

# 시간지연을 갖는 TITO시스템의 최적 PI제어기 동조

## An Optimal PI Controller Tuning for TITO System with Time-Delay

나 태 응\*, 서 병 설\*\*  
Tae-woong Nah, Byung-Suhl Suh

**Abstract** - This paper presents an optimal tuning method of the decentralized PI controller of the two-input, two-output(TITO) second order system with time-delay using LQR approach

**Key Words** : TITO, LQR, OPTIMAL, TIME-DELAY

### 1. 장 서 론

다변수 제어시스템을 위한 최적 PI동조에 관한 연구는 난해하기 때문에 일반적인 방법으로 접근하기 힘들다. 근래의 다변수 해석을 위한 접근방식을 생각해 보면 Known Plant에 대한 접근 방식과 Unknown Plant에 대한 접근 방식으로 볼 수 있다. 먼저 Known Plant 접근방식에는 Chen<sup>[1]</sup>등이 고려한 다변수 시스템의 시간지연과 외란에서의 안정도를 고려하기 위해 Gershgorin bands를 이용한 PI/PID를 제안하였으나 이 방법은 강인성 보장이 결여된 PI/PID제어기 설계방법이다. 이를 극복하기 위한  $H^\infty$ 동 안정도와 강인성의 보장을 위해 여러 가지 동조 방법이 사용되었지만 실제의 구현에 있어서 수치적 계산의 어려움과 설계과정의 복잡성을 가지고 있다. 그래서 간단한 설계 방법과 안정성, 강인성을 보장하는 방법으로 Um-Suh<sup>[2]</sup>는 TITO 시스템의 분산된 LQ-PI동조를 제시하였다. 그러나 이 방법 또한 시간지연을 고려하지 않았기 때문에 일반적으로 시간지연이 존재 하는 공정제어 시스템에 적용하지 못한다. Chang<sup>[3]</sup>등과 Wang<sup>[4]</sup>등은 Unknown Plant의 다변수 PID 시스템의 연구와 시간지연을 가진 다변수 시스템에 대하여 연구하였다. Chang<sup>[3]</sup>은 안정도와 강인성을 보장하였지만 시간지연이 고려되지 않아 일반적으로 시간지연이 존재하는 시스템에는 적용하지 못하는 단점이 있고 Wang<sup>[4]</sup> 역시 안정도와 강인성을 보장되고 시간지연이 고려되지만 제어입력과 시스템 전체를 identification 해야 한다는 점에서 시스템에 오류가 있을 때는 또 다시 시스템을 교체해야 하므로 이는 실제적인 구현에 있어서 비용이 많이 드는 단점이 있다. 본 논문에서는 시간지연을 갖는 다변수 시스템을 2-입력, 2-출력 2차 시스템으로 제한하여 제어 입력 선정을 고려한 PI제어요소가 포함된 2차 시스템의 시간지연요소의 고려와 페루프 상태방정식과 LQR의 페루프 상태방정식의 관계를 유도하고 루프형성절차를 통해 주파수 영역 설계사양에 만족할 수 있도록 가격함수의 가중치 요소 Q와 R을 선정함으로써 성능 및 안정도-강인성이 보장되는 시간지연을 갖는 분산된 최적 강인 PI제어기 설계방법을 제안하고 Hamamci and Koksali<sup>[5]</sup>와 비교하여 예제에서 다루도록 하였다.

### 2. 장 시간지연 TITO시스템의 LQR 해

시간지연을 갖는 선형 시불변 다변수 시스템 상태방정식은 다음과 같이 고려한다.

$$\dot{x} = Ax + B_u(t-L) \quad (1) \quad y = Cx \quad (2)$$

여기서,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 이고,  $y$ 는 출력벡터,  $u$ 는 제어

지자 소개

\* 準 會 員 : 漢陽大學 電氣學科 碩士課程

\*\* 正 會 員 : 漢陽大學 電氣制御生體學部 交授(交信 責任者)

입력벡터이다. 식(1)과 식(2)의 행렬은 TITO시스템에서 2차 시스템을 고려하기 위해 다음과 같이  $2 \times 2$ 행렬의 각 요소별로 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

