센서 잡음 저감도 및 안정-강인성을 고려한 PID-PD 제어기의 최적 동조

Optimum Tuning of PID-PD Controller considering Robust Stability and Sensor Noise Insensitivity

김 창 현*, 임 동 균**, 서 병 설***
(Chang-Hyun Kim, Dong-Kyun Lim and Byung-Suhl Suh)

Abstract - In this paper, we propose tuning method of PID-PD controller to satisfy design specifications in frequency domain as well as time domain. The proposed tuning method of PID-PD controller that consist of the convex set of PID and PI-PD controller controls the closed-loop response to locate between the step responses, and Bode magnitudes of closed-loop transfer functions controlled by PID and PI-PD controller. The controller is designed by the optimum tuning method to minimize the proposed specific cost function subject to sensor noise insensitivity and robust stability. Its effectiveness is examined by the case study and analysis.

Key Words : robust stability, convex set, noise insensitivity, PID-PD, ISE

1. 서 론

제어기의 설계에 있어서 시간 영역의 출력 성능과 함께 명령추종, 외란 제거 및 잡음 저감도와 같은 주파수 영역의 성능들은 필수적으로 고려되어야 한다. 또한 모델링 오차를 고려하지 않은 수학적 모델에 대한 설계 이론으로는 실제 적용에서 종종 만족스러운 성능을 얻지 못하거나 시스템 자체가 불안정해지는 경우도 발생하게 되기 때문에 안정도-강인성 문제 역시 중요하게 다뤄져야한다.

이런 면에서 적분항을 갖는 시스템과 개루프 불안정 시스템에서 PID제어기의 구조적인 한계점을 극복하기 위해 Kwak [1], Atherton 과 Majhi[2], Park[3]이 제안한 변형된 PID 형태인 PI-PD, PID-P 제어기 등은 시간 영역의 관점에서만 설계 및 분석되었기 때문에 주파수 영역의 설계 사양을 만족하지 못할 수 있는 문제가 있었다. 그래서 본 논문에서는 PID제어기와 PI-PD제어기를 경계로 볼록형 집합(convex set)을 형성하도록 PID-PD제어기를 선정하면 시간 영역의 응답이 항상 경계치 내에 위치하고 폐루프 전달함수의 이득이 두 경계의 최대치를 넘지 못하는 특성을 이용하여 시간영역의 설계 사양과 주파수 영역의 설계 사양을 동시에 만족하는 PID-PD 제어기의 동조 방법을 제안한다. 볼록형 집합의 경계가 되는 시스템선정 시 루프형성기법(loop shaping method)을 이용하여 모델링 오차 범위 내에서 안정하고 센서 잡음 장벽을 만나지 않는 루프 형상이 되도록 하는 주파수 영역의 구속 조건 하에서 시간영역의 오차 기준인 ISE(Integral Squared Error)를 가격함수로 하여 최적 동조 하는 방법을 통해 주파수영역과 시간영역의 설계사양을 동시에 만족하도록 제어기를 설계 할 수 있다.

또한 전달함수가 볼록형 집합을 형성할 때의 응답 특성을 제어기 설계에 이용하고자 처음 제안한 Boyd[4]는 시스템에 따라 제어기의 형태와 차수가 변하는 구조적인 한계점이 있었으나 경계가 되는 시스템이 PID 제어기와 변형된 PID 제어기로 구성되도록 본 논문에서 제안하여 극복하였고 이를 통해 제어기의 적용에 있어서 용이함을 갖게 되었다.

이후에 구체적인 제어기 설정과 설계 절차를 기술하고 사례 연구를 통해 그 결과를 검토하겠다.

2. 변형된 PID 제어기 설계

2.1 변형된 PID제어기의 구조와 설계

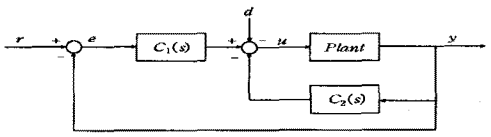

그림 1. 변형된 PID 제어기 구조

그림 1에서 변형된 PID 제어기의 구조를 나타내었고 본 논문에서 논의될 제어기의 형태는 다음과 같다.

$$C_1(s) = K_p^*(1 + \frac{1}{T_i^* s} + T_d^* s) \quad (1)$$

$$C_1(s) = K_{p1}^*(1 + \frac{1}{T_{i1}^* s}) \text{ and } C_2(s) = K_{p2}^*(1 + T_{d2}^* s) \quad (2)$$

