

LQR을 사용한 최적 PI-PD제어기 동조

An Optimal Tuning of PI-PD Controller Via LQR

강 근 형*, 서 병 설**

(Keun-Hyoung Kang, Byung-Suhl Suh)

Abstract - This paper presents an optimal and robust PI-PD controller design method for the second-order systems both with dead time and without dead time to satisfy the design specifications in the time domain via LQR design technique. The optimal tuning method of PI-PD controller are also developed by setpoint weighting and neural networks.

It is shown that the simulation results show significantly improved performance by proposed method.

Key Words : PI-PD, LQR, PID, Setpoint weighting, neural network

1. 서론

PID 제어기는 구조의 단순성과 실현성 때문에 산업공정 전반에 있어 널리 사용되어지고 있다. PID제어기 값을 결정하기 위하여 그동안 많은 동조방법들이 제시되어 왔지만, 이러한 접근들의 대부분은 적분요소를 포함하고 있거나 불안정한 플랜트에는 그리 좋은 성능향상을 보여주지 못하는 것이 사실이다.

최근 불안정한 플랜트^{[1],[2],[3]}와 적분요소 플랜트^{[4],[5],[6]}에 대한 몇몇 논문들이 여러 관점에서 보여 지고 있지만, 모두 과도한 오버슈트를 초래한다.

Kwak et al^[5]은 PID 제어기의 적분요소로 인한 플랜트 제어의 어려움을 수학적 분석을 통하여 보여 주었다. 그래서 그들은 이러한 어려움을 극복하기 위해 플랜트를 개루프 안정한 플랜트로 먼저 변환시키고, 이후에 플랜트를 제어하기 위하여 PID제어기를 사용했다. 그러나 이러한 방법은 앞 방향 루프에 여전히 미분요소를 사용함으로써, 신호에 고주파 성분이 함유되면 미분 폭주현상(Derivative kick)을 유발할 수 있다. 그리고 적분요소를 함유하고 있는 플랜트나 개루프 불안정한 플랜트를 안정한 플랜트로 바꾸기 위하여 내부루프에 단지 비례요소만을 사용하는 것보다는 PD부분을 내부 루프에 도입함으로써, 시스템의 극점을 보다 적합한 위치에 할 당 시킬 수 있다. 이러한 점에서 PI-PD제어기는 불안정하거나^[7] 적분요소^[8]를 포함한 플랜트 제어의 구조적인 어려움을 극복할 수 있는 것으로 입증 받아왔다. 그러나 이러한 PI-PD제어기 변수를 결정하는 것은 쉬운 일이 아니

다. 그래서 우리는 다음과 같이 제어기 동조방법을 새로이 제시하고자한다.

본 논문은 다음과 같이 이루어져 있다. 먼저, PI-PD제어기 구조를 LQR^[9]을 통하여 해석하여 PID값을 결정함과 동시에 PI-PD제어기 동조규칙을 유도한다. 다음 이를 설정점가중치(setpoint weighting)값과 연계시켜 제어기를 해석하고 설정점가중치 값을 결정함과 더불어 PI-PD제어기 값을 완벽히 유도한다.

2. PI-PD제어기 동조

2.1 PI-PD 제어기

PI-PD 제어기의 구조가 그림.1에 나타나 있다.

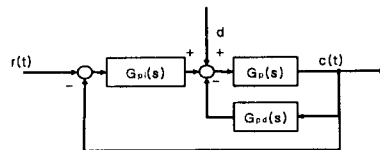


그림.1 PI-PD 구조

위의 구조에서, $G(s)$ 는 플랜트 전달함수 이고, $G_p(s)$ 와 $G_d(s)$ 는 다음과 같은 구조를 가지는 PI와 PD제어기의 전달함수 이다.

$$G_p(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \tag{1}$$

$$G_d(s) = K_d (1 + T_d s) \tag{2}$$

2.2 LQR을 통한 PI-PD루프 해석

그림.1 의 PI-PD 제어 루프를 LQR로 해석하기 위하여 다음과 같이 기준입력 $r(t)=0$ 으로 놓으면 그림 2.와 같이 루프를 구성 할 수 있다.