제어의 목적은 출력이 정상상태( $t \rightarrow \infty$ )에 도달하여 오차  $e$ 가 어떤 조건하에서도 0으로 수렴하도록 하여 명령입력과 같게 하는 제어시스템이기를 원한다. 정상상태에서 출력벡터와 오차벡터를 나타내면,

$$y(\infty) = r \quad (4) \quad e(\infty) = 0 \quad (5)$$

이다. TITO시스템의 적분오차벡터를 첨가시켜 새로운 변수벡터를 도입하면 오차벡터  $e$ 는 다음과 같다.

$$\dot{z} = e \text{ 또는 } z = \int e \cdot dt \quad (6)$$

이제, 본래의 상태에서 정상상태를 뺀 새로운 변수벡터를 나타내어보면,

$$\hat{x} = x - x(\infty), \hat{u}(t-L) = u(t-L) - u(\infty), \quad (7) \\ \hat{y} = y - y(\infty)$$

$$\hat{z} = z - z(\infty) \quad (8) \quad e = r - y \quad (9)$$

이다. 식(7)에 의해 식(9)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{y} = y - y(\infty) = y - r = -e \quad (10)$$

$$e = -\hat{y} = -C\hat{x} \quad (11)$$

여기서 He<sup>[6]</sup>등의 시간지연 시스템의 LQR의 해를 이용하여 식(1)의 입력  $u(t)$ 를 2단계로 분리한다.

i)  $0 \leq t < L$   $\tilde{u}(t) = 0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad 0 \leq t < L \quad (12)$$

ii)  $t \geq L$   $\tilde{u} = \tilde{u}(t-L)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t) \quad t \geq L \quad (13)$$

다변수 상태방정식을 새로운 변수를 도입한 상태방정식으로 나타내면

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{u} \quad (14)$$

$$\hat{y} = [C \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서,

$$A_o = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C_o = [C \ 0] \quad (16)$$

이다. 여기에 LQR로 해석하기 위해서 식(6)의 적분오차벡터를 첨가한 2차 가격함수를 고려하자.

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \begin{matrix} \hat{x}^T & \hat{z}^T \end{matrix} \right] Q \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \hat{u}^T R \hat{u} \, dt \quad (17)$$

$$KA_0 + A^T K + Q - KB_p R^{-1} B^T K = 0 \quad (18)$$

위 식은 Riccati방정식이고  $K$ 는 이 식의 해이며 양의 반한정(Positive semi-definite) 대칭행렬이다. 식(17)에서 상태가중행렬  $Q$ 는 양의 반한정(Positive semi-definite)대칭행렬이고, 제어가중행렬  $R$ 은 양의 한정(Positive-definite)대칭행렬이다.

$$\hat{u} = -(G_1 \hat{x} + G_2 \hat{z}) = -[G_1 \ G_2] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$G = [G_1 \ G_2] = R^{-1} B^T K \quad (20)$$

여기서,  $G$ 는 LQR의 제어이득행렬이다.  $\hat{u}(t)$ 는  $t \geq L$ 에서의 입력이므로  $t \geq 0$ 으로 변환하면

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{u}(t+L) \\ &= -[G_1 \ G_2] \begin{bmatrix} \hat{x}(t+L) \\ \hat{z}(t+L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

그러나  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t+L) \\ \hat{z}(t+L) \end{bmatrix}$ 은 시간  $t$ 에 직접이용 할 수 없다. 따라서 식을 변환하면

i)  $0 \leq t < L$ 일때

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t+L) \\ \hat{z}(t+L) \end{bmatrix} = e^{A_0 t} \begin{bmatrix} \hat{x}(L) \\ \hat{z}(L) \end{bmatrix} = e^{A_0 t} e^{A(L-t)} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\therefore \hat{u}(t) = -[G_1 \ G_2] e^{A_0 t} e^{A(L-t)} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서  $A_0 = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T K$ ,  $A_0 \in R^{(n+m)}$ 이다.

