

재킷행렬에서의 2차원 직교가변 확산코드

姜學洙·文明龍·吳成根\*  
전주공업대학 디지털전기정보과

Two Dimensional Orthogonal Variable Spreading Codes For Jacket Matrices

Hark-su Kang, Myong-Ryung Mun, Seung-Gun Oh  
\*Jeonju Technical College

Abstract -Two-dimensional orthogonal variable spreading codes are presented for multiplexing of forward link in direct sequence code division multiple access (DS-CDMA) multiple antennas system. And the results of code generation and simulation of 2 dimensional orthogonal variable spreading factors on Jacket matrices are also be investigated. The bit error rate(BER) performance under a multi-user environment for the additive white Gaussian noise (AWGN) channel demonstrated that the proposed scheme could provide flexible rates and lower correlation values

$$[C]_N = \begin{bmatrix} C_N(1) \\ C_N(2) \\ C_N(3) \\ C_N(4) \\ \vdots \\ C_N(N-1) \\ C_N(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{N/2}(1)C_{N/2}(1) \\ C_{N/2}(1)\overline{C_{N/2}(1)} \\ C_{N/2}(2)C_{N/2}(2) \\ C_{N/2}(2)\overline{C_{N/2}(2)} \\ \vdots \\ C_{N/2}(N/2)C_{N/2}(N/2) \\ C_{N/2}(N/2)\overline{C_{N/2}(N/2)} \end{bmatrix} \quad N \geq 8 \quad (1)$$

여기서,  $\overline{C_{N/2}(n)}$ 은  $C_{N/2}(n)$ 의 이친 보수이다.

1. 서 론

1893년 불란서 수학자 아다마르(Hadamard)에 의해 제안된 아다마르 행렬(matrix)은 직교성(orthogonality)을 가지며, 음성신호와 영상신호의 변환 및 부호화에 매우 유용하게 쓰인다[1][2][3][5]. 아다마르 변환은 아다마르 행렬 원소 중 ±1에 의해 이루어지므로, 단지 신호의 가산과 감산만으로도 변환을 수행할 수 있어 Hardware의 단순화 및 고속화로 통신 및 신호처리에 꼭 필요한 기술이다. 따라서 아다마르 행렬은 영상 부호화 분야, CDMA 대역확산통신, 디지털 신호처리, Quantum신호처리, 암호화 등에서 널리 사용되고 있다.

본 논문에서 제안된 재킷행렬은 아다마르 행렬을 일반화하여 행렬 요소가 ±1, ±2, ±j, ±w로 set를 확장하였다. 아다마르 행렬은 1893년에 아다마르에 의해 발표되었으나 Center Weight Hadamard는 1989년, Reverse Jacket은 1998년, Jacket행렬은 2003년에 한국의 M.H. Lee에 의해 모두가 발표되었다. 이러한 논문들의 기본 아이디어는 하중 아다마르(WH: Weighted Hadamard) 행렬로부터 출발하고 있다.

재킷행렬의 정의는 어떤 행렬의 역행렬은 그 행렬요소의 역(Inverse)으로 구할 수 있고 아다마르 행렬은 재킷행렬의 특수한 경우에 속하며 아다마르 행렬과 재킷행렬은 필드(Field)개념에서는 같지만 실수에서는 아다마르 행렬이 ±1이지만 재킷행렬은 ±1, ±2로 나타낼 수 있으므로 재킷행렬상에서 2차원 직교가변 확산계수를 생성하고 있다. 이와 같은 확산계수 생성과정을 시뮬시플레이션을 한 결과를 고찰하여 자기상관과 상호상관을 비교하였다.

2. 부호 생성 방법

재킷행렬을 기반으로 한 2차원 JOVSF( Jacket Orthogonal Variable Spread Factor)부호의 생성 방법은 기존의 OVVSF(Orthogonal Variable Spread Factor)와 동일하며, 단지 부호 root의 seed만이 다르다. N 칩 길이의 4 위상 확산부호 집합 N, 즉  $\{C_N(n)\}_{n=1}^N$ 을  $C_N$ 이라 하자. 여기서  $C_N(n)$ 은 n 개의 원소를 갖는 행 벡터이며  $C_N$ 은 다음과 같이  $C_{N/2}$ 으로부터 생성된다.

