

파장판을 이용한 Shearographic system에서의 위상오차 분석

(The Phase Error Analysis in the Shearographic System using Wave plates)

김수길* · 고명숙

(Soo-Gil Kim · Myungsook Ko)

*호서대학교 전기정보통신공학부 · 부천대학 전산정보처리과

Abstract

We present the method to obtain four speckle patterns with relative phase shift of $\pi/2$ by passive devices such as wave plate and polarizer, and calculate the phase at each point of the speckle pattern in shearographic system using Wollaston prism. And, we analyzed the phase error caused using wave plates by Jones matrix.

1. 서론

Wollaston 프리즘을 이용하는 스펙클패턴 전단간섭법은 구조가 단순하고 외부환경에 대해 아주 강인한 특성을 가지고 있다.[1,2] 그러나 이 방법은 위상천이기술을 적용하기가 어렵다는 단점을 가지고 있다. 최근에는 이러한 단점을 개선하여 위상천이를 시킬 수 있는 방법이 보고되었다. 이것은 원통형 PZT에 고 복굴절 (highly-birefringent: HiBi) 광섬유를 감고, PZT에 가하는 전압을 변화시킴으로써 광섬유에서 나오는 두 개의 직교하는 편광을 가지는 모드간에 위상차를 발생시킴으로써 위상의 변화를 일으키는 방법이다.[3] 그러나, 이 방법은 광섬유가 외부환경에 민감하게 반응하기 때문에 일정한 위상차를 가지는 간섭패턴을 얻는 것이 어렵다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 Wollaston 프리즘을 이용한 스펙클패턴 전단간섭법에서 수동소자인 파장판 (wave plate)과 편광판을 이용하여 안정적으로 위상천이를 발생시킬 수 있는 방법을 설명하고, 제안된 방법에 사용되는 파장판에 의한 위상오차를 Jones 벡터를 이용하여 이론적으로 분석하였다.

2. 본론

2.1. 파장판을 이용한 위상천이

그림 1의 P_1 과 P_2 에서 반사된 광파가 $U_1 = a_1 e^{-j\theta(x,y)} = a_1 e^{-j\theta_1}$, $U_2 = a_2 e^{-j\theta(x+\delta x,y)} = a_2 e^{-j\theta_2}$ 라고 하자. 여기서, $\theta(x,y)$ 와 $\theta(x+\delta x,y)$ 는 각각 점 $P_1(x,y)$ 와 $P_2(x+\delta x,y)$ 로부터의 랜덤 위상관계를 표시하고,

a_1 와 a_2 는 빛의 진폭이다.

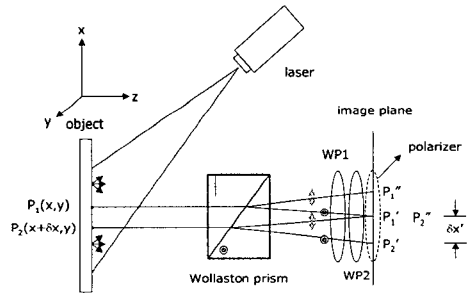


그림 1. Wollaston 프리즘과 파장판을 이용한 스펙클패턴 전단간섭법 시스템

Fig. 1. Shearographic system using a Wollaston prism and two wave plates

그러면, 두 개의 파장판을 통과한 후에는 다음과 같이 표현될 수 있다.[4]

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Gamma_2}{2} & \mp i \sin \frac{\Gamma_2}{2} \\ \mp i \sin \frac{\Gamma_2}{2} & \cos \frac{\Gamma_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Gamma_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Gamma_1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \\
 &= e^{-i\frac{\Gamma_1}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Gamma_2}{2} U_1 \mp i e^{i\Gamma_1} \sin \frac{\Gamma_2}{2} U_2 \\ \mp i \sin \frac{\Gamma_2}{2} U_1 + e^{i\Gamma_1} \cos \frac{\Gamma_2}{2} U_2 \end{pmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

여기서, \mp 부호에서 $-$ 부호는 WP2의 slow axis가 $-x$ 축에 대하여 45도 회전되어 있는 경우에 대응하고, $+$ 부호는 WP2의 slow axis가 -45 도 회전되어 있는 경우에 대응하는 것이다. 광파가 x 축 편광판을 통과한 후에 이미지 면에서의 복소진폭

