LMI를 이용한 정적출력궤환 동시안정화 제어기 설계

Simultaneous stabilization via static ouput feedback using an LMI method

김 석 주*, 천 종 민*, 이 종 무*, 권 순 만**
Seog-Joo Kim, Jong-Min Cheon, Jong-Moo Lee, Soonman Kwon

Abstract - This paper deals with a linear matrix inequality (LMI) approach to the design of a static output feedback controller that simultaneously stabilizes a finite collection of linear time-invariant plants. Simultaneous stabilization by static ouput feedback is represented in terms of LMIs with a rank condition. An iterative penalty method is proposed to solve the rank-constrained LMI problem. Numerical experiments show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key Words :linear matrix inequality, simultaneous stabilization, static output feedback

1. 서 론

동시안정화 제어기 문제는 유한개의 선형 시불변 시스템을 모두 안정화시킬 수 있는 한 개의 고정된 이득을 가지는 제어기를 설계하는 것을 말한다. 이 문제는 강인제어, 다중모델 제어, 고장허용제어 등과 같은 여러 제어 응용 분야에서 많이 나오기 때문에 예로부터 많은 주목을 받아왔다.

많은 연구자들이 동시안정화 제어기 문제를 인수화(factorization)를 이용하여 해석적으로 풀기 위하여 노력하였지만 Blondel과 Tsitsiklis[1]가 이 문제가 NP-hard이기 때문에 다항시간으로 해를 구할 수 없다는 것을 증명하였다. 그 이후 보다 실용적인 수치적인 방법을 찾기 시작하였다.

최근 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality; LMI)이 활발히 연구되면서 동시최적화 문제를 수치적으로 풀기위한 몇 가지의 알고리즘이 제안되었다[2-5]. 하지만 [2]에서 제안한 반복 LMI법은 동일한 출력행렬을 가지는 선형 시불변 시스템에만 적용되고 [3]에서 제시한 방법은 단일 입출력 시스템에만 적용할 수 있다. 또한 [5]의 방법은 충분조건을 기반으로 하고 있기 때문에 보수적인 결과를 얻을 가능성이 있다.

본 논문에서는 아무 조건이 없는 다중입출력 선형 시불변 시스템을 동시에 안정화시키기 위한 방법을 제안하고자 한다. 먼저 주어진 문제를 계수조건(rank condition)이 있는 LMI로 나타내고 이를 반복법을 이용하여 푸는 방법을 제시하기로 한다. 본 논문에서 제안하고 있는 방법의 장점은 CCL 법[6]과 같이 간단하게 구현이 가능하면서 안정화하고자 하는 선형 시불변 시스템에 어떠한 제약도 없다는 것이다.

2. 동시최적화 문제

먼저 선형 시불변 시스템의 정적출력궤환 제어 설계에 대해서 생각해 보고 이를 동시안정화 제어기 설계에 이용하기로 한다. 이를 위해 먼저 다음과 같은 상태방정식으로 표시되는 플랜트에 대해서 생각해보자.

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad (1)$$
$$y=Cx+Du$$

여기서 $x\in\overrightarrow{R^n}$, $u\in\overrightarrow{R^m}$, $y\in\overrightarrow{R^p}$는 각각 시스템의 상태, 제어입력 및 출력 벡터이고 행렬 A,B,C,D는 주어지는 데이터 행렬이다. 이때 다음과 같은 정적출력궤환 제어기를 생각해 보기로 하자.

$$u=Ky \qquad (2)$$

시스템 (1)의 폐루프 시스템의 모든 극점을 복소평면에서 좌반면에 위치시킬 수 있는 정적출력궤환 제어기 (2)의 존재 여부는 다음의 보조정리로 알 수 있다.

[보조정리 1] 선형 시불변 시스템 (1)을 안정화시킬 수 있는 (2)의 제어기가 존재할 필요충분조건은 다음을 만족하는 행렬 $W\in\overrightarrow{S^{m+p}}$, $W\geq 0$과 $P\in\overrightarrow{S^n}$, $P>0$이 존재하는 것이고

$$\begin{bmatrix} PA+A'P & PB \\ B'P & 0 \end{bmatrix} < (\bigstar)'W\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\mathrm{rank}\,(W) = m \qquad (4)$$

이때 (3)과 (4)를 만족하는 행렬 W가 얻어지면 정적이득 K는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$K=-Z^{-1}Y' \qquad (5)$$

여기서

$$W=\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \qquad (6)$$

이다.