저자 소개

*학생 會員 : 漢陽大學 電氣工學科 碩士課程

**正 會員 : 漢陽大學 電子電氣컴퓨터工學部 教授(交信責任者)

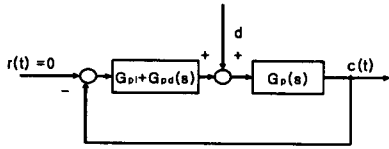


그림.2 PI-PD 구조

다음의 2차 선형시스템을 고려하자.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cu(t) \quad (3)$$

여기서, $y(t)$ 는 출력변수, $u(t)$ 는 제어변수, 그리고 a, b, c 는 시스템 계수이다. 초기 조건 $y(0)$ 와 $\frac{dy(0)}{dt}$ 는 명시되어진다. 출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하면 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

그러면 식(4)은,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (6)$$

이고, 제어입력 $u(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = -(K_p + K_c)x_1(t) - K_p\left(-\frac{1}{T_i}\right)x_0(t) - K_c T_d x_2(t) \quad (7)$$

여기서, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix}$ 이고.

$$C = [0 \ 1 \ 0] = [0 \ C_p] \quad \text{이다.} \quad (8)$$

PI-PD 제어 요소가 포함된 폐 루프 상태 방정식을 나타내기 위해서 식(5)의 $u(t)$ 에 식(7)을 대입하여 폐 루프 상태 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_p\frac{1}{T_i} & -(b+K_p+K_c) & -(a+K_c T_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

LQR로 해석하기 위해서 식(10)과 같은 2차 가격함수를 고려하자.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10)$$

여기서 Q 는 양의 반 한정(positive semi-definite) 대칭행렬인 상태가중행렬이고, R 은 양의 한정(positive definite)대칭행렬인 제어가중행렬이다. 그러면 다음과 같은 최적제어 법칙이 얻어진다.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (11)$$

$$G = R^{-1} B^T K \quad (12)$$

여기서, G 는 LQR의 제어이득행렬이고, K 는 양의 반 한정 대칭행렬이며 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$KA + A^T K + Q - R^{-1} K B R^{-1} B^T K = 0 \quad (13)$$

방정식 (12)의 제어이득행렬 G 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G = \frac{c}{R} [K_{20} \ K_{21} \ K_{22}] = [G_1 \ G_2 \ G_3] \quad (14)$$

그러므로 방정식(11)의 최적제어법칙 $u(t)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = -\frac{c}{R} \left(K_{20} \frac{dy(t)}{dt} + K_{21} y(t) + K_{22} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (15)$$

방정식 (11)을 방정식 (5)에 대입하면,

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BG)x(t) \quad (16)$$

되고, 그래서 특성 방정식 A_c 는 방정식 (17)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c^2}{R} K_{20} & -(b + \frac{c^2}{R} K_{21}) & -(a + \frac{c^2}{R} K_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

파드백 제어루프를 LQR로 해석하기 위해서는 특성 방정식 (9)와 방정식 (17)이 같아야 한다. 즉,

$$K_p \frac{1}{T_i} = \frac{c^2}{R} K_{20} \quad (18)$$

$$(K_p + K_c) = \frac{c^2}{R} K_{21} \quad (19)$$

$$K_c T_d = \frac{c^2}{R} K_{22} \quad (20)$$

2.3 PI-PD 제어기 값의 결정

그림.1의 PI-PD구조를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) (r(s) - y(s)) - (K_c + K_d s) y(s) \quad (21)$$

방정식 (21)을 다시 정리하면,

$$u(s) = (K_p + K_c) \left(\frac{K_p}{K_p + K_c} r(s) - y(s) \right) + \left(\frac{K_i}{s} \right) e(s) - K_d s y(s) \quad (22)$$

여기서, $K_p' = K_p + K_c$ 그리고 $\frac{K_p}{K_p + K_c} = b$ 라고 놓으면,

결국 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(s) = K_p' (b r(s) - y(s)) + \left(\frac{K_i}{s} \right) e(s) - K_d s y(s) \quad (23)$$

여기서, $e(s) = r(s) - y(s)$ 이다.