은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi = \arctan \frac{(I_1 - I_2)}{(I_1 - I_3)} \quad (10)$$

$$U_{up2 \pm 45} = e^{-i\frac{\Gamma_1}{2}} \left\{ \cos \frac{\Gamma_2}{2} U_1 \mp i e^{i\Gamma_1} \sin \frac{\Gamma_2}{2} U_2 \right\} \quad (2)$$

첫 번째로, 두 개의 $\lambda/4$ 파장판을 이용할 경우에는 위상지연이 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \pi/2$ 이므로 식 (2)는 다음 식과 같이 된다.

$$U_{up2 \pm 45} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \{U_1 \pm U_2\} \quad (3)$$

식 (3)에 대한 빛의 세기는 다음 식과 같이 주어진다.

$$I_1 = U_{up2+45} U_{up2+45}^* = I_0 [1 + \gamma \cos \phi] \quad (4)$$

$$I_3 = U_{up2-45} U_{up2-45}^* = I_0 [1 + \gamma \cos(\phi + 180)] \quad (5)$$

여기서, $I_0 = (a_1^2 + a_2^2)/2$ 는 빛의 세기의 평균값이며, $\gamma = 2a_1 a_2 / (a_1^2 + a_2^2)$ 는 간섭항의 변조이며, $\phi = \theta_1 - \theta_2$ 는 랜덤 위상차를 나타낸다. 두 번째는 WP1과 WP2의 slow axis를 각각 0도와 45도(또는 -45도)로 유지하고, 편광판의 축을 -x축에 대하여 45도와 -45도로 한 경우에 편광판을 통과한 후의 복소진폭을 구하면 각각 식 (6) 및 식 (7)과 같이 주어진다.

$$U_{p-45} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Gamma_1}{2}} \left(\cos \frac{\Gamma_2}{2} - i \sin \frac{\Gamma_2}{2} \right) \begin{pmatrix} U_1 + e^{i\Gamma_1} U_2 \\ U_1 + e^{i\Gamma_1} U_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$U_{p-45} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Gamma_1}{2}} \left(\cos \frac{\Gamma_2}{2} + i \sin \frac{\Gamma_2}{2} \right) \begin{pmatrix} U_1 - e^{i\Gamma_1} U_2 \\ -U_1 + e^{i\Gamma_1} U_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$\Gamma_1 = \pi/2$, $\Gamma_2 = \pi/2$ 인 경우에 식 (6)과 (7)에 대한 빛의 세기는 다음 식과 같다.

$$I_2 = U_{p+45} U_{p+45}^* = I_0 [1 + \gamma \cos(\phi + 90)] \quad (8)$$

$$I_1 = U_{p-45} U_{p-45}^* = I_0 [1 + \gamma \cos(\phi + 270)] \quad (9)$$

식 (4), (5), (8), (9)에서 보는 바와 같이 파장판 두개와 하나의 편광판을 이용함으로써 각각 90도의 위상천이를 가지는 4개의 스펙클패턴을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 앞에서 구한 4개의 간섭패턴으로부터 각 지점의 위상은 다음 식에 의해 계산될 수 있다.

2.2. 파장판에 의한 위상오차

파장판을 이용한 스펙클패턴 진단간섭법에서 주요한 위상오차는 편광소자의 불완전성에 기인한다. 본 논문에서는 $\lambda/4$ 파장판 두개의 조합의 경우에 대하여 스펙클 패턴을 얻는 방법을 이야기하였는데, 편광소자의 불완전성에 의한 위상오차도 두 가지 경우에 대하여 고려하여 분석할 것이다. 그림 1에서 출력단에서의 빔은 Jones 행렬을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_{out} = A(\varphi_3) WP2(\varphi_2) WP1(\varphi_1) E_{in} \quad (11)$$

여기서, E_{in} 은 입력광파를 나타내며, $A(\varphi_3)$, $WP2(\varphi_2)$, $WP1(\varphi_1)$ 는 각각 편광판, WP2, WP1의 Jones 행렬을 나타내며, 다음과 같다.

$$E_{in} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{-j\theta_1} \\ a_2 e^{-j\theta_2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$A(\varphi_3) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_3 & 1/2 \sin 2\varphi_3 \\ 1/2 \sin 2\varphi_3 & \sin^2 \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$WP2(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 2j \sin^2 \varphi_2 \sin \frac{\Gamma_2}{2} + e^{-i\frac{\Gamma_2}{2}} & j \sin 2\varphi_2 \sin \frac{\Gamma_2}{2} \\ j \sin 2\varphi_2 \sin \frac{\Gamma_2}{2} & -2j \sin^2 \varphi_2 \sin \frac{\Gamma_2}{2} + e^{-i\frac{\Gamma_2}{2}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서, $i=1, 2$ 이며, 1과 2는 각각 WP1과 WP2에 대한 Jones행렬을 나타내는 첨자이다. 그리고, 윗 식에서 $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ 는 각각 편광판, 파장판 WP2, 파장판 WP1소자들의 방위각을 나타낸다.