ii)  $t \geq L$ 일때

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t+L) \\ \hat{z}(t+L) \end{bmatrix} = e^{A_0 t} \begin{bmatrix} \hat{x}(L) \\ \hat{z}(L) \end{bmatrix} = e^{A_0 t} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\therefore \hat{u}(t) = -[G_1 \ G_2] e^{A_0 t} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

위의 두 식을 살펴보면  $\hat{u}(t)$ 가  $0 \leq t < L$ 에서는 시간에 따라 변하지만  $t \geq L$ 에서는 일정하다는 것을 확인 할 수 있다. 그리고  $t=L$ 인 지점에서는 두 식의 값이 일치한다는 것을 알 수 있다. 출력값은  $t \geq L$  이후에 발생하므로 설계시양을  $t \geq L$ 의 제어 입력  $\hat{u}(t)$ 에서 결정하면 상태 출력은  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t-L) \\ \hat{z}(t-L) \end{bmatrix}$ 로 시간지연이 발생하고 또 피드백되는 상태도 시간

지연이 발생하지만 식(25)에서의  $e^{A_0 t}$ 에 의해서  $e^{-A_0 L}$ 는 소거되고 실재는

$$\hat{u}(t) = -[G_1 \ G_2] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

와 같이 시간지연이 없는 폐환 신호와 같이 된다

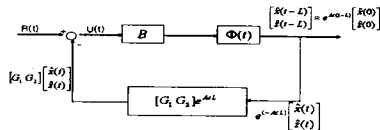


그림 1. 시간지연을 갖는 LQR제어기

### 3. 장 상태방정식으로 표현

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u} \quad (27)$$

$$\hat{y} = [C \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\hat{u} = -K_p \hat{C} \hat{x} + K_i \hat{z} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

식(25)에서  $[G_1 \ G_2] e^{A_0 L} = [\hat{G}_1 \ \hat{G}_2]$ 라 하고 LQR의

제어이득행렬이 포함된 페루프 상태방정식을 적분오차벡터를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\hat{G}_1 & -B\hat{G}_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (31)$$

TITO제어시스템을 LQR로 해석하기 위해서는 두개의 페루프 상태방정식이 같아야 한다.

$$\begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\hat{G}_1 & -B\hat{G}_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

따라서, 식(32)과 같은 각각의 페루프 상태방정식에 의해 LQR제어이득과 분산된 PI계수와 관계를 맺어 안정도-강인성을 보장하는 PI계수행렬을 얻을 수 있다. 식(32)에서 각각의 페루프 상태방정식에서 다음과 같은 분할행렬(Partitioned matrix)이 같아야 한다.

$$A - BK_p C = A - B\hat{G}_1 \quad (33)$$

$$BK_i = -B\hat{G}_2 \quad (34)$$

식(33)을 요소별로 나타내어 비례이득인  $K_p$ 행렬의 요소  $k_{p1}, k_{p2}$ 와 LQR 제어이득  $\hat{G}_1$ 행렬의 요소  $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$ 와의 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} b_{11}k_{p1} & b_{12}k_{p1} \\ b_{21}k_{p1} & b_{22}k_{p1} \\ b_{11}k_{p2} & b_{12}k_{p2} \\ b_{21}k_{p2} & b_{22}k_{p2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}g_{11} + b_{12}g_{21} \\ b_{11}g_{12} + b_{12}g_{22} \\ b_{21}g_{11} + b_{22}g_{21} \\ b_{21}g_{12} + b_{22}g_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

식(35)에 의하여 비례이득요소들인  $k_{p1}, k_{p2}$ 의 해를 구할 수 있다. 식(34)을 요소별로 나타내어 적분이득인  $K_i$ 행렬의 요소  $k_{i1}, k_{i2}$ 와 LQR제어이득  $\hat{G}_2$ 행렬의 요소  $g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}$ 와의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{11}g_{13} + b_{12}g_{23} \\ b_{11}g_{14} + b_{12}g_{24} \\ b_{21}g_{13} + b_{22}g_{23} \\ b_{21}g_{14} + b_{22}g_{24} \end{bmatrix} \quad (36)$$

식(36)에 의하여 적분이득요소들인  $k_{i1}, k_{i2}$ 의 해를 구할 수 있다.