저자 소개
* 學 生 會 員 : 漢陽大學 電氣工學科 碩士課程
** 正 會 員 : 漢陽Cyber大學 Computer學科 敎授
*** 正 會 員 : 漢陽大學 電氣制御生體工學部 敎授(交信著者)

$$C_1(s) = K_{p1}(1 + \frac{1}{T_{i1}s} + T_{d1}s) \text{ and } C_2(s) = K_{p2}(1 + T_{d2}s) \quad (3)$$

식 (1)에서와 같이 $C_2(s)$가 없는 제어기는 일반적인 PID 제어기의 형태이고 식 (2)와 (3)은 PID제어기의 변형된 형태로 각각 PI-PD, PID-PD 제어기이다. 본 논문에서 고려하는 제어기는 PID-PD 제어기이고 이 제어기와 PID, PI-PD 제어기의 관계가 볼록형 집합을 이루도록 각 설계 변수를 구성하여 동조하는 방법을 새롭게 제안한다.

Majhi 와 Atherton[5], Kaya[6] 가 보인 PI-PD 제어기와 PID 제어기의 구조적인 상관관계를 나타내는 블록선도는 그림 2와 같다.

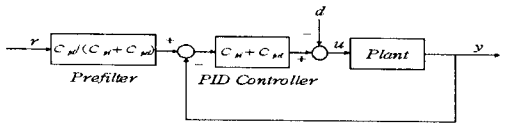

그림 2. 변형된 PID 제어기 구조

각 블록은 식 (2)로부터 식 (4)와 (5)로 표현되고 그림 2의 PID 제어기는 PI 제어기와 PD 제어기의 합이므로 식 (6)과 같고 여기에 일반적인 PID 제어기인 식 (1)을 적용하면 식 (7)으로 다시 표현될 수 있다.

$$C_{pi}(s) = K_{p1}^*(1 + \frac{1}{T_{i1}^* s}) \quad (4) \qquad C_{pd}(s) = K_{p2}^*(1 + T_{d2}^* s) \quad (5)$$

$$C_{pid}(s) = C_{pi}(s) + C_{pd}(s) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_{pid}(s) &= K_p^*(1 + \frac{1}{T_i^* s} + T_d^* s) \\ &= (K_{p1}^* + K_{p2}^*)\left(1 + \frac{K_{p1}^*}{(K_{p1}^* + K_{p2}^*)T_{i1}^* s} + \frac{K_{p2}^*}{(K_{p1}^* + K_{p2}^*)} T_{d2}^* s\right) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)로부터 PID 제어기와 PI-PD 제어기의 각 파라미터 간의 관계는 식 (8), (9)와 (10)으로 유도 되고 *Prefilter*는 식 (11)이 된다.

$$K_p^* = K_{p1}^* + K_{p2}^* \quad (8) \qquad T_i^* = \frac{(K_{p1}^* + K_{p2}^*)T_{i1}^*}{K_{p1}^*} \quad (9)$$

$$T_d^* = \frac{K_{p2}^* T_{d2}^*}{(K_{p1}^* + K_{p2}^*)} \quad (10)$$

$$C_{filter}(s) = \frac{C_{pi}}{C_{pi} + C_{pd}} = \frac{K_{p1}^*(T_{i1}^* s + 1)}{T_{i1}^* K_{p2}^* T_{d2}^* s^2 + T_{i1}^*(K_{p1}^* + K_{p2}^*)s + K_{p1}^*} \quad (11)$$

Kaya[6]는 Åström와 Hägglund[7]에 의해 간편한 PID 제어기 동조를 위해 사용된 $T_i^* = \alpha T_d^*$의 개념을 이용해 $K_{p1}^* = \beta K_{p2}^*$를 적용함으로 PID 제어기의 3개의 설계 변수로부터 PI-PD 제어기의 설계 변수를 얻는 간편한 설계방법을 제시하였고 이 PI-PD 제어기의 설계 변수는 식 (12), (13)과 같다.

$$C_{pi}(s) = \frac{\beta}{1+\beta} K_p^*(1 + \frac{1+\beta}{\beta T_i^* s}) \quad (12)$$

$$C_{pd}(s) = \frac{1}{1+\beta} K_p^*(1 + (1+\beta) T_d^* s) \quad (13)$$

Kaya는 동조 방법으로 두 제어기 간의 상관관계를 이용해 PID 계수 값은 기존의 동조방법에 의해 얻어진 값을 그대로 사용하고 $\beta = 0.2$로 선정하는 방법을 제안하여 전형적인 PID 제어보다 시간영역 성능에서 우수함을 보였지만[6] 본 논문에서 β값은 고주파 성능의 경계치를 이루도록 선정하였다.