[증명] Lyapunov 안정도 이론에 의하면 시스템 (1)을 안정화시키는 정적출력궤환 제어기 $u=Ky$는 다음을 만족하는 양한정 행렬 $\mathcal{P}$가

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{P}A+A'\mathcal{P} & \mathcal{P}B \\ B'\mathcal{P} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} < 0 \qquad (7)$$

* 正 會 員 : 韓國電氣研究院 研究員
** 正 會 員 : 韓國電氣研究院 그룹장

다음을 만족하는 모든 x와 u에 대해서 성립해야 한다.

$$R[KC \quad KD-I]\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}=0 \tag{8}$$

여기서 $R\in \overrightarrow{R^{m\times m}}(|R|\neq 0)$은 임의의 행렬이다. Finsler의 정리에 의하면 (7)과 (8)은 다음과 같이 하나의 LMI로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}A+A'\mathcal{P} & \mathcal{P}B \\ B'\mathcal{P} & 0 \end{bmatrix} < \mu(\bigstar)'\begin{bmatrix} K'R'RK & -K'R'R \\ -R'RK & R'R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

여기서 $\mu>0$으로 하고

$$P=\frac{1}{\mu}\mathcal{P},\ X=K'ZK,\ Y=-K'Z,\ Z=R'R$$

로 놓으면 (3), (4) 및 (5)를 얻을 수 있다. □

보조정리 1에서 계수조건 (4)는 Lyapunov 행렬이 아닌 슬랙 행렬 W에 주어지기 때문에 동시안정화 제어기나 다목적 제어기 설계에 이용할 수 있다. 즉, 동시안정화 제어기 설계의 경우 제어하고자 하는 플랜트 별로 별도의 Lyapunov 함수를 사용할 수 있기 때문에 해의 보수성을 줄일 수 있을 것이다.

이제 다음과 같은 상태방정식으로 주어지는 동시최적화 문제를 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}&=A_ix+B_iu \\ y&=C_ix+D_iu,\ i=1,\cdots,N \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 각각의 (A_i, B_i, C_i, D_i), $i=1,\cdots,N$이 LTI 플랜트를 나타낸다. 보조정리 1을 이용하면 다음의 보조정리를 얻을 수 있다.

[보조정리 2] 유한개의 시스템을 가지는 (9)에 대해서 모든 N개의 플랜트를 동시에 안정화시킬 수 있는 제어기 $u=Ky$가 존재할 조건은 다음을 만족하는 행렬 $W\in\overrightarrow{S^{m+p}}$, $W\geq 0$과 $P_i\in\overrightarrow{S^n}$, $P_i>0$, $i=1,\cdots N$이 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} P_iA_i+A_i'P_i & P_iB_i \\ B_i'P_i & 0 \end{bmatrix} < (\bigstar)'W\begin{bmatrix} C_i & D_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\text{rank}\ (W)=m \tag{11}$$

[증명] 보조정리 1에서 $Z=R'R$은 임의의 양한정 행렬로 놓을 수 있고 하나의 제어기 $K=-Z^{-1}Y'$가 존재한다고 가정하면 N개의 시스템에 공통의 W가 존재한다는 것을 알 수 있다. □

보조정리 2에서 보면 선형 플랜트에는 아무런 제약조건이 없는 것을 알 수 있다. 출력행렬 C_i에도 제약이 없고 다중입출력 시스템이어도 관계가 없음을 알 수 있다. 이제 다음에 LMI (10)에 계수조건 (11)을 가지는 시스템을 반복법을 이용하는 푸는 방법을 서술한다.

3. 페널티 함수를 이용한 비볼록 LMI 문제의 해법

페널티 함수를 이용하여 계수조건이 있는 LMI 최적화 문제를 푸는 방법은 최근 제안되었으며[7] 다음과 같은 형태의 문제를 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} &\min && c^Tx \\ &\text{s.t} && x\in\Omega \\ &&& \text{rank}\ (W)=r \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 x는 구하고자 하는 변수이고 $W(x)$는 x에 관한 아핀(affine) 함수이며 Ω는 LMI로 표현되는 볼록집합이다.