### 4. 장 LQR의 Q와 R 선정

가중치 요소 Q와 R은 성능 및 안정도-강인성 개선을 위해 플랜트 출력측에서 절단한 루프전달함수의 특이값 일치기법 Suh<sup>[7]</sup>에 기초하여 설정한다. 식(33)과 식(34)에 의해  $K_p = \hat{G}_1 C^{-1}$ 이고  $K_i = -\hat{G}_2$ 의 관계가 나오므로 식(37)는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathcal{T}(s) = C(sI - A)^{-1} B \cdot (K_p + \frac{K_i}{s}) = C(sI - A)^{-1} B \cdot (\hat{G}_1 C^{-1} - \frac{\hat{G}_2}{s}) \quad (37)$$

그러나 식(37)은 식(26)에 의해서  $t \geq L$  이후에는 원래의 입력값과 같아지게 되므로  $t \geq L$  이후의 루프전달함수만을 고려한다. 그러면 식(37)은

$$\mathcal{T}(s) = C(sI - A)^{-1} B \cdot (K_p + \frac{K_i}{s}) = C(sI - A)^{-1} B \cdot (G_1 C^{-1} - \frac{G_2}{s}) \quad (38)$$

으로 된다. 저주파수와 고주파수에서  $\mathcal{T}(s)$ 의 극한값을 구하기 위해 Kwakernaak Sivan<sup>[8]</sup>의 LQR의 제어이득행렬  $G$ 의 극한가동인 관계식을 이용하면

$$\bar{N}_2 = -(C - A)^{-1} B^{-1} \quad (39)$$

$$\bar{N}_1 = (CB)^{-1}C \quad (40)$$

식(39)과 식(40)에 의해  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ 가 결정되면 상태가증행렬  $Q$ 는  $N^T N$ 으로 결정되고, 제어가증행렬  $R = \rho I$ 에서  $\rho$ 는 명령추종 및 외란 장벽과 센서 잡음 장벽을 고려하여 결정된다

### 5. 장 시뮬레이션

예제 1. Solid-fuel boiler plant<sup>[5]</sup>를 고려하자.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-Ke^{-2s}}{1+10s} & \frac{-1e^{-2s}}{1+10s} \\ 0 & \frac{-e^{-2s}}{1+60s} \end{bmatrix}$$

위 전달함수의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu(t-2) \quad y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.0167 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & -0.1336 \end{bmatrix}$$

주파수역 설계사양에서 저주파수 부분의 명령추종장벽과 외란장벽은  $\Omega_r = 10^{-3}$ 으로 하고 고주파수 부분의 센서잡음장벽은  $\Omega_n = 10^2$ 으로 놓는다. 또 disturbance는 50s와 150s에 크기 0.5로 주었다. 본 논문에서 제시한 방법을 이용하여 제어가증행렬  $R = \rho I$ 에서  $\rho = 10^{-1}$ 로 선택하고 상태가증행렬  $Q = N^T N$ 는  $\bar{N}_1$ 과  $\bar{N}_2$ 는 식(41)과 식(42)에 의해서 결정된다.

$$N = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.0020 & 0.0020 \\ -0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.0006 & 0.0006 \\ -0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & -0.3162 \end{bmatrix}$$

식(35)와 식(36)에 의하여  $K_p$  비례이득요소와  $K_i$  적분이득요소가 얻어진다.  $\Omega_r$

$$K_p = \begin{bmatrix} -1.8809 & 0 \\ 0 & -1.9553 \end{bmatrix}, K_i = \begin{bmatrix} -0.2554 & 0 \\ 0 & -0.0353 \end{bmatrix}$$

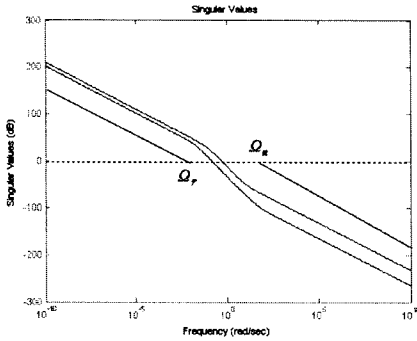


그림 2. 루프전달함수 T(s)