2차원 OVVSF 부호의 seed는 식(2)와 같이 주어지며,  $i$ 는  $\sqrt{-1}$ 을 나타낸다.

$$[C]_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{bmatrix} \quad (2)$$

따라서 식(2)의 직교성은 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$[C]_4 [C]_4^H = 4 [I]_4 \quad (3)$$

여기서  $[C]^H$ 는 행렬  $[C]$ 의 Hermitian 쥬레(conjugate)를 나타낸다. Seed 행렬  $[C]_4$ 는 재킷 행렬로부터 생성된다[7]. 그림 1은 HOVSF와 JOVSF의 비교를 나타내고 있다. 여기서 나타낸 것처럼 Hadamard Orthogonal Variable Spread Factor (HOVSF)와 JOVSF의 seed 및 이들 구성의 차이를 명확히 알 수 있다.

예를 들면,  $l=2, N=8$ 인 경우 식(1)로부터 기존의 HOVSF는 식(4)와 같이 쓸 수가 있는 것이다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{N/2}(l) & C_{N/2}(l) \\ C_{N/2}(l) & \overline{C_{N/2}(l)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_4(2) & C_4(2) \\ C_4(2) & \overline{C_4(2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_N(2l-1) \\ C_N(2l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_8(3) \\ C_8(4) \end{bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

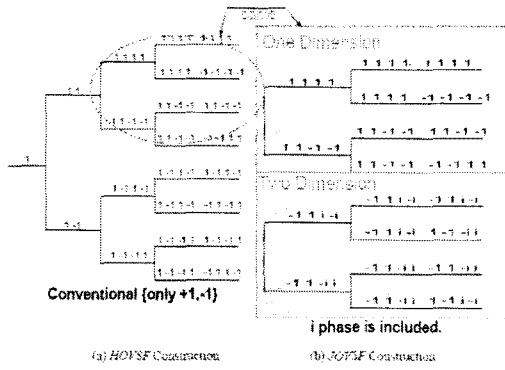


그림 1. HOVSF와 JOVSF의 비교

또한  $l=3$ ,  $N=8$ 인 경우는 식 (2)로부터 제안한 JOVSF는 HOVSF와 유사한 방법으로 식(5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_N(2l-1) \\ C_N(2l) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_8(5) \\ C_8(6) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes C_{N/2}(l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes C_4(3) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [-1 & 1 & i & -i] \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & i & -i & -1 & 1 & i & -i \\ -1 & 1 & i & -i & 1 & -1 & -i & i \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

정방행렬  $[A]_N = (a_{ij})_N$ 에 대한 역행렬을 각 원소 단위의 역으로 간단하게 얻을 수 있는 경우, 즉,  $[A]_N^{-1} = \frac{1}{N}(1/a_{ij})_N$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ 가 된다. 아다마르, DFT 등 많은 유용한 행렬들 역시 재킷 행렬의 특수한 경우로 볼 수 있다[4]. 전형적인 차수  $4 \times 4$ 의 재킷 행렬은 식 (6)과 같다.

$$[J]_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i & -1 \\ 1 & -i & i & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

이의 식(6)의 역행렬은 식(7)과 같이 주어진다.

$$[J]_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/i & -1/i & -1 \\ 1 & -1/i & 1/i & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 JOVSF의 root는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 [C]_4 &= [P]_4^T [J]_4 [P]_4^c \quad (8) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [J]_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & e & -e \\ -1 & 1 & -e & e \end{bmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서  $e^{j\pi/2} = i$ .  $P_N^r$ 은 행 치환행렬,  $P_N^c$ 은 열 치환행렬을 의미한다.

### 3. 제안한 JOVSF의 시뮬레이션

시퀀스의 주기적 자기 상관은 식(10)과 같이 정의할 수 있다.

$$R_i(\tau) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i a_{(i+\tau) \bmod L}^* \quad (10)$$

또한, 주기적 상호 상관은 식(11)과 같이 정의할 수 있다.

$$C_i(\tau) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i b_{(i+\tau) \bmod L}^* \quad (11)$$

여기서,  $a_i$ ,  $b_i$ 는 각각 시퀀스  $a$ ,  $b$ 의  $i$  번째 원소이며,  $L$ 은 시퀀스  $a$ ,  $b$ 의 길이,  $\tau$ 는 지연 계수이며  $0 \leq \tau \leq L$ 의 범위를 갖는다. HOVSF와 JOVSF의 상관은 식(12), (13)과 같은 직교성을 갖는다.

$$R_i(0) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i a_i^* = L \quad (12)$$

$$C_i(0) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i b_i^* = 0 \quad (13)$$

이들의 지연 상관은 식(14)-(15)를 만족한다.

$$\max_{\tau \neq 0} R_i(\tau) = L \quad (14)$$

$$\max_{\tau \neq 0} C_i(\tau) = L \quad (15)$$

기존의 HOVSF와 제안한 2차원 JOVSF의 주기적 자기상관을 비교해 볼 때 JOVSF가 더 우수함을 알 수 있다. 예를 들어, 길이 4의 JOVSF 부호는 표 1에 나타난 것처럼 자기 상관의 최대치의 수를  $(12-8)/12 = 1/3$ 로 줄일 수 있으며, 상호 상관의 최대치 역시 1/2로 줄일 수 있다.