방정식(23)은 지금 설정 점 가중치(setpoint weighting)를 가지는 PI-D 구조와 같다. 방정식(23)을 이용하여 폐 루프를 구성하여 보면 다음과 같이 구성 될 수 있다.

$$y(s) = \frac{G_p(s) \left(\frac{K_p' b s + K_i}{s} \right) r(s)}{1 + G_p(s) \left(\frac{K_p' s^2 + K_p' s + K_i}{s} \right)} r(s) \quad (24)$$

이러한 제어기는 폐 루프에 다음과 같은 영점을 도입함을 알 수 있다.

$$s = -\frac{K_i}{K_p' b} \quad (25)$$

방정식 (24)을 보면 폐 루프의 극점은 이미 결정되어진 값으로 변하지 않고, 영점만이 그 위치가 달라진다. 우리는 다음과 같이 설정점가중치(setpoint weighting)값 결정 방법을 제시하고자 한다.

2.4 설정점가중치(setpoint weighting) 값(β)의 결정

본 논문은 다음과 같이 뉴런 네트워크를 통한 설정점가중치(setpoint weighting)값을 결정함으로써, 적절한 영점의 위치의 결정과 더불어 오버슈트를 효과적으로 제어하는 방법

을 또한 제안하고자 한다.

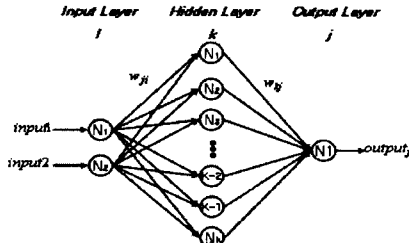


그림3. 뉴럴 네트워크 구조

본 논문에서 사용되어지는 네트워크의 구성은 그림3 과 같다.

에러함수, 즉 목적함수(cost function)는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$= \frac{1}{2} (\gamma(K) - f(K))^2 \quad (26)$$

여기서, $f(K)$ 는 폐 루프 전달함수의 역 라플라스 변환된 시간함수이고 $\gamma(K)$ 는 기준입력이다.

가중치 조절 방법은 다음과 같다.

$$\Delta w_{ki} = -\gamma(K) \frac{\partial (K)}{\partial w_{ki}(K)} + \alpha \Delta w_{ki}(K-1) \quad (27)$$

$$\Delta w_{jk} = -\gamma(K) \frac{\partial (K)}{\partial w_{jk}(K)} + \alpha \Delta w_{jk}(K-1) \quad (28)$$

여기서, η 는 학습률(learning rate)

α 는 모멘트(moment)

가중치를 조절하기 위해서는 위의 식으로부터 연쇄법칙을 사용하여 $\frac{\partial (K)}{\partial w_{ki}(K)}$ 와 $\frac{\partial (K)}{\partial w_{jk}(K)}$ 을 얻을 수 있다.

출력 레이어(output layer)의 에러전이는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial w_{jk}} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \hat{y}_k} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial w_{jk}} \quad (30)$$

중간층 레이어(hidden layer)의 에러전이는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial w_{ki}} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \hat{y}_k} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial w_{ki}} \quad (31)$$

오버슈트(overshoot)를 효과적으로 조절하기 위하여 다음과 같은 1개의 부가적인 목적함수(cost function)가 더 필요하다. 이를 위하여 다음과 같은 목적함수(cost function)를 추가한다.

$$\text{minimize } \gamma = \text{Max}(f(K)) - D_{os} \quad (32)$$

여기서 D_{os} 는 사용자 설정치 값이다.

2.5 가중치 요소 Q와 R의 선정

본 논문은 LQR의 가격함수의 가중치요소 Q와 R의 선정 방법을 다음과 같이 제시한다. Suh^[10]가 제시한 것과 같이 3차 시스템의 응답이 오버슈트를 갖기 위해서는 근이 S-평면에서 두 개의 복소극점과 하나의 실수극점으로 존재해야 한다.

$$T(s) = \frac{w_n^3}{(s + \frac{1}{r} w_n)(s^2 + p w_n s + n w_n^2)} \quad (33)$$

특성방정식을 고려할 수 있는 폐 루프 상태 공간 식으로 나

내면

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BC)x(t) \quad (34)$$

그리고 식(43)의 폐 루프 시스템행렬 A_c 의 특성방정식은 식(35)로 구하여진다.

$$\Delta = s^3 + (a + \frac{c^2}{R} K_2)s^2 + (b + \frac{c^2}{R} K_2)s + \frac{c^2}{R} K_2 \quad (35)$$

식(35)은 식(33)의 특성방정식이다.