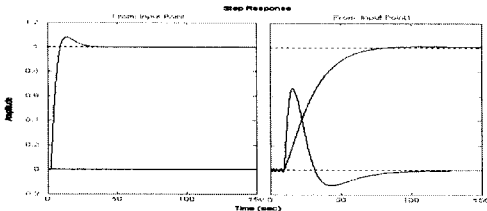


그림 3. 시간 지연을 갖는 분산된 PI제어기에 의한 계단 응답

그림 4.는 Hamamci and Koksai<sup>[5]</sup>의 CMD(Coefficient Diagram Method)의 출력 값이다. 이와 그림 3.의 출력 값을 비교하면 본 논문이 PI제어이

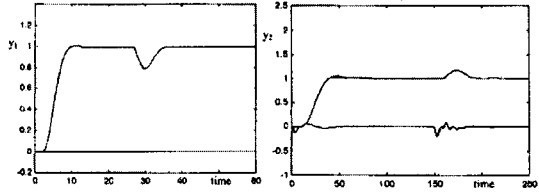


그림 4. CMD를 이용한 loop응답

므로 성능이 차이가 보여진다. 하지만 LQR 동조의 안정성과 강인성을 생각하면 안정성이 중요한 Plant에는 더욱 좋은 제어를 기대할 수 있다.

### 6. 장. 결론

시간지연을 갖는 TITO시스템의 분산된 PI제어기 설계방법을 시간영역으로 접근하여 PI제어기의 최적 강인 설계를 LQR 설계문제제로 전환하였고, 이를 각각의 페루프 상태방정식과 관제출 맺어 루프형성절차를 통해 주파수역 설계사양에 만족하도록 가측함수의 가중치 요소 Q와 R을 선정함으로써 최적 PI제어기 설계방법을 제안하였다

### 참 고 문 헌

- [1] Chen, D. and Seborg, D.E. "Multiloop PI/PID controller design based on Gershgorin bands" Control Theory and Applications, IEE Proceedings, V.149, Issue: 1, Jan. 2002 Pages:68 - 73
- [2] 임태호, 서병설, "TITO 시스템의 최적 PI제어기 동조", Proceedings of The KIEE EMECS Spring Annual Conference, Tae-gu, Korea, April, pp.186-189, 2003.
- [3] Chang, M. and Davison, E.J. "Control of unknown MIMO systems using self-tuning PID controllers" American Control Conference, Proceedings of the 1995, v.1, pp.564-568
- [4] Wang, Shuangxin and Zhu, Hengjun "A new indirect self-tuning control algorithm for MIMO systems with varying time-delays" TENCON '02 Proceedings, 2002 IEEE Region 10 Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering, 2002, v3 pp.1487-1490
- [5] S.E.Hamamci and M.Koksai "Robust Controller Design for TITO Process with Coefficient Diagram Method" Control Applications, 2003. CCA 2003. Proceedings of 2003 IEEE Conference on Vol.1,23-25 June 2003 Page(s):1431-1436
- [6] Jian-Bo He, Qing-Guo Wang and Tong-Heng Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach", Chemical Engineering Science, Vol.55, No. 13, pp. 2429,2439,2000.
- [7] 이동영, 윤성오, 임동관, 서병설, "LQ-Servo를 이용한 강인한 PI제어기 설계", Proceedings of the 11th KACC, Po-Hang, Korea, October, pp. 577-580, 1996.
- [8] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal filters", IEEE Trans on Automat. Contr., Vol. AC-17, No. 1, pp. 79-86, 1972.
- [9] 박택선, 서병설, "시간지연을 갖는 2차 시스템의 LQ-PID 제어기 동조", 전자공학회 논문지 제41권 제 2호 pp.63-70, 2004. 03
- [10] M. Athans, "Lecture Note on Multivariable Control System", MIT. Ref. No.860224/6234. 1986.
- [11] T. Kiong, W. Guo and H. Chieh, "Advances in PID Control," Springer, 1999.
- [12] Marshall, J.E., "Control of time-delay systems." London: Peter Peregrinus LTD. 1979