2.2.1. 두개의 $\lambda/4$ 파장판이 사용되는 경우에 대한 위상오차

파장판의 불완전성에 의한 위상오차를 구하기 위해서는 식 (14)에서 다음과 같은 4가지 경우에 대한 편광판과 파장판의 방위각조합에 대하여 각각 intensity를 구해야 한다.

(1) $\varphi_3 = 0, \varphi_2 = 45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_1 = a_1^2 \cos^2 \frac{\Gamma_2}{2} + a_2^2 \sin^2 \frac{\Gamma_2}{2} + 2a_1 a_2 \cos \frac{\Gamma_2}{2} \sin \frac{\Gamma_2}{2} \sin(\phi + \Gamma_1) \quad (15)$$

(2) $\varphi_3 = -45, \varphi_2 = 45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_2 = 1/2[(a_1^2 + a_2^2) + 2a_1a_2\cos(\phi + \Gamma_1)] \quad (16)$$

(3) $\varphi_3 = 0, \varphi_2 = -45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_3 = a_1^2\cos^2\frac{\Gamma_2}{2} + a_2^2\sin^2\frac{\Gamma_2}{2} - 2a_1a_2\cos\frac{\Gamma_2}{2}\sin\frac{\Gamma_2}{2}\sin(\phi + \Gamma_1) \quad (17)$$

(4) $\varphi_3 = 45, \varphi_2 = 45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_4 = 1/2[(a_1^2 + a_2^2) - 2a_1a_2\cos(\phi + \Gamma_1)] \quad (18)$$

식 (10)과 식 (15)~ (18)을 이용하여 광파 U_1 과 U_2 의 위상차 ϕ' 를 구하면 식 (24)로 표현할 수 있다.

$$\tan\phi' = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} = \frac{-\cos(\phi + \Gamma_1)}{\sin\Gamma_2\sin(\phi + \Gamma_1)} \quad (19)$$

불완전한 두 개의 $\lambda/4$ 파장판에 대하여 위상지연은 각각 $\Gamma_1 = \pi/2 + \gamma_1, \Gamma_2 = \pi/2 + \gamma_2$ 으로 놓을 수 있으며, 여기서 γ_1, γ_2 는 파장판에 의해 도입되는 상대적인 위상지연에 있어서의 오차를 의미한다. 오차를 포함한 위상지연을 식 (19)에 대입하여 계산하면 각 지점의 위상은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\tan\phi' = \frac{\tan\phi + \gamma_1\sec^2\phi}{1 - 1/2\gamma_2^2} \quad (20)$$

위상오차가 포함된 $\tan\phi'$ 는 식 (21)과 같이 표현할 수 있다.

$$\tan\phi' = \tan(\phi + \Delta\phi) \approx \tan\phi + \Delta\phi\sec^2\phi \quad (21)$$

따라서, 식(20)와 식 (21)을 이용하면 불완전한 파장판에 의한 위상오차 $\Delta\phi$ 는 식 (27)과 같이 구할

수 있다.

$$\Delta\phi = \gamma_1 + 1/4\sin(2\phi)\gamma_2^2 \quad (22)$$

변형전과 후의 위상은 각각 위상오차를 가지게 되는데, 변형전과 후의 위상을 빼주게 되면 1차 위상 오차항 γ_1 은 사라지게 된다.

2.2.2 $\lambda/2, \lambda/4$ 파장판이 사용되는 경우에 대한 위상오차

$\lambda/2, \lambda/4$ 파장판 조합에 의한 위상오차도 앞 절에서 유도한 것과 비슷한 방법으로 구할 수 있으며, 두 개의 파장판의 불완전성에 의한 위상오차를 구하기 위해서는 식 (14)에서 4가지 경우에 대한 편광판과 파장판의 방위각조합에 대하여 각각 intensity를 구해야 한다.