2.2 볼록형 집합을 이루는 PID-PD 제어기의 구조

본 논문에서 고려하는 PID-PD 제어 시스템은 그림 1에 식 (3)을 적용한 제어기로 $C_1(s)$과 $C_2(s)$는 식 (14)와 (15)로 표기하겠다.

$$PID-PD : C_1(s) = C_{PID}(s) = K_{p1}(1 + \frac{1}{T_{i1}s} + T_{d1}s) \quad (14)$$

$$C_2(s) = C_{PD}(s) = K_{p2}(1 + T_{d2}s) \quad (15)$$

PID, PI-PD, PID-PD 제어 시스템의 폐루프 전달 함수는 각각 식 (16), (17), (18)이다. 여기서 플랜트는 $G(s)$이다.

$$PID : \quad G_{pid} = \frac{C_{pid}(s)G(s)}{1 + C_{pid}(s)G(s)} \quad (16)$$

$$PI-PD : \quad G_{pipd} = \frac{C_{pi}(s)G(s)}{1 + (C_{pi}(s) + C_{pd}(s))G(s)} \quad (17)$$

$$PID-PD : \quad G_{pidpd} = \frac{C_{PID}(s)G(s)}{1 + (C_{PID}(s) + C_{PD}(s))G(s)} \quad (18)$$

볼록형 집합 C은 그 정의에 의해 다음과 같다.

i) $C \subseteq R^n$인 집합 C에서 $x_1, x_2 \in C$ 와 $0 \le \lambda \le 1$일때, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$이다.

ii) $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$은 두 점 x_1, x_2의 사이에 위치한다.

이는 시스템의 시간영역 응답에서도 동일하게 적용되어 $0 \le \lambda \le 1$를 만족하는 식 (19)의 시스템 $G_\lambda(s)$의 단위 계단 응답은 우변의 두 시스템 $G(s)$과 $\tilde{G}(s)$이 이루는 각 응답을 경계로 하여 그 사이의 응답을 보인다.

$$G_\lambda(s) = \lambda G(s) + (1-\lambda)\tilde{G}(s) \quad (19)$$

또한 폐루프 전달 함수의 주파수 응답의 이득은 두 시스템의 이득이 일정 범위의 차이를 넘는 고주파 영역에서 경계 이득의 사이 값을 갖는 특성이 있다.

이 특성은 Boyd, Barratt, 그리고 Norman[4]에 의해 증명되어 제어기 설계에 응용되어 왔다. 하지만 이 제어기는 볼록형 집합을 이루는 두 시스템 $G(s)$과 $\tilde{G}(s)$에 의존적이기 때문에 제어기의 차수와 형태가 일정하지 못하다는 문제점이 있다. 그래서 본 논문에서는 이런 문제점을 개선하기 위해 현재 가장 널리 이용되는 PID 제어기에 위의 개념을 적용하여 변형된 PID제어기를 제안한다. PID 제어 시스템과 PI-PD 제어 시스템이 이루는 볼록형 집합을 PID-PD 제어 시스템으로 나타낼 수 있음을 다음의 과정에서 구체적으로 증명하겠다.

일반적인 PID 제어 시스템과 PI-PD 제어 시스템이 이루는 convex 집합은 식 (16)과 (17) 로부터 다음 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda \frac{C_{pi}(s)G(s)}{1 + (C_{pi}(s) + C_{pd}(s))G(s)} + (1-\lambda)\frac{C_{pid}(s)G(s)}{1 + C_{pid}(s)G(s)} \in C \quad (20)$$

식 (6) $C_{pid}(s) = C_{pi}(s) + C_{pd}(s)$을 적용하면 위 식은 식 (21)로 재정리 할 수 있다.

$$(\lambda C_{pi}(s) + (1-\lambda)C_{pid}(s))\left(\frac{G(s)}{1 + (C_{pi}(s) + C_{pd}(s))G(s)}\right) \quad (21)$$

여기서 $C_{pid}(s)$를 $C_{pi}(s) + C_{pd}(s)$로 보면 식 (22)가 된다.