표 1. 길이가 4인 이중 OVSF의 주기적 자기상관

Two-dimensional OVSF code	Autocorrelations
$C_4(1)$ :	4 4 4 4
$C_4(2)$ :	4 0 -4 0
$C_4(3)$ :	4 -2 0 -2
$C_4(4)$ :	4 -2 0 -2

또한, 길이 8의 JOVSF 부호는 표 2에 나타난 것처럼 자기 상관의 최대치의 수를 1/8로 줄일 수 있으며, 상호 상관의 최대치 역시 1/2로 줄일 수 있다.

표 2. 일반적인 OVSF의 주기적 자기상관

OVSF code	Autocorrelations
++++++	8 8 8 8 8 8 8 8
+++----	8 4 0 -4 -8 -4 0 4
++-+---	8 0 -8 0 8 0 -8 0
+-+----	8 4 0 -4 -8 -4 0 4
+-+-+-	8 -8 8 -8 8 -8 8 -8
+----++	8 4 0 -4 -8 -4 0 4
---++--	8 0 -8 0 8 0 -8 0
---+---	8 4 0 -4 -8 -4 0 4
+++	4 4 4 4
++-	4 0 -4 0
+-+	4 -4 4 -4
+--	4 0 -4 0

그러나, 이러한 문제는 JOVSF 부호를 이용하면 쉽게 해결되며, 2차원 신호  $(2+2i)$ 와  $(4+4i)$ 를 이용하면 최대치는 각각 4와 8이 된다. JOVSF 설계에 의해 낮은 최대 상관값을 얻을 수 있음을 분명히 알 수 있다. 완벽한 동기를 가정하면, 그림 2와 그림 3에 나타난 것처럼 다중 사용자 CDMA 시스템에서 직교성의 상실 없이 JOVSF는

기존 HOVSF와 동일한 BER 성능을 나타낸다. 그러나 비동기 환경에서는 JOVSF가 HOVSF에 비해 최악의 상황에서 대략 20% 정도의 BER 성능 개선을 나타낸다. 기타 복소 확산 부호와는 다르게, JOVSF는 두 개의 영역으로 구성된다. 하나는 이진 직교 시퀀스 부분으로 기존 HOVSF와 동일하며, 다른 하나는 4-위상 직교 복소 확산 시퀀스로 구성되지만 이들 모두 서로 직교한다. 또한, 제안된 JOVSF와 HOVSF는 직교성의 상실 없이 가변 전송율의 확산을 지원하지만, 다른 복소 직교 확산 부호의 경우에는 최적의 상관값을 갖지만 가변 전송율을 지원하지 못하고 있다. 표3은 기존 HOVSF와 제안된 JOVSF에 대하여 여러 가지 요소를 비교한 것이다.

