) \tag{3.2}$$

로 모수 Λ를 따르는 다변량 포아송 확률난수를 생성할 수 있다. 즉, 다변량 포아송 확률분포의 모든 모수 $\Lambda := \{\lambda_I : \varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\}\}$가 주어지면, 이에 따라 확률변수 Y_I의 모수 μ_I를 결정할 수 있어 다변량 포아송 확률난수를 생성할 수 있게 된다. Krummenaure (1998a)는 (3.1)의 식에서 계획행렬 B를 사용하지 않고 후향대치 과정을 통해 모수 μ_I의 계산을 언급하였다. 그런데, 이 방법의 가장 큰 문제는 연구자가 모든 모수 $\Lambda := \{\lambda_I : \varnothing \neq I \subseteq \{1,\cdots,k\}\}$를 미리 정의하여야 한다는 점이다.

4. 공분산 행렬 구조를 만족하는 다변량 포아송 확률난수 생성

본 절에서는 각 포아송 분포의 평균(분산) $\lambda_i, i = 1,\cdots,k$가 주어지고, $Cov(X_i, X_j) = \lambda_{ij}$만 주어

진 상황에서 이의 조건을 만족시키는 확률난수 생성 방법을 소개하고자 한다.

주어진 문제의 상황은 k개 변수 간의 분산-공분산행렬 $\Sigma=\{\sigma_{ij}\}$이 주어졌으며, 3 변량 이상의 관계를 표현하는 모수 (예를 들어 λ_{ijk})는 주어져 있지 않은 경우이다. 여기서 주어진 모수의 개수는 $k(k+1)/2$이다. 또한, $\Lambda=BM$의 행렬 표현에서 알려진 모수 Λ_1과 알려지지 않은 모수 Λ_2는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$$

여기서, $\Lambda_1=(\lambda_1,\cdots\lambda_k,\lambda_{12},\cdots,\lambda_{(k-1)k})'$이며, $\Lambda_2:=\{\lambda_J : J\subseteq\{1,\cdots,k\} : J\supseteq\{i_1,i_2\}, i_1,i_2\in\{1,\cdots,k\}\}$이다. 이제, 알려진 Λ_1의 정보만으로 해당 선형방정식을 만족하는 적절한 $\mu_I\geq 0$을 찾을 수 있으면, 주어진 분산-공분산 관계를 유지하는 다변량 포아송 난수를 발생 할 수 있다. 물론, 유도해야 할 μ_I는 총 2^k-1개로 $\mu_I\geq 0$을 만족하는 해가 무수히 많이 존재하는 선형방정식임을 쉽게 알 수 있다. 이에 대해, (3.1)의 선형방정식에서 μ_I를 계산하는 다음의 알고리즘을 제안하고자 한다.

4.1 알고리즘 1 : 선형방정식을 푸는 방법

[Step 0] 평균(분산) $\lambda_i, i=1,\cdots,k$과 상관계수 ρ_{ij}로부터 $\lambda_{ij}=\rho_{ij}\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}$에 의해, 분산-공분산 행렬 $\{\sigma_{ij}^{(0)}\}=\Sigma^{(0)}$를 계산한다. $\{\sigma_{ij}^{(0)}\}$를 기초로 초기값 $\lambda_I^{(0)}$를 결정한다. 초기값은 다음의 방법으로 결정한다.

1) $\beta_l=\{\sigma_{rs}:\min\{\sigma_{ij}\}, 1\leq i\leq j\leq k\}$로 놓는다. 이제, $T_l:=\{r,s\}$로 놓으면, T_l은 $\min\{\sigma_{ij}\}$가 있는 원소의 위치를 지칭하는 지시집합(index set)을 의미한다. 여기서, 초기 $l=1$이다.

2) 초기의 선택된 T_l을 포함하는 모수 집합을 $\Lambda_l:=\{\lambda_J : J\subseteq\{1,\cdots,k\} : J\supseteq T_l\}$로 놓고, $\Lambda_l:=\Lambda_l-\bigcup_{i=1}^{l-1}\Lambda_i$ 의 집합을 구한 후, $\lambda_I\in\Lambda_l$에 대해 $\lambda_I=\beta_l$로 할당한다.

3) $l\leftarrow l+1$로 놓고, 앞의 단계에서 결정된 σ_{rs}를 행렬 $\{\sigma_{ij}\}$에서 제외한 후, 1)과 2)의 단계를 반복한다.

4) 위의 방법을 $l=1,\cdots,k(k+1)/2$까지 반복하여 모든 초기값 $\lambda_I^{(0)}$를 결정한다.

[Step 1] 초기 $\mu_I^{(0)}=B^{-1}\lambda_I^{(0)}$를 결정한다. 여기서 $\mu_I^{(0)}\geq 0$이면, 모든 조건을 만족으로 알고리즘을 빠져나온다.

