

자동보정 기능을 가진 Quadrature 수신기의 BER 해석

BER Analysis of a Quadrature Receiver with an Autocalibration Function

권순만, 이종무, 천종민, 박민국, 김종문

Soonman Kwon, Jongmoo Lee, Jong Min Cheon, Minkook Park, Jong Moon Kim

Abstract - In this paper the BER consideration of a quadrature receiver that has an autocalibration method is considered. The analysis is based on the derivation of the statistical characteristics of the imbalances in gain and phase between in-phase and quadrature components that may cause severe performance degradation of the receiver. The density, mean and variance functions of the estimates of gain and phase imbalances are discussed. Then it is shown that the estimates are asymptotically minimum variance unbiased with respect to the integration time in sampling. A brief consideration on the BER calculation follows.

Key Words : quadrature receiver, autocalibration, imbalance, minimum variance unbiased

1. 서론

Quadrature 수신기는 디지털 무선 통신에서의 신호 수신단에 많이 사용되는 수신기 구조의 하나이다. 이 수신기에서는 복조를 통해 동상 및 quadrature 성분의 두 가지 신호를 분리해 내며 결국 이 값은 각각 복소수의 실수와 허수값이 되어 복소평면상의 어떤 점의 좌표를 결정하게 된다. 이 좌표가 속하는 복소평면상의 상한은 결국 상용하는 2-digit의 디지털 값으로 변환되어 수신된 디지털 신호 정보를 결정하게 된다. 그런데 이 수신기에서의 신호분리시에 기본적인 바탕이 되는 성질은 두 가지 성분, 즉 동상과 quadrature 성분은 정확히 이득이 같고 위상은 90°차이가 난다는 것이다. 이러한 경우에서의 신호추정에 대해서는 이미 오랫동안 연구되어 많은 신호처리 기법들이 보고 되었고 이미 실제 활용되고 있다. 그러나 실제 구현되는 quadrature 수신기에는 항상 두 성분 사이에 이득과 위상에서 불평형이 존재하게 되며 이러한 경우에는 일반적인 신호처리 기법으로는 좋은 성능을 기대할 수가 없다.

Quadrature 수신기에서의 두 성분간의 불평형에 대한 보정 문제는 오래 전부터 연구의 대상이 되어 왔다[1],[2],[3]. 그러나 대부분의 연구에서 제안된 보정기법은 기본적으로 미리 정해진 테스트 신호를 이용하여 off-line으로 수행하는 방법들이어서 on-line 보정이 불가능하다. 그렇지만 문헌 [4]에 제안된 기법은 자동보정이 가능하게 되어 있어 대단히 편리

하다. 이 기법에서는 직각변조기의 두 성분간의 상대적인 차를 추정하여 보정을 행한다. 그러나 그 실질적인 성능을 평가하기 위해서는 통계적인 해석이 절대적으로 필요하다. 따라서 본 논문에서는 이 자동보정 기법에 있어서 이득과 위상 편차 추정시의 추정값의 통계적인 특성을 분석하며 최종적으로 필요한 BER 해석 방법에 대해 고찰해 보기로 한다.

2. 본론

2.1 수신기 모델

일반적인 Quadrature 수신기 모델은 다음 그림1과 같다. 그림에서 두 출력 $x(t)$ 와 $y(t)$ 는 각각

$$x(t) = A \cos(\omega_c t + \phi) + n_x(t) \quad (1)$$

$$y(t) = A(1 + \epsilon) \sin(\omega_c t + \phi + \theta) + n_y(t) \quad (2)$$

로 주어진다. 이 때 ϵ 와 θ 는 각각 이득과 위상에서의 상대적인 불평형율이다. 또한 각주파수 $\omega_c = \omega_c - \omega_o$ 이며 수신기에서 포함되는 잡음인 $n_x(t)$ 와 $n_y(t)$ 는 white Gaussian으로서 σ^2 의 분산을 가진다고 가정한다.

