

관측기 기반 하의 최적 슬라이딩 모드 제어기 설계 †

Optimal Sliding-Mode Controller Design based on State Observer

홍 민 석*, 유 관 호**
(Min-Suk Hong, Kwan-Ho You)

Abstract - The sliding-mode control technique could make a system unstable which external disturbance and uncertainty exists in. This paper suggests a robust sliding-mode control algorithm which can be applied to a linear system with parameter uncertainties. To reduce the chattering effect, the whole system is comprised of using a state variable in which the state's estimated value is added. The condition of estimated state results from state observer. The proposed control algorithm uses the optimal feedback controller following the dynamic system equation which consists of a state variable resulting from its own state variable, controller input, estimated state variable. Through comparison with the time optimal control algorithm using simulation, the suggested algorithm shows the improved stability and robustness while it manifests the fast tracking characteristics.

Key Words: Sliding-mode control, state observer, chattering effect, optimal control, Kalman filter.

1. 서론

최근 들어 시스템의 선형화에서 오는 모델링 오차와 외부환경의 변화에 의해서 발생하는 시스템의 파라미터 불확실성 또는 외란이 존재하더라도 원하는 동특성을 얻을 수 있게 하기 위한 견실 제어의 연구가 활발하다. 로봇, HDD등을 비롯한 각종 시스템에 정밀위치제어가 많이 사용되고 있으며, 이러한 시스템에도 모델링 오차와 외부환경변화에 의해서 외란이 발생한다. 이와 같은 외란에 대한 정확한 정보와 정교한 모델이 확보된다면 고전적인 PID 제어기의 사용으로 우수한 제어성능을 얻을 수 있지만 실제적 구현은 그리 용이하지 않다. 따라서 외란 및 변수 변화에 견실 슬라이딩 모드 제어 기법이 유용하게 사용되고 있다. 파라미터의 불확실성이 존재하고, 시스템의 정합조건을 만족하면 일반 제어보다 더 강한 성질을 가지고 있는 제어 기법이 슬라이딩 모드 제어이다. 하지만 슬라이딩 평면이 0을 만족해야 한다는 조건에서 이론적인 보충이 선행되어야하는 점과 대부분의 슬라이딩 모드 제어 설계에 불확실성에 대한 한계를 미리 알고 있어야 한다는 단점이 있다.

제안된 제어기는 이송장치의 떨림 현상을 줄이기 위해서 최적 시간 제어와 슬라이딩 모드 제어가 결합된 형태로 사용된다 [1]. 먼저, 최적시간 제어기를 사용하여 최단 시간 내에 이송장치를 목표 위치 근처로 이동시킨다. 그리고 슬라이딩 면으로 사용하는 슬라이딩

모드 제어기를 사용하여 떨림 효과를 최소화하고 [2], 이송장치를 목표위치의 중앙에서 정확히 동작하게 된다. 또한 본 논문에서는 제안된 제어기의 안정성 및 견실성을 테스트하기 위해, 불규칙한 외란을 시스템에 인가함으로써 제안된 제어기가 우수한 성능 가짐을 증명한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 최적 시간 제어와 슬라이딩 모드제어에 관하여 설명하고, 논문에서 제안한 일반화된 선형시스템의 설계에 대해서 살펴본다. 3장에서는 최적시간 제어만을 이용한 모의실험 결과와 제안된 알고리즘을 사용한 모의실험 결과를 주면서 비교 분석하며, 4장에서는 논문의 결론에 대해 간단히 정리하였다.

2. 일반화된 선형시스템 설계

2.1 일반적인 시스템의 모델

일반적인 모델에서의 이산시간 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad (1)$$

$$z(k) = C_d x(k)$$

A_d : $n \times n$ 행렬, B_d : $n \times m$ 행렬, C_d : $m \times p$ 행렬, $|u(k)| \leq U_{\max}$ 이다. 여기서 $x(t)$ 는 이송장치에 대한 정보 값을 나타낸 것이며, $u(t)$ 는 제어 입력, U_{\max} 는 최대 제어 입력이다.

* 準 會 員 : 成均館大學 電氣電子工學科 碩士課程

** 正 會 員 : 成均館大學 情報通信工學科 副教授 · 工博

† 본 연구는 한국과학재단의 목적기초연구 (R05-2003-000-12262-0) 지원으로 연구되었음.

그런데 이산 시간 상태방정식 (1)은 모든 상태에서
의 측정이 불가능하기 때문에, 즉, 측정되지 않은 값
을 추정하기 위해서 칼만 필터를 사용한다. 칼만 필터
에서의 상태 추정자는

$$\begin{aligned}\widehat{x}_e(k) &= \overline{x}_e(k) + L(z(k) - C_d \overline{x}_e(k)) \\ \overline{x}_e(k+1) &= A_d \overline{x}_e(k) + B_d u(k)\end{aligned}\quad (2)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 $\widehat{x}_e(k)$ 는 $x(k)$ 의 후 상
태 추정자, $\overline{x}_e(k)$ 는 $x(k)$ 의 선 상태 추정자를 나타
낸다. 그리고 L 은 칼만 필터 이득을 나타낸 것이다 [3].