(1) $\varphi_3 = 0, \varphi_2 = 45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_2 = a_1^2\cos^2\frac{\Gamma_2}{2} + a_2^2\sin^2\frac{\Gamma_2}{2} + 2a_1a_2\cos\frac{\Gamma_2}{2}\sin\frac{\Gamma_2}{2}\sin(\phi + \delta_1) \quad (23)$$

(2) $\varphi_3 = 45, \varphi_2 = 45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_3 = 1/2[(a_1^2 + a_2^2) + 2a_1a_2\cos(\phi + \delta_1)] \quad (24)$$

(3) $\varphi_3 = 0, \varphi_2 = -45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_4 = a_1^2\cos^2\frac{\Gamma_2}{2} + a_2^2\sin^2\frac{\Gamma_2}{2} - 2a_1a_2\cos\frac{\Gamma_2}{2}\sin\frac{\Gamma_2}{2}\sin(\phi + \delta_1) \quad (25)$$

(4) $\varphi_3 = 45, \varphi_2 = 45, \varphi_1 = 0$ 인 경우에 대한 intensity

$$I_1 = 1/2[(a_1^2 + a_2^2) - 2a_1a_2\cos(\phi + \delta_1)] \quad (26)$$

식 (10)과 식 (23)~(26)을 이용하여 광파 U_1 과 U_2 의 위상차 ϕ' 를 구하면 식 (27)로 표현할 수 있

다.

$$\tan \phi' = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} = \frac{\sin(\Gamma_2) \sin(\phi + \delta_1)}{\cos(\phi + \delta_1)} \quad (27)$$

불완전한 $\lambda/2$, $\lambda/4$ 파장판에 대하여 위상지연은 각각 $\delta_1 = \pi + \gamma$, $\Gamma_2 = \pi/2 + \gamma_2$ 으로 놓을 수 있으며, 여기서 γ , γ_2 는 각각 $\lambda/2$, $\lambda/4$ 파장판에 의해 도입되는 상대적인 위상지연에 있어서의 오차를 의미한다. 오차를 포함한 위상지연을 식 (27)에 대입하여 계산하면 각 지점의 위상은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\tan \phi' = \cos \gamma_2 \tan(\phi + \gamma) \quad (28)$$

식 (20)과 식 (28)을 이용하면 불완전한 파장판에 의한 위상오차 $\Delta\phi$ 는 식 (29)와 같이 구할 수 있다.

$$\Delta\phi = \gamma - 1/4 \sin(2\phi) \gamma_2^2 \quad (29)$$

변형전과 후의 위상차를 구하면 $\lambda/2$ 파장판에 의한 위상오차 γ 는 사라진다. 위상오차의 해석을 통해 파장판에 의한 위상오차의 1차항은 사라진다는 것을 확인할 수가 있다.

3. 결론

본 논문에서는 Wollaston 프리즘을 이용한 스펙클 패턴 전단간섭법에서 변형전후의 간섭패턴을 각각 4개씩 얻고 이로부터 각 지점에서의 위상을 얻은 후에, 위상차를 구함으로써 물체의 변형에 대한 기울기 정보를 얻을 수 있다. 또한, $\lambda/4$ 파장판 두개의 조합의 경우와 $\lambda/2$, $\lambda/4$ 파장판 조합에 있어서의 파장판의 불완전성에 의해 발생하는 위상오차를 Jones 행렬을 이용하여 해석하였으며, 해석을 통해 파장판에 의한 위상오차의 1차항의 영향은 무시될 수 있다는 것을 알 수가 있었다.

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력연구원(04-522)주관으로 수행된 과제임.

참고 문헌

[1] Y.Y. Hung, "Shearography for non-destructive evaluation of composite structures," *Optics and Lasers in Engineering* vol. 24, pp. 161-182, 1996.
 [2] S. Dilhaire, S. Jorez, A. Cornet, L.D. Patino Lopez,

W. Claeys, "Measurement of the thermomechanical strain of electronic devices by shearography," *Microelectronics Reliability* vol. 40, pp. 1509-1514, 2000.
 [3] V.M. Murukeshan, O. L. Seng, and A. Asundi, "Polarization phase shifting shearography for optical metrological applications," *Optics & Laser Technology* vol. 30, pp. 527-531, 1998.
 [4] A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*(Wiley, New York, 1984), Chap. 5.