

Spline을 이용한 비선형 시스템의 적응 관측기 설계

Spline-based Simplified Adaptive Observer Design for Nonlinear Systems

Julian Stoev*, 방대인**, 최진영***

(Julian Stoev, Dane Baang, and Jin Young Choi)

Abstract : In this paper, using B-splines as universal approximators, we have obtained a plant parametrization which permits the construction of an adaptive observer. The particular property of this parametrization is that the dynamic order of the filters in this design does not depend on the number of parameters in the plant parametrization. This appears to be a beneficial property especially because the number of such parameters tends to be very high for universal approximator based designs.

Keywords : Splines, B-splines, Adaptive observer, Universal approximators, K-filter