[Step 2] $n=k-1$로 놓고, $C(n):=\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$, $i_1,i_2,\cdots,i_n\in\{1,2,\cdots,k\}$, $n=n(C(n))$에 대해

2-1) $\mu_{C(n)}=\lambda_{C(n)}-\sum_{J\subseteq\{1,2,\cdots,k\}:J\supseteq C(n)}\mu_J$, 모든 $C(n)\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$

를 계산하여, $\mu_{C(n)}\geq 0$ 을 확인한다.

2-2a) 특정 $C(n)$에서, $\mu_{C(n)}<0$이면,

모든 $C(n+1)\supset C(n)$ 중, $\{\max(\mu_i): i\in\{\forall C(n+1)\supset C(n)\}\}$를 포함하는 집합 $C(n+1)$을 선택한다. 그리고, 해당 $C(n+1)$의 $\lambda_{C(n+1)}$에 대해

$$\lambda_{C(n+1)}\leftarrow\lambda_{C(n+1)}+\mu_{C(n)}$$

으로 조정한 후,

$$\mu_{C(n+1)}=\lambda_{C(n+1)}-\sum_{J\subseteq\{1,2,\cdots,k\}:J\supseteq C(n+1)}\mu_J\ ,\ \text{모든}\ C(n+1)\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$$

을 다시 계산하고, 1)로 간다.

2-2b) 모든 $C(n)$에서, $\mu_{C(n)} \geq 0$ 면, [Step 3]으로 간다.

[Step 3] $n \leftarrow n-1$ 로 하여, $n=1$ 까지 [Step 2]을 반복한다.

위의 알고리즘은 단순 선형방정식을 재귀적으로 반복하여 $\mu_I \geq 0$을 만족하는 모든 μ_I를 찾는 비교적 단순한 방법이라 할 수 있다. 이 알고리즘은 k가 높을수록 계산시간이 많이 요구되나, 초기값을 잘 선정하면, 반복 연산을 상당 수준 단축 할 수 있는 장점이 있다. 단 $k=2$에서는 3개의 모든 모수가 주어져 있기에, 단순한 행렬의 연산에 불과하며, $k=3$에서도, $\lambda_{123}=\mu_{123}=\min\{\sigma_{ij}\}$로 놓으면, 단순한 행렬 연산에 의해 간단히 μ_I를 유도할 수 있음을 알 수 있다.

4.2 알고리즘 2 : $k(k+1)/2$ 개의 μ_I를 유도하는 방법

[Step 0] 평균(분산) $\lambda_i, i=1,\cdots,k$과 상관계수 ρ_{ij}로부터 $\lambda_{ij}=\rho_{ij}\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}$에 의해, 분산-공분산 행렬 $\{\sigma_{ij}^{(0)}\}=\Sigma^{(0)}$를 계산한다.

[Step 1] $\beta_l=\{\sigma_{rs}:\min\{\sigma_{ij}^{(0)}\}, 1\leq i\leq j\leq k\}$로 놓는다. 여기서 $\beta_l=\sigma_{rs}$, $T_l:=\{r,s\}$로 놓으면, T_l은 $\min\{\sigma_{ij}\}$가 있는 원소의 위치를 지칭하는 지시집합을 의미한다. 그리고, 지시집합 $J_l:=\{i:a_{ij}>0;(j=i,\cdots,k, \mid j \text{ for } a_{jj}=0), i=1,\cdots,k\}$로부터 집합 $S_l:=T_l \bigcup J_l$ 을 놓자. 그리고 $\mu_{S_l}=\beta_l$을 할당한다. 여기서 초기 $S_1:=\{1,2,\cdots,k\}$이며, $l=1$이다. 또한 $\mu_{S_1}=\min\{\sigma_{ij}^{(0)}\}$임을 알 수 있다.

[Step 2] 집합 $D:=\{i_1,i_2\}$, $i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,k\}$, $i_1\leq i_2$를 놓고,

$$\{\sigma_D^{(l)}\}=\{\sigma_D^{(l-1)}\}-\mu_{S_l}, \quad \text{if } D\subseteq S_l$$
$$\{\sigma_D^{(l)}\}=\{\sigma_D^{(l-1)}\}, \qquad \text{if } D\not\subseteq S_l$$

를 계산한다.

[Step 3] $\beta_{l+1}=\{\sigma_{rs}:\min\{\sigma_{ij}^{(l)}\}, 1\leq i\leq j\leq k\}$를 계산하여, 집합 S_{l+1}을 결정한다. 만일, $n(T_{l+1})=1$ 이면, $r=s$을 의미하여, $S_{l+1}:=\{r\}$로 결정된다. 여기서, $\mu_{s_{l+1}}=\beta_{l+1}$로 할당한다.