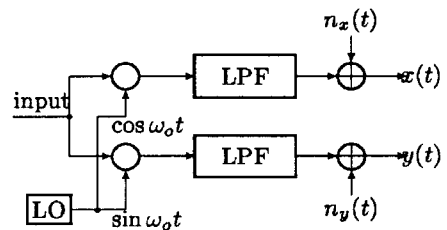


그림 1. Quadrature 수신기 모델

저자 소개

*한국전기연구원 계측제어연구그룹

2.2 추정 알고리즘

불평형 편차에 대한 추정 방법은 다음 그림 2와 같이 표시된다. 최종 출력인 $\hat{\epsilon}$ 과 $\hat{\theta}$ 은 추정된 이득과 위상의 불평형율을 나타내며 시간 kT (T 는 샘플링 주기)에서 샘플링된 두 복소수 random 변수들인 X_k 와 Y_k 는 각각 다음의 분포함수를 갖는다.

$$X_k \sim CN\left(\frac{A}{2} e^{j\theta}, \frac{\sigma^2}{T}\right) \quad (3)$$

$$Y_k \sim CN\left(\frac{(1+\epsilon)A}{2} e^{j(\theta+\phi)}, \frac{\sigma^2}{T}\right). \quad (4)$$

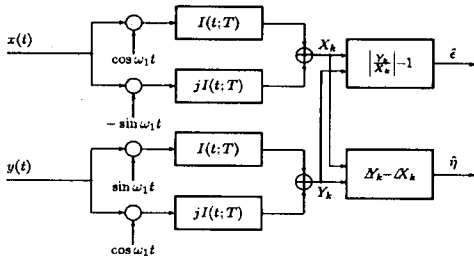


그림 2. 자동조정을 위한 추정 알고리즘

2.3 추정 파라미터의 통계적인 특성

한 쌍의 샘플을 편의상 X 와 Y 라고 하자. 그러면 두 복소수 random 변수인 X 와 Y 는 각각 다음과 같이 구 좌표계를 이용하여 표시할 수 있다.

$$X = X_r + jX_i = R_x e^{j\theta_x} \quad (5)$$

$$Y = Y_r + jY_i = R_y e^{j\theta_y} \quad (6)$$

따라서 이 경우 $\hat{\epsilon}$ 과 $\hat{\theta}$ 는 각각

$$\hat{\epsilon} = \frac{R_y}{R_x} - 1, \quad \hat{\theta} = \theta_y - \theta_x \quad (7)$$

로 표시할 수 있다. 먼저 R_x 및 R_y 는 각각

$$R_x \sim \left(\frac{A}{2}, \frac{\sigma^2}{2T}\right), \quad R_y \sim \left(\frac{(1+\epsilon)A}{2}, \frac{\sigma^2}{2T}\right) \quad (8)$$

이기 때문에 $\hat{\epsilon}$ 의 확률밀도함수는

$$f_{\hat{\epsilon}}(\hat{\epsilon}) = \frac{2 \exp\left\{-\frac{A^2 T}{4\sigma^2} (1+(1+\epsilon)^2)\right\} \hat{\epsilon}}{((\hat{\epsilon}-1)^2+1)^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A^2 T}{4\sigma^2(1+\hat{\epsilon}^2)}\right)^i (1+i)! \sum_{j=0}^i \frac{(1+\hat{\epsilon})^j \hat{\epsilon}^j}{2^j (j-i)!} \quad (9)$$

로 주어진다. 이것을 $A=1, \epsilon=0.1, \sigma^2=1$ 인 경우에 대하여 여러 가지 T 값($10^{-5}, 5, 10$ 초)에 대하여 그려보면 다음 그림 3과 같이 표시된다.

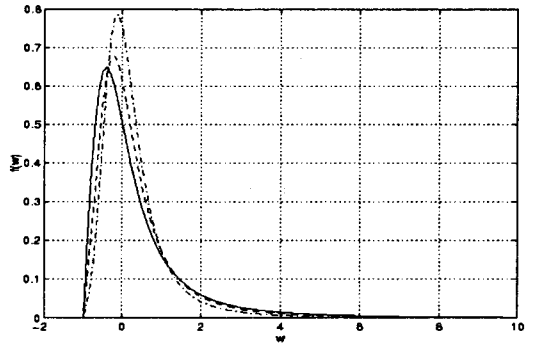


그림 3. 이득 불평형 추정값의 확률밀도함수

이 추정 파라미터의 통계적인 특성은 평균값과 분산을 조사함으로써 알 수 있는데 그 함수들은 다음과 같다.