$$\Delta = (s + \frac{1}{r} w_n)(s^2 + p w_n s + n w_n^2) \quad (36)$$

그리고 식(15)의 PID 제어기 파라미터들은 LQR의 가중치요소 Q와 R에 의한 관계식으로 나타내고 Q를 설계파라미터 p, r, w_n 에 관한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$Q_{00} = \frac{R w_n^3}{c^2} \quad (37)$$

$$Q_{11} = \frac{R}{c^2} \left[(r + \frac{b}{r}) w_n^2 - b \left[2b + \left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b \right] - 2w_n^2 \frac{R^2}{c^4} \left[2 \left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b + a^2 \right] + \frac{R}{c^2} Q_{22} \right] \quad (38)$$

$$Q_{22} = \frac{R}{c^2} \left(p + \frac{1}{r} \right) w_n^2 - \frac{R}{c^2} \left[a^2 + 2 \left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b \right] \quad (39)$$

본 논문에서 제안한 PI-PD제어기 동조 절차를 정리하면 다음과 같다.

단계1. 제안된 방법에 따라 p 와 r 값을 선정한다.(본 논문에서는 시간 지연에 따른 w_n 의 영향을 최대한 줄이기 위해 최적화된 3차함수의 응답을 기초로 $p=1.153015$, $r=1.338715$ 를 선정한다.)

단계2. 제안된 방법에 따라 w_n 을 선정한다.(여러 시물레이션으로부터 $w_n L \in [0.6, 1.9]$ 이 만족할 만한 성능을 보여 준다.)

단계3. 방정식(36)~(38)로부터 Q 값을 계산한다.

단계4. 방정식 (13)로부터 K 값을 계산한다.

단계5. 방정식 (26)과 방정식(32)을 만족하는 설정점가중치(setpoint weighting)를 뉴럴 네트워크(neural network)를 통하여 결정하고 방정식(18)~(20)로부터 PI-PD제어기 값을 결정한다.

2.6 시물레이션 연구

예제1.

다음과 같은 불안정한 시스템을 고려하여 보자.

$$G_p(s) = \frac{1}{(0.5s+1)(2s-1)} e^{-0.5s}$$

park et al.^[11]등이 사용한 Taylor series expansion 방법과 모델차수 감소를 사용한 PID-P제어기 변수는 각각 다음과 같다. 모델차수 감소에 의한 제어기 변수 값들은 $K_a=1.687$, $K_c=0.561$, $\tau_i=1.165$, $\tau_d=1.487$ 이며, Taylor series expansion에 의한 변수 값은 $K_a=1.483$, $K_c=0.416$, $\tau_i=1.672$, $\tau_d=1.171$ 이다. 그리고 ISTE^[12]방법에 의한PI-PD 제어기 값은 $K_c=0.715$, $T_i=0.387$, $K_p=3.190$ 그리고 $T_d=0.637$ 이다. 제안된 방법에 의한 설계변수 $p=1.1530151$, $r=1.3387151$, $w_n=1.9$ 이고 PI-PD제어기 변수 값

은 $T_d=1.3361$, $K_c=1.1270$ 이고 $K_p=1.623$, $T_i=17.7102$ 이다. 시뮬레이션 응답이 아래 그림에 보여 진다.

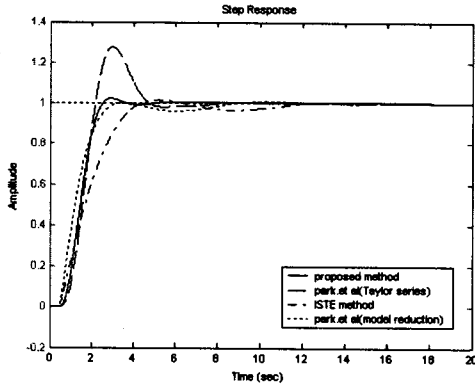


그림.3 예제1의 단위 스텝응답

예제 2.

다음의 resonance 특성을 가지는 시스템을 고려하여 보자.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.02s + 1} e^{-0.1s}$$

ISTE방법은 이러한 목적을 위하여 사용되는 가장 잘 알려진 방법 중의 하나이다.

ISTE 설계방법에 따른 PID제어기 변수 값은 $T_d=5.613$ 이고 $K_c=0.144$, $T_i=0.372$ 이며. PI-PD값은 $K_p=0.322$, $K_c=0.142$, $T_i=0.144$, $T_d=1.537$ 이다.