페널티 함수법은 문제 (12)를 페널티 함수를 이용하여 계수조건이 없는 문제로 바꾸고 기존의 LMI 패키지를 이용하여 계수조건이 없는 문제의 해를 순차적으로 구함으로써 문제 (12)의 해를 얻는 방법이다. [7]에서 제안한 페널티 법은 (12)의 계수조건이 행렬 W의 $n-r$개의 고유치가 영이 되면 만족된다는 사실에 착안하고 있다. 따라서 문제 (12)를 W의 $n-r$개의 고유치 합을 페널티 함수로 사용하여 페널티 함수값을 최소화시키는 문제로 변환한다. 자세한 사항은 참고문헌을 참조하기 바란다.

[알고리즘 1] 페널티 함수를 이용한 비볼록 LMI 문제의 해법 (Penalty Function Method : PFM)

(단계 1) 초기화. 페널티 변수 $\mu=0$으로 놓고 다음의 LMI 최적화 문제의 해를 구한 후

$$x_0=\min_x\{\text{tr}\ (W):x\in\Omega\}$$

$x_k=x_0$, $\mu_k=\mu_0$, $\alpha\in(0,1)$, $\tau>1$ 로 놓는다.

(단계 2) 행렬 V 계산. $X(x_k)$ 로부터 고유치 분해를 이용하여 V_k 행렬을 구한다.

(단계 3) 볼록 최적화 수행. 다음 LMI 최적화 문제를 풀어 x_{k+1}을 구한다.

$$x_{k+1}=\min_x\{\text{tr}\ (W)+\mu_kp(x;V_k):x\in\Omega\}$$

(단계 4) 가능해 여부 시험 (feasibility test). 만약 $p(x_{k+1};V_k)<\epsilon$이면 주어진 계수조건을 만족하는 해를 얻었으므로 프로그램을 종료한다.

(단계 5) 페널티 변수 갱신. 만약 x_{k+1} 이 가능해가 아니고 $p(x_{k+1};V_k)>\alpha p(x_k;V_{k-1})$ 이면 페널티 변수를 $\mu_{k+1}=\tau\mu_k$ 로 증가시킨다.

(단계 6) 다음 스텝 수행. $k=k+1$ 로 놓고 단계 2 로 간다.

4. 시뮬레이션

본 논문에서 제안하고 있는 알고리즘을 시험하기 위해서 두가지의 시뮬레이션을 수행하였다.

[예제 1] 이 예는 [4,5]에서 사용한 예로 변하는 매개변수를 가지는 시스템으로 다음과 같은 전달함수를 가진다.

$$G(s)=\frac{s+\sqrt{\theta}+1}{s^2+(\theta^2-10)s+3\theta+11},\ 3\leq\theta\leq 11$$

이때 세 개의 운전점 $\theta=7,3,11$을 하나의 정적출력궤환 제어기로 안정화시키고자 한다. 이때 시스템 행렬은

$$A_1=\begin{bmatrix} -39 & 1 \\ -32 & 0 \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} -111 & 1 \\ -44 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 3.646 \end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2.732 \end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 4.317 \end{bmatrix}$$

$$C_1=C_2=C_3=[1\ 0]$$

이 된다. 이 조건에 대해서 PFM은 두 번의 반복 횟수만에 $K=-2.0694$를 얻었다. 반면에 반복 LMI[2]는 29번만에 해를 얻었다. 이때 얻어진 W는 다음과 같다.

$$W=\begin{bmatrix} 71.768 & 33.695 \\ 33.695 & 15.82 \end{bmatrix}$$

다음으로 다른 출력행렬을 가진 시스템에 대해서 시험하기 위해서 다음과 같은 출력행렬을 임의로 선정하였다.

$$C_1=[1\ 2],\ C_2=[1\ 3],\ C_3=[1\ 1]$$

이때도 PFM은 반복 횟수 2번에 $K=-0.13559$를 얻었으며 W는

$$W=\begin{bmatrix} 2.0133 & 18.848 \\ 14.848 & 109.51 \end{bmatrix}$$

와 같다.