이산 시간 슬라이딩 모드 제어에서는 작은 양의 외
부의란에 의해서 떨림 효과가 일어난다. 그래서 (1)의
상태 방정식에 이것을 보완하기 위해서 새로운 제어
입력을 도입해야 한다. 새로운 제어 입력은

$$g(k) = [x(k), u(k)]^T, \quad \omega(k) = \dot{u}(k) \quad (3)$$

이며, 이것에 따른 이산시간 상태 방정식은

$$\begin{aligned}\dot{g}(k+1) &= A_d g(k) + \Gamma_d \omega(k) \\ y(k) &= H_d g(k)\end{aligned}\quad (4)$$

이다, 행렬 $A_d \Gamma_d H_d$ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$A_d = e^{AT}, \quad \Gamma_d = \int_0^T e^{A(T-t)} dt \cdot \Gamma, \quad H_d = H$$

여기서 $A \Gamma H$ 는 (4)에서의 연속 상태 방정식으로
변환된 행렬 값이다.

일반적인 이송변위 장치에서의 서보 제어는 다양
한 외부 외란과 노이즈에 의해서 아주 작은 이송장치
변위 에러가 생긴다. 이러한 에러가 있는 제어기는
(1)과 같은 모델에 적용하기 힘들다. 즉, 이송장치 변
위 에러를 줄이기 위해서는 (1)과 같은 상태방정식은
실제상황에서는 적합하지 못하다. 그래서 적합한 모델
을 만들기 위해서 다음과 같은 새로운 상태방정식을 도
입한다. 이 상태 방정식은 (2)과 (4)를 합쳐서 만든 것
이다.

$$\overline{x}(k+1) = \overline{A} \overline{x}(k) + \overline{B} \overline{u}(k) \quad (5)$$

여기서 행렬 $\overline{A} \overline{B}$ 는

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ LC_d A_d & B_d \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} \Gamma_d \\ 0 \end{bmatrix} \\ \overline{B} &= \begin{bmatrix} \Gamma_d \\ 0 \end{bmatrix} \text{이다.}\end{aligned}$$

여기서 $\overline{x}(k)$ 는 $\overline{x}(k) = [x(k) \widehat{x}_e(k)]^T$ 이다.

2.2 LQ 슬라이딩 모드 제어

이산시간 시스템의 일반적인 해는

$$\overline{x}(k) = \overline{A}^k \overline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \overline{A}^{k-j-1} \overline{B} \omega(j) \quad (6)$$

로 나타낼 수 있다.

일반적인 이산시간 시스템의 해를 사용하기 위해서
새로운 슬라이딩 평면을 도입한다.

$$S(k) = h[\overline{x}(k) - \overline{A}^k \overline{x}(0) - \sum_{j=0}^{k-1} \overline{A}^{k-j-1} \overline{B} \omega(j)] \quad (7)$$

여기서 h 는 양의 상수 값이고, K 는 LQ 최적 제어에
서의 선형 피드백 이득 집합이다. LQ이론을 사용하는
피드백 제어기는 비용 함수를 최소화하는 것에 의해
서 얻을 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{x}^T(k) Q \overline{x}(k) + \omega^T(k) R \omega(k)) \quad (8)$$

여기서 Q 와 R 은 비용 가중치를 의미한다. 그리고 간단히 LQ
이론을 사용해서 상태 피드백 제어기 $\omega(k) = -K \overline{x}(k)$ 를
알 수 있다 [4].

그리고 피드백 이득은 다음을 통해서 얻을 수 있
다.

$$K = (R + B^T S B)^{-1} B^T S A \quad (9)$$

여기서 S 는 Algebraic Riccati Equation(ARE)의해 구
해진 안정된 유일한 해이다.

$$\overline{A}^T S A - S + Q - \overline{A}^T S B (R + B^T S B)^{-1} B^T S A = 0 \quad (10)$$

시스템 (6)에 대한 슬라이딩 모드 제어 법칙은
 $S(k) \Delta S(k) < 0$ 와 같은 도달 조건에 의해서 유도된
다. 여기서 $\Delta S(k) = S(k+1) - S(k)$, $S(k) \neq 0$
[5]이다.

도달 조건을 만족하는 슬라이딩 모드 제어기는 다
음과 같은 식을 통해서 얻을 수 있다.

$$\omega(k) = -K \overline{x}(k) - \eta \text{sat}(S(k)) \quad (11)$$

여기서 외란은 $|d| < \delta$, $\eta \geq \delta$ 로 표현 할 수 있다.
 δ 는 임의의 양수이다. 만약 외란이 없다면, 피드백 제
어기는 $S(k+1) = S(k)$ 의 슬라이딩 평면에서 작동
한다.

시스템의 상태궤도는 $S(k+1) = S(k)$ 의 슬라이
딩 평면에 잡혀 있다. 그리고 (5)의 시스템은 다음과
같은 피드백 시스템이 된다.

$$\overline{x}(k) = (\overline{A} + \overline{B} K) \overline{x}(k) \quad (12)$$

제어입력은 $u(k+1) = u(k) + T \omega(k)$ 에 의해서
업데이트 된다.