본 논문에서 제안한 방법에 의한 설계변수 $p=1.153015$, $r=1.338715$, $W_n=6$ 이고, 제어기 변수 값은 $K_c=9.5486$, $T_i=0.3518$, $K_p=10.6095$, $T_d=0.5787$ 이다.

시뮬레이션 응답이 아래 그림에 보여 진다.

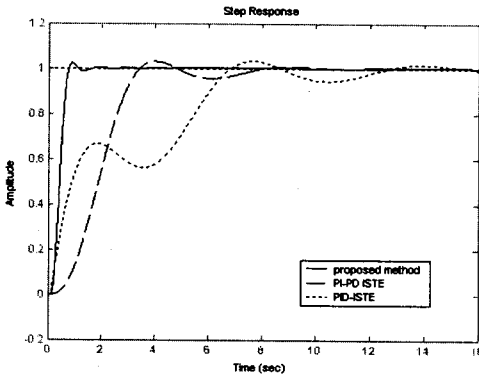


그림.4 예제2의 단위 스텝응답

3. 결론

기존의 PID 동조 방법들의 대부분은 안정한 플랜트에는 적합하지만, 이에 반해 시스템이 불안정하거나 적분요소를 포함하고 있는 플랜트에 대해서는 PID제어기의 구조적인 제한성 때문에 이렇다 할 만족스러운 수행력을 달성하는 데에는 어려움이 따른다.

본 논문에서는 이러한 제한성을 극복하기 위하여 LQR접근방법을 통하여 PI-PD를 새로이 해석함으로써 안정도 및 강인성을 확보하였고, 설정점가중치 값을 최적으로 결정하여 효과적으로 오버슈트를 조절함으로써, 위의 시뮬레이션에서 나타난 것처럼 기존의 방법들 보다 우수한 성능 향상 이루었다. 그러나 본 논문에서 제안된 방법은 플랜트의 차수가 2 차에 국한된다는 단점을 극복하지 못하였다. 그러므로 앞으로의 새로운 과제는 시스템 식별을 통하여 보다 폭넓은 범위의 플랜트로 확장하는 것일 것이다.

[참고문헌]

- [1] E.poulin and A. Pomerleau, "PID tuning for integrating and unstable processes", IEE Proc.-Control Theory Appl. 143(5), 1996, pp429-435
- [2] J. H. Park, S. W. Sung and I.B, Lee, "An enhanced PID control strategy for unstable processes", Automatica 34(6),1998, pp.751-756
- [3] A. Visioli, "Optimal tuning of PID controllers for integrating and unstable processes" IEE Proc.-Control Theory Appl. 148(2), 2001, pp. 180-184
- [4] L. Wang and W. R. Cluett, "Tuning PID controllers for integrating processes", IEE Proc-Control Theory Appl. 144(5), 1997, pp. 385-392.
- [5] H.J. Kwak, S. W. Sung and I.B. Lee, "On-line process identification and autotuning for integrating processes", Ind. Eng. Chem. Res. 36, 1997, pp. 5329-5338
- [6] W. K. Ho and W. Xu, "PID tuning for unstable processes based on gain and phase-margin specifications", IEE Proc.-Control Theory Appl. 145(5), 1998, pp. 392-396
- [7] D.P. Atherton and A.F. Boz, "Using standard forms for controller design", Proc. of Control'98, Swansea, UK,1998, pp.1066-1071.
- [8] J. Kaya and D.P Atherton, "A PI-PD controller design for integrarng process", Proc. of American control conference, ACC'99, 1999b,pp. 258-262.
- [9] J. He, Q. Wang and T. Lee, "PI/PID Controller Tuning via LQR Approach", Chemical Engineering Science 55, pp.2429-2439, 2000.
- [10] Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regulators for a Second Order System via LQR Approach",15th International Conference on Electrical Machines, Brugge Belgium, 25~28 August 2002.
- [11] J. H. Park, S. W. Sung and I.B, Lee, "An enhanced PID control strategy for unstable processes", Automatica 34(6),1998, pp.751-756
- [12] Atherton, D. P. and Majhi, S., "Limitations of PID Controller", Proceedings of American Control Conference, pp. 3843-3847, (1999)