먼저 $\hat{\epsilon}$ 의 평균 함수는

$$E(\hat{\epsilon}) = \alpha \epsilon, T \left(1 + \frac{(1+\epsilon)^2 A^2 T}{4\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{(1+\epsilon)^2 A^2 T}{8\sigma^2}\right) + \alpha \epsilon, T \frac{(1+\epsilon)^2 A^2 T}{4\sigma^2} I_1\left(\frac{(1+\epsilon)^2 A^2 T}{8\sigma^2}\right) - 1 \quad (10)$$

로 주어지는데 이 때

$$\alpha \epsilon, T = \frac{\pi}{2} \exp\left\{-\frac{A^2 T}{8\sigma^2} (1+(1+\epsilon)^2)\right\} I_0\left(\frac{A^2 T}{8\sigma^2}\right)$$

이다.

다음 그림 4는 T 와 함께 SNR의 변화에 따른 평균값의 변화를 나타내었는데 그림에서 알 수 있는 바와 같이 T 가 커짐에 따라 평균값은 참값에 가까워짐을 알 수 있다. 이것은 다음과 같은 해석적인 방법으로도 증명 가능하다. 즉, 식 (10)에서 T 가 증가함에 따라

$$\text{첫번째항} \approx \frac{8\sigma^2}{4(1+\epsilon)A^2 T} + \frac{1+\epsilon}{2}$$

$$\text{두 번째항} \approx \frac{1+\epsilon}{2}$$

으로 된다. 또한 $\hat{\theta}$ 의 분산에 관한 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \left[\frac{\sigma^2}{T} + \frac{(1+\epsilon)^2 A^2}{4}\right] \cdot \int_0^{\infty} \frac{2T}{\sigma^2 x} \exp\left\{-\frac{T}{\sigma^2} \left(x^2 + \frac{A^2}{4}\right)\right\} \cdot I_0\left(\frac{TAx}{\sigma^2}\right) dx - [E(\hat{\theta})]^2 \quad (11)$$

이 이득 불평형 추정값의 분산은 T 가 커짐에 따라 영으로 가까워지는 특성을 나타낸다. 이것은 T 가 커짐에 따라 신호크기에 비해 잡음의 비가 줄어들거나 평균화됨에 따른 효과로 판단된다. 따라서 이득 불평형 추정파라미터의 평균값과 분산을 T 의 값의 변화에 대하여 분석해 보면 이 추정값은 점근적인 최소분산 비편향 추정(asymptotically minimum-variance unbiased estimate) 특성을 나타낸다고 말할 수 있다.

2.4 위상 불평형 추정 파라미터 $\hat{\phi}$

위상 불평형 추정 파라미터의 확률밀도함수를 구하는 것은 앞의 경우보다 더 복잡한데 결국 다음 식으로 주어진다.

$$f_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-\frac{A^2 T}{4\sigma^2}}}{2\pi} + \frac{A\sqrt{T}\cos\alpha}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{A^2 T}{4\sigma^2 \sin^2\alpha}} \mathcal{Q}\left(\frac{A\sqrt{T}}{\alpha\sqrt{2}} \cos\alpha\right) \right] \left[\frac{e^{-\frac{A^2(1+\epsilon)^2 T}{4\sigma^2}}}{2\pi} + \mathcal{Q}(\beta T) \mathcal{Q}\left(\frac{A(1+\epsilon)\sqrt{T}}{\alpha\sqrt{2}} \cos\beta\right) \right] d\theta_x \quad (12)$$

식(11)에서 $\alpha = \theta_x - \psi$, $\beta = \hat{\phi} + \theta_x - \psi - \phi$,

$$\mathcal{Q}(\beta T) = \frac{A(1+\epsilon)\sqrt{T}\cos\beta}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{A^2(1+\epsilon)^2 T}{4\sigma^2} \sin^2\beta} \quad (13)$$

이다.

그림 4는 (12)의 식을 $T = [10^{-5}, 1, 5]$ 의 세 가지 경우에 대해 나타내고 있는데 T 값이 커질수록 더 뾰족한 모양으로 나타난다. 평균값은 그림에서 알 수 있는 바와 같이 확률밀도함수가 참값을 기준으로 대칭이므로 T 가 어느 정도 큰 값이 되면 참값으로 접근하게 될을 알 수 있다.