$$\frac{(C_{pi}(s)+C_{pd}(s)-\lambda C_{pd}(s))G(s)}{1+(C_{pi}(s)+C_{pd}(s))G(s)} \tag{22}$$

식 (22)는 PID-PD 제어 시스템의 폐루프 전달함수인 식 (18)과 동일한 구조이다. 즉 PID-PD제어기를 식 (23), (24)과 같이 설정하면 이 제어 시스템은 PID 제어 시스템과 PI-PD 제어 시스템의 볼록형 집합을 이룬다.

$$C_{PID}(s) = C_{pi}(s) + C_{pd}(s) - \lambda C_{pd}(s) \tag{23}$$

$$C_{PID}(s) + C_{PD}(s) = C_{pi}(s) + C_{pd}(s) \tag{24}$$

위의 PID-PD 제어기의 각 파라미터는 식 (23)과 (24)에 식 (12), (13)을 대입하여 다음 식 (25), (26)과 같이 얻어진다.

$$C_{PID}(s) = \frac{K_p^* + \beta K_p^* - \lambda K_p^*}{1+\beta}\left(1 + \frac{(1+\beta)(K_p^* T_d^* - \lambda K_p^* T_d^*)s}{K_p^* + \beta K_p^* - \lambda K_p^*} + \frac{1+\beta}{(1+\beta-\lambda)T_i^* s}\right) \tag{25}$$

$$C_{PD}(s) = \frac{K_p^* \lambda}{1+\beta}(1+(1+\beta)T_d^* s) \tag{26}$$

2.3 PID-PD 제어기 동조 방법

본 논문에서는 제어된 시스템의 고주파 성능이 원하는 설계 사양의 범위 내에 들어오도록 볼록형 함수의 경계를 이루는 PID, PI-PD 제어기를 선정하고, 모델링오차에 강인한 안정도를 보이도록 하는 구속조건 하에서 가격함수를 최소화하도록 PID-PD 제어기의 설계 파라미터 λ값을 최적 동조하는 방법을 제안한다.

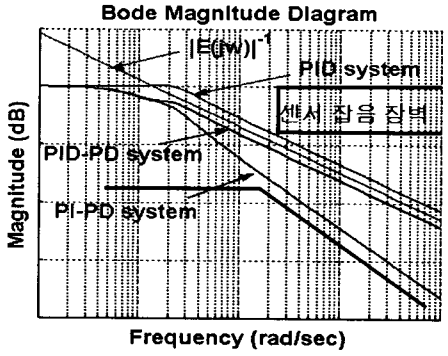

그림 3. PID-PD제어 시스템의 폐루프 전달함수의 전형적인 루프형상

그림 3는 센서잡음에 대한 저감도 성능을 만족시키기 위한 고주파역에서의 전형적인 루프형상을 나타내고 있다.[3] 센서 잡음은 일반적으로 고주파 대역에서 에너지를 갖기 때문에 센서 잡음 장벽을 만나지 않도록 PID 제어기와 PI-PD 제어기를 경계로 설정하면 볼록형 집합을 이루는 제어기의 특성상 PID-PD시스템은 센서 잡음에 대한 저감도 성능을 만족한다.[3]

센서 잡음에 대한 저감도에 대한 상한 장벽을 $B_n(w)$라고 하한 장벽을 $C_n(w)$하면 센서잡음에 대한 장벽이 $w_c << w$의 고주파역이 주 관심 영역이기 때문에 볼록형 집합을 이루는 $G_{pidpd}(jw)$이 경계 조건 하에서 식 (27), (28)을 만족하도록 선정한다.

$$|G_{pidpd}(jw)| < B_n(w) \qquad w_c << w \tag{27}$$

$$C_n(w) < |G_{pidpd}(jw)| \qquad w \geq 0 \tag{28}$$

그리고 안정-강인성을 고려하기위한 모델링 오차를 식 (29)와 같이 정의한다.

$$G_A(s) = G(s)(1+E(s)) \tag{29}$$

여기서 $G_A(s), G(s)$ 그리고 $E(s)$는 각각 실제 플랜트, 공칭 모델 그리고 곱셈형 모델링 오차이다. 전체 폐루프 시스템이 안정하기 위한 안정-강인성 판별식은 식 (30)이고 이는 위상 오차와 상관없이 안정성을 보장하는 충분조건식이다.

$$|G_{pidpd}(jw)| < |E(jw)^{-1}| \qquad w \geq 0 \tag{30}$$

모델링 오차의 상계값을 식 (31)와 같이 센서 잡음 장벽 $B_n(iw)$을 포함하여 설정하면 구속조건식은 식 (32)이 된다.