3. 모의실험

제한된 일반 선형 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어기의 견실성 및 안정성을 평가하기 위해, HDD 시스템을 모델로 하여 모의실험을 하였다. HDD 시스템은 $A_d = \begin{bmatrix} 1 & \theta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_d = \begin{bmatrix} \theta \alpha T^2 / 2 \\ \alpha T \end{bmatrix}$, $C_d = [1 \ 0]$ 의 형태를 가지는 행렬들이다.

위치추정이득을 $\theta = 1,250,000 (m^{-1})$, 가속도 상수를 $\alpha = 100 (ms^{-2} A^{-1})$, 최대제어입력을 $U_{max} = 4 (A)$, 목표 위치를 $x_1 = 100$, 샘플링 주기는 $T = 322.6 (\mu s)$ 의 파라미터를 이용하였다.

불규칙한 외란신호를 시스템에 인가하여, 최적 시간 제어기와 제한된 제어기의 안정성과 견실성을 비교한다. 그리고 제어기 성능을 알아보기 위해 불규칙한 외란을 시스템에 인가하여 모의실험 하였다.

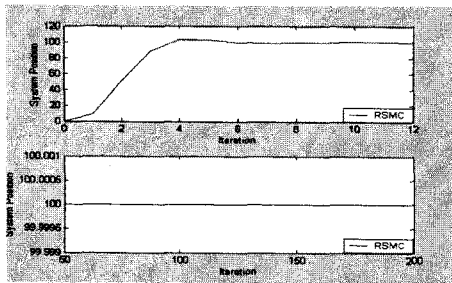


그림1. RSMC를 이용한 시뮬레이션 결과.

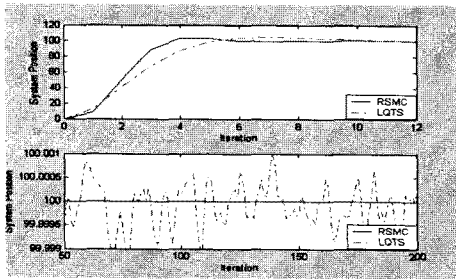


그림2. LQTS와 RSMC의 시뮬레이션 결과를 비교.

그림1은 외란이 시스템에 인가되었을 때, LQTS(LQ control with two state)와 RSMC(robust sliding mode control)가 결합된 것을 사용하였을 때의 결과이다. 그림2의 위 그림은 시간에 따른 시스템의 위치를 나타낸 것이며, 아래 그림은 목표 위치에 도달한 후에 떨림 현상이 현저히 줄어들어 있다는 것을 보여주고 있다.

그림2는 LQTS와 RSMC이 적용된 시스템의 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다. 여기서 우리는 LQTS보다 RSMC가 목표 위치에 도달하는 시간이 더 빠르다는 것을 알 수 있으며, 우리는 LQTS보다 RSMC가 떨림 현상이 현저히 줄어들었다는 것을 알 수 있다.

그러므로 제한된 제어기는 최적시간제어기 보다 더 우수한 성능을 보여주고 있다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 일반 선형 시스템의 위치 제어에 관한 LQ 제어와 슬라이딩 모드 제어가 결합된 알고리즘을 제안하였다. 일반적으로 탐색시간을 줄이기 위하여 LQ 제어가 성능이 좋지만, 제어 입력의 떨림 현상을 발생시키므로 제어기의 안정성 및 견실성을 보장하기 어렵다. 일반 선형 시스템의 성능이 향상됨에 따라 보다 정밀한 위치 제어가 요구된다. 그러므로 제한된 제어기는 이송장치의 탐색시간을 줄이기 위해 탐색모드에서 최적시간 제어기(LQ 제어기)를 사용하고, 추종 모드에서는 제어기의 안정성 및 견실성을 보장하기 위해 슬라이딩 모드 제어기를 사용하였다.

모의실험 결과를 통하여 제한된 제어기를 사용하였을 경우, 최적 시간 제어(LQ 제어)를 통한 시스템의 결과와 슬라이딩 모드 제어와 최적 시간 제어(LQ 제어)를 통한 시스템의 결과를 통해서 슬라이딩 모드 제어와 최적 시간 제어(LQ 제어)를 이용하는 것이 최적 시간 제어를 이용한 것보다 빠른 탐색시간을 가지며, 떨림 현상을 현저하게 개선시킨다는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] E.Y. Ho and P.C. Sen, "Control dynamics of speed drive systems using sliding mode controllers with integral compensation," *Industry Applications, IEE trans.*, vol. 27, No. 5, pp. 883-892, 1991.
- [2] J.J. Slotine and S.S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with applications to robot manipulators," *Int. J. Contr.*, vol. 39, No. 2, 1983.
- [3] R.G. Brown and P.Y. Hwang, *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, Wiley, N. Y., 1997.
- [4] F.L. Lewis and V.L. Syrmos, *Optimal Control*, Wiley, N. Y., 1995.
- [5] J.K. Pieper and B.W. Surgenor, "Discrete sliding control of a coupled-drives apparatus with optimal sliding surface and switching gain," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, vol. 140, No. 2, pp. 70-78, 1993.