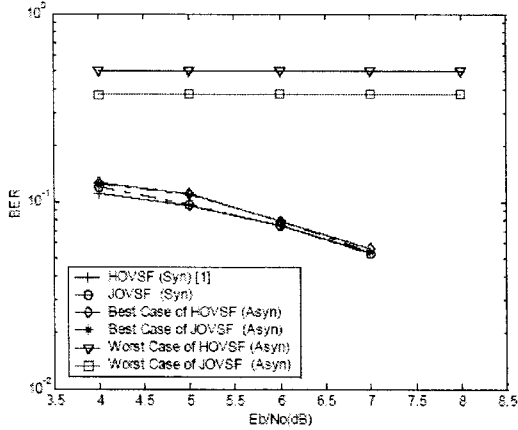


그림 2. JOVSF와 HOVSF 부호의 BER 특성

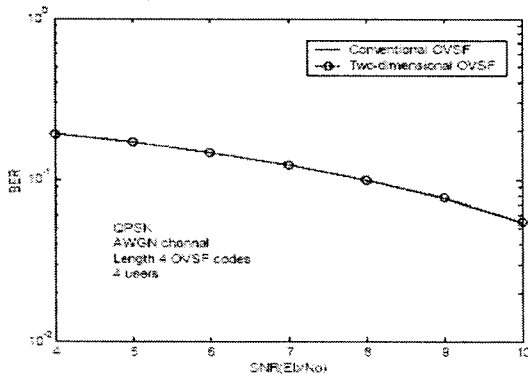


그림 3. 이중 OVSF의 BER 성능 분석 그래프

#### 4. 시뮬레이션 결과

기존의 HOVSF의 주기적 자기상관은 표 2에 비교하여 나타내었으며, 2차원 JOVSF가 더 양호한 자기상관을 나타냄을 확인할 수 있다. 4x4 행렬인 경우의 JOVSF에서는 자기상관이 4인 경우가 50%이지만, 기존 OVSF에서는 75%이다. 상호상관 역시 유사한 결과를 얻을 수 있으며, 길이 4인 2차원 OVSF인 JOVSF에서는 단지 하나의 최대값 4를 나타내지만, 기존 OVSF에서는 최대값 4를 두 개 포함하고 있다. 길이 8인 부호에 대한 수치해석 결과로부터 2차원 JOVSF 부호가 기존 OVSF 부호에 비해 우수함을 알 수 있다. 자기상관의 경우 기존 OVSF에서의 절대 최대 상관값은 8이며, 50%가 최대값을 나타내지만 2차원 JOVSF에서는 단지 43.8%만이 최대값을 갖게 된다. 상호상관의 경우 절대 최대 상관값은 8이며, 기존 OVSF에서는 1/28, 2차원 JOVSF에서는 1/56을 나타낸다. 그림3은 완벽한 동기가 유지된다고 가정하면 다중사용자 DS-CDMA시스템에 대하여 2차원 OVSF는 동등한 BER성능을 나타내고 있음을 보여주고 있다. 즉, 2차원 OVSF 역시 기존 OVSF와 동일한 직교성을 가지고 있음을 알 수 있다.

표 3. 기존 HOVSF와 제안 JOVSF비교

구분	기존 Hadamard	복소 Hadamard	재킷
기본행렬	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix}$
행렬원소	$\pm 1$	$\pm 1 \pm j$	Half $\pm 1$ Half $\pm 1 \pm j$
직교성	직교	직교	직교
코드율	one rate	one rate	two rate
고속확장 기법	FHT (Fast Hadamard Transform)	FCHT (Fast Complex Hadamard Transform)	FJT (Fast Jacket Transform)
가변길이 설계	Yes	Yes	Yes
상관관계 correlation	높음	낮음	낮음
기본확장	2x2	4x4	4x4

#### 5. 결론

DS-CDMA(Direct Sequence Code Division Multiple Access) 시스템을 위한 재킷 행렬 상에서의 재킷 행렬기반 2차원 OVSF 생성 방법을 제시하였다. 생성한 OVSF에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 실시한 결과 2차원 JOVSF가 기존 HOVSF에 비해 직교성을 잃지 않으면서도 최대 인접 채널간 상관값이 낮게 나타남을 확인할 수 있었다.

#### [참고 문헌]

- [1] R. K. Yarlagadda, and John E. Hershey, *Hadamard Matrix Analysis and Synthesis with applications to communications and signal /image processing*, Kluwer Academic Publishers, U.S., 1997.
- [2] S.S. Agaian, *Hadamard matrices and their applications, Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1980.
- [3] Moon Ho Lee, and m. Kaveh, "Fast Hadamard Transform based on a Simple Matrix Factorization," IEEE Trans. ASSP, vol.ASSP 34, no.6, Dec. 1986, pp.1666, 1997.
- [4] Moon Ho Lee, "The Center Weighted Hadamard Transform," IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 36, No. 9,pp. 1247-1249, Sep. 1989.
- [5] N. Ahmed and K. R. Rao, *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1975.
- [6] Moon Ho Lee, *동.식물 산술 코드*, 영일 출판사, 2004
- [7] 문명룡, 이문호, "MIMO-CDMA 시스템을 위한 확장 OVSF", 한국전과학회 논문지 Vol. 16, No. 9, pp. 697-708, Jul. 2005. 16권 7호 2005년
- [8] 安喜市, *アダマール行列とその應用* 電子通信學會, 昭和55年
- [9] 안두수, *직교함수와 응용* 북두출판사. 1997.