$$min\{|B_n(jw)|, |E(jw)|^{-1}\} < E_{\max}^{-1}(w) \qquad w \geq 0 \tag{31}$$

$$C_n(w) < |G_{pidpd}(jw)| < E_{\max}^{-1}(w) \qquad w \geq 0 \tag{32}$$

위의 식 (32)를 구속 조건으로 하여 가격함수를 최소화하는 최적해 λ를 선정하는 것이 본 논문에서 제안하는 동조 방법이고 이를 통해 안정-강인성 및 센서 잡음 저감도를 보장받을 수 있게 된다.

가격함수는 최적 동조 표준 중의 하나인 식 (33)의 ISE이다.

General Integral Squared Error criteria

$$J_i(\lambda) = \int_0^\infty t^i e^2(t)dt \tag{33}$$

ISE는 시간에 대해 가중치를 가지고 에러를 최소화 하도록 설계 변수를 동조 할 수 있게 한다. 본 논문에서는 일반적인 ISE 표준에서 시간에 대한 가중치를 위해 $i=1$로 한 ITSE를 가격함수로 선정하였다.[7] 시간에 대한 가중치를 높이고자 할 때 i를 조정하면 된다.

본 논문에서 제안하는 최적 동조 방법을 위한 가격 함수와 구속조건 및 경계 조건은 다음의 식 (34)이다.

$$\begin{aligned} &minimize \;\; J(\lambda) = \int_0^\infty te^2(t)dt \\ &subject\ to \;\; C_n(jw) < |G_{pidpd}(jw)| < E_{\max}^{-1}(w) \\ &bounded\ to \;\; 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \tag{34}$$

3. 시뮬레이션 및 결과 비교

사례연구는 Kaya[6], Wang[9], Visioli[10] 등에 의해 시간지연이 큰 적분 시스템에서 PID와 변형된 PID 제어기의 설계에서 시뮬레이션 상 서로의 우수성을 입증하기 위해 비교대상이 되어온 대표적인 시스템으로 식 (35)과 같은 시스템을 선정하였다.

$$G(s) = \frac{4}{4s-1}e^{-2s} \tag{38}$$

식 (34)의 구속 조건을 만족하도록 Wang이 제안한 동조법 중 damping factor를 1로 선정한 PID 제어기를 볼록형 집합의 경계치를 형성하는 제어기로 선정하였고 각각의 설계 변수는 $K_p^* = 2.0123, T_i^* = 31.2030$ 그리고 $T_d^* = 1.5674$이다. PI-PD제어기는 $\beta = 0.8$로 선정하여 구속조건을 만족시켰으며

제어기는 $K_{p1}^{*}=0.8944$, $T_{i1}^{*}=13.868$, $K_{p2}^{*}=1.1179$ 그리고 $T_{d2}^{*}=2.8213$ 이다. 두 제어기의 볼록형 집합을 이루는 PID-PD 제어기는 식 (25), (26)에 의해 다음의 식 (39),(40)과 같다.

$$C_{PID}(s)= \tag{39}$$
$$(2.0123-1.1179\lambda)\left(1+\frac{(2.8213-2.8213\lambda)s}{1.8-\lambda}+\frac{1.8}{(56.1654-31.2030\lambda)s}\right)$$

$$C_{PD}(s)=1.1179\lambda(1+2.8213s) \tag{40}$$

설계 변수 λ에 따른 가격함수의 변화를 그림 4(a)에 나타내었고 최적해는 $\lambda=0.595$이다. 센서 잡음 장벽 및 모델링 오차를 침범하지 않는 경계치는 그림 4(b)와 같고 볼록형 집합의 경계는 이를 만족한다. 그림 4(c)에서는 여러 동조법에 따른 단위 계단 응답을 비교하였다. 그림 4(d)는 센서 잡음을 고려하였을 때의 단위 계단 응답을 비교한 것으로 이때 시뮬레이션을 위한 센서 잡음으로 최대값 2, 최소값 -2인 랜덤 신호를 가하였다.