[Step 4] $l\leftarrow l+1$로 놓고, 모든 $\{\sigma_{i,j}^{(l)}\}=0$일 때 까지 [Step 2]와 [Step 3]을 반복한다.

[Step 5] $S:=\{S_1,S_2,\cdots,S_{k(k+1)/2}\}$에 대해, $\mu_{J\subseteq\{1,2,\cdots,k\}-S}=0$으로 결정한다.

위의 알고리즘에 따라, 모든 모수 μ_I를 결정하고, $\lambda_I=\sum_{J\subseteq\{1,\cdots,k\}:I\subseteq J}\mu_J \ \forall I\subseteq\{1,\cdots,k\}$에 의해 모수 집합 $\Lambda:=\{\lambda_I:\emptyset\neq I\subseteq\{1,\cdots,k\}\}$가 결정된다. 본 알고리즘 2의 핵심은 (3.1)의 방정식에서 두 변수의 공분산 모수 λ_{ij}와 평균(분산) 모수 λ_i에 대해, 같은 수의 모수 $\mu_i, i\in S$ 만을 결정하고 나머지 선택되지 못한 모수 $\mu_i, i\notin S$는 0으로 결정하는 것이다. 결국 전체 모수 2^k-1 개 중 선택된 모수 μ_I의 개수는 $k(k+1)/2$ 개 이다.

5. 결론 및 토의

본 연구에서는 Krummenauer (1998a)와 Karlis (2003)에서 언급된 일반적인 다변량 포아송

분포로부터 확률난수를 생성하는 방법을 다루었다. 이를 위해 식 (3.1)의 선형방정식을 푸는 두 가지 알고리즘을 제안하였다. 발생된 확률 난수는 분산-공분산 행렬에 기초하는데, 포아송 분포의 모수의 성격상 분산공분산 행렬은 모두 0보다 크므로 각 변수들 간에 양적인 상관관계가 있음을 알 수 있다. 그러므로 본 알고리즘에 의하면 음의 상관을 지니는 다변량 포아송 확률 난수는 생성할 수 없음을 알 수 있다.

Park 등 (1996)은 다변량 베르누이 난수를 생성하기 위해 포아송분포의 가역성을 사용하였다. Park 등 (1996)은 식 (3.2)에서 구해진 $X_i, i=1,\cdots,k$에 대해, $Z_i = I_{\{0\}}(X_i), i=1,\cdots,k$로 변환하여 다변량 베르누이 난수를 생성하였다. 여기서, $I_{\{0\}}$은 발생된 포아송 난수가 0이면 1, 그렇지 않으면 0 인 지시함수이다. Park 등 (1996)에서 논의한 알고리즘은 본 연구에서 다룬 알고리즘 2와 비교하여, $k(k+1)/2$개의 μ_I를 찾는 방법과 일치한다고 하겠다. 하지만, 본 연구는 일반적인 포아송 모형에서 결정해야 할 2^k-1 개의 모수 관점에서 접근하였으며, 또한 선형방정식을 계속 풀어가는 일반적인 해와 비교하여, 무수히 많은 해 중 분산-공분산 행렬에서 주어진 모수 개수와 같은 개수의 모수를 선택하는 알고리즘 측면을 논의한 점에서 차이를 둘 수 있다.

마지막으로, $k=2,3,4,5$에서는 초기값을 쉽게 잡을 수 있는 알고리즘 1이 $k \geq 6$ 에서는 알고리즘 2가 빠른 속도를 보인다고 하겠다.

참고문헌

Dwass, M. and Teicher, H. (1956) On infinitely divisible random vectors, *Annals of Mathematical Statistics*, 27, 461-470.

Karlis, D. (2003) An EM algorithm for multivariate Poisson distribution and related models, *Journal of Applied Statistics*, 30, 1, 63-77.

Krummenauer, F (1998a) Efficient simulation of multivariate binomial and Poisson distributions, *Biometrical Journal*, 40, 7, 823-832.

Krummenauer, F (1998b) Limit theorems for multivariate discrete distributions, *Metrika* 47, 47-69.

Loukas, S., and Kemp, C.D. (1983) On computer sampling from trivariate and multivariate discrete distribution, *Journal of Statistical Computations and Simulation*, 17, 113-123.

Park, C.G, Park, T. and Shin, D.W. (1996) A simple method for generating correlated binary variates, *The American statistician*, 50, 4, 306-310.

Tsiamyrtzis, P. and Karlis, D. (2004) Strategies for efficient computation of multivariate Poisson probabilities, *Communications in Statistics-Simulation and Computations*, 33, 2, 271-292.