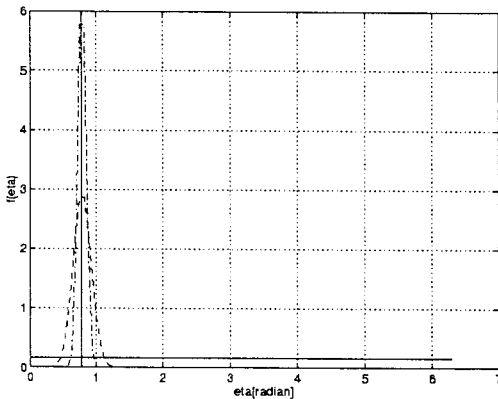


그림 4. 위상 불평형 추정값의 밀도함수

2.5 $\hat{\phi}$ 의 특성

$\hat{\phi}$ 의 통계적인 특성을 조사해 보면 앞에서 검토한 이득 불평형 추정 파라미터의 경우와 같이 위상 불평형 추정 파라미터도 T 의 값의 증가에 따라 점근적으로 최소분산 비편향(unbiased) 추정 특성을 나타냄을 알 수 있다.

2.6 BER 고찰

기본적으로 신호전송 BER은 다음 그림 5에서 검게 칠해진 부분에 대하여 이득과 위상의 조인트(joint) 확률밀도함수를 적분한 값을 1로부터 빼면 구해진다. 그러나 확률밀도함수의 2차원 적분에서 이득 방향의 적분은 영으로부터 무한대까지를 포함하므로 의미가 없다. 따라서 이 경우에 있어서의 BER 계산은 위상 불평형 추정값의 확률밀도함수인 (12)을

$$-\frac{\pi}{4} \leq \phi - \hat{\phi} \leq \frac{\pi}{4} \quad (14)$$

의 영역에 대하여 적분하면 되므로 보다 쉽게 계산할 수 있다.

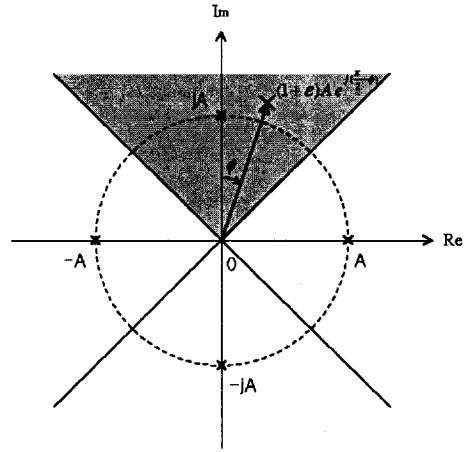


그림 5. BER 해석을 위한 복소수 영역

3. 결론

무선 통신에서 많이 사용되고 있는 Quadrature 수신기에서의 불평형을 자동조정하기 위한 추정 알고리즘의 BER 특성 해석을 위하여 먼저 추정값들의 통계적 특성을 분석하였다. 추정값들이 샘플링을 위한 적분 시간이 길어짐에 따라 점근적인 최소분산 비편향 추정 특성을 보여주고 있음을 알 수 있어 제시된 추정 알고리즘의 타당성이 입증하였다. 이 수신기에서의 BER은 도출된 위상 불평형 함수로부터 쉽게 계산될 수 있음을 알 수 있었다.

참고 문헌

- [1] A. Sinsky and P. Wang, "Error Analysis of a Quadrature Coherent Detector Processor," IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, pp. 880-883, November, 1974.
- [2] F.E. Churchill, G. Ogar, and B. Thompson, "The Correction of I and Q Errors in a Coherent Processor," IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 17, pp. 131-137, January, 1981.
- [3] R. A. Green, R. Anderson-Sprecher, and J. W. Pierre, "Quadrature Receiver Mismatch Calibration," IEEE Trans. on SP, vol.47, no.11, pp.3130-3133, November, 1999.
- [4] J. Pierre and D. Fuhrmann, "Considerations in the Autocalibration of Quadrature Receivers," ICASSP-95, vol. 3, pp. 1900-1903, May 1995.