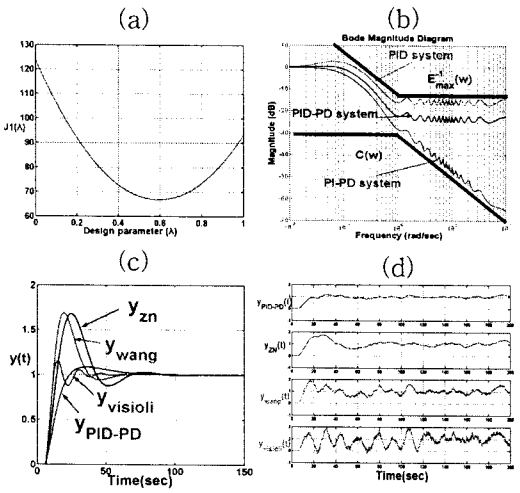

그림 4. (a) 설계 변수 λ에 따른 가격함수 값의 변화
(b) 센서잡음과 안정-강인성을 고려한 시스템 경계
(c) 스텝 응답의 비교
(d) 센서잡음 발생시 스텝 응답의 비교

제안된 동조방법의 결과와 다른 동조방법의 결과를 비교하기 위한 그림 4,(c)에서 y_{zn}, y_{wang}, 그리고 $y_{visioli}$는 각각 참고문헌[7],[9],[10]의 동조 방법이다. 본 논문에서 제안한 동조 방법은 다른 방법에 비해 오버슈트와 정착시간 면에서 우수하고 또한 센서 잡음을 고려했을 때 가장 우수한 저감도를 보임을 그림 4를 통해 알 수 있다.

3. 결 론

PID 제어는 시스템의 제어에 있어 성능의 우수성과 함께 설계의 간편성 때문에 아직까지 널리 이용되고 있다. 하지만 이 PID 제어만으로 충분한 성능을 발휘 할 수 없는 경우가 있어 이를 위해 내부 피드백이 있는 변형된 PID 제어가 제안되어 연구되어져 왔다. 본 논문에서는 이 변형된 PID 제어기의 한 형태인 PID-PD제어기를 PID 제어기와 PI-PD 제어기를 경계로 폐루프 전달함수의 볼록형 집합을 구성하도록 설정하여 볼록형 집합의 특성을 제어기 설계에 이용하는 동조법을 제안한다. 이때 집합의 경계를 구성하는 시스템을 센서 잡음 저감도와 모델링 오차 장벽을 침범하지 않는 구속조건을 만족하도록 선정하고 가격함수를 최소화 하는 설계 변수 값을 찾는 최적 동조 방법을 통해 센서 잡음 저감도와 안정-강인성을 만족할 뿐 아니라 시간영역의 성능까지 고려할 수 있다. 또한 볼록형 집합의 특성을 통해 설계 변수와 시간 영역, 주파수 영역의 관계를 예측하기가 용이하기 때문에 설계 사양의 변화에 간편하게 대처할 수 있는 설계상의 장점이 있다. 추가적인 연구 과제로 다변수인 경우에의 적용과 성능-안정도를 고려한 설계 등이 남아있다.

참 고 문 헌

[1] H. J. Kwak, S. W. Sung and I. B. Lee, "On-line process identification and autotuning for integrating processes," Ind. Eng. Chem. Res., Vol. 36, pp. 5329-5338, 1997.

[2] D. P. Atherton and S. Majhi, "Limitations of PID controllers," Proc. of the American Control Conf., Vol. 6, pp. 3843-3847, June 1999.

[3] J. H. Park, S. W. Sung and I. B. Lee, "An enhanced PID control strategy for unstable processes," Automatica, Vol. 34, no. 6, pp. 751-756, 1998.

[4] S. Boyd and C. Barratt, "Linear controller : limits of performance," Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1991.

[5] S. Majhi and D. P. Atherton, "Autotuning and controller design for processes with small time delays," IEE proc., Control Theory and Applications, Vol. 146, no. 5, pp. 415-425, 1999.

[6] I. Kaya, N. Tan and D. P. Atherton, "A simple procedure for improving performance of PID controllers," Control Applications, CCA 2003., Proc. of 2003 IEEE Conf., Vol. 2, pp. 882-885, 2003.

[7] K. J. Åström and T. Hägglund, "PID Controllers : Theory, Design, and Tuning," Instrument Society of America, 1995.

[8] M. Athans, Lecture Note on Multivariable Control System, M.I.T Ref. No.860224/6234, 1986.

[9] L. Wang and W. R. Cluett, "Tuning PID controllers for integrating processes," IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 144, no. 5, pp. 385-392, September 1998.

[10] A. Visioli, "Optimal tuning of PID controllers for integral and unstable processes," IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 148, no. 2, pp.180-184, March 2001.