[예제 2] 다음은 F4E 전투기의 상태방정식을 나타낸다.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}u$$

구체적인 a_{ij}와 b_1에 대해서는 지면 관계상 문헌을 참조하기 바란다. PFM으로 4개의 플랜트에 대하여 13번의 반복횟수만에 다음과 같은 해를 얻었다.

$$K=[0.0044284\ \ 0.74474\ \ -0.034591]$$

$$W=\begin{bmatrix} 4.2635 & 54.144 & -30.598 & -67.038 \\ 54.144 & 687.6 & -388.57 & -851.35 \\ -30.598 & -388.57 & 219.59 & 481.11 \\ -67.038 & -851.35 & 481.11 & 1054.1 \end{bmatrix}$$

그림 1은 이때 PFM의 계산 특성을 나타내고 있다. 다음으로 다음과 같은 출력행렬을 가지는 시스템에 대해서 계산해 보자

$$C_i=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ i=1,\cdots,4$$

PFM을 7 스텝만에 다음의 해를 얻었으며 계산특성을 그림 2에 보였다.

$$K=[0.13286\ \ -0.10072]$$

$$W=\begin{bmatrix} 159.51 & -120.92 & -1200.5 \\ -120.92 & 91.67 & 910.09 \\ -1200.5 & 910.09 & 9035.4 \end{bmatrix}$$

5. 결론

본 논문에서는 정적출력궤환 동시안정화 제어기를 설계하는 방법에 대해서 다루었다. 동시안정화 문제를 계수조건이 있는 선형행렬부등식으로 나타내고 반복 페널티 함수법을 이용하여 해를 구하는 방법을 제안하였다. 제시된 방법으로 시뮬레이션을 수행할 결과 충분히 효용성이 입증되었다.

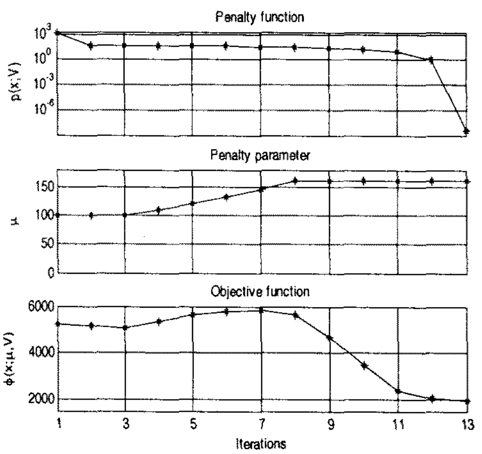

그림 1. 예제 2에 대한 PFM의 계산 특성 (상태궤환)

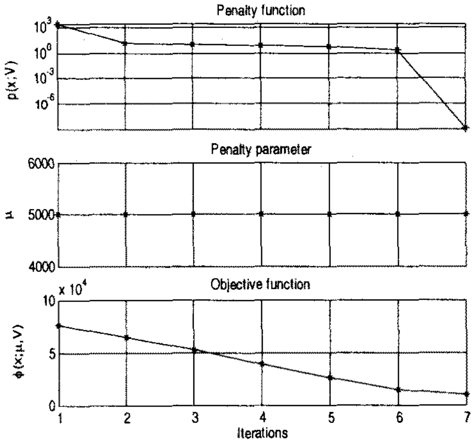

그림 2. 예제 2에 대한 PFM의 계산 특성 (출력궤환)

참 고 문 헌

[1] V. D. Blodel, J. N. Tsitsiklis, "A survey of compuational complexity results in systems and control", Automatica, Vol. 36, No. 9, pp.1249-1274, 2000.

[2] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, J. Lam, "Simultaneous stabilization via static output feedback and state feedback", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 44, No. 6, pp.1277-1282, 1999.

[3] D. Henrion, s. Tarbouriech, M. Sebek, "Rank-one LMI approach to simultaneous stabilization of linear systems", Systems & Control Letters, Vol. 38, pp.79-89, 1999.

[4] M. A. Rotea, D. E. Viassolo, "On a sufficient condition for static output feedback multimodel control", Proc. Amer. Control Conf., pp.3149-3152, 2001.

[5] S. Wang, J. H. Chow, "Regional pole placement via low-order controllers with extensions to simultaneous stabilization", Proc. Amer. Control Conf., pp.1663-1668, 2001.

[6] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 42, No. 8, 1171-1176, 1997.

[7] S. J. Kim, Y. H. Moon, S. Kwon, K. H. Kim, "Rank-constrained LMI approach to mixed H_2/H_∞ static ouptut feedback controllers", Preprints of the 16th IFAC World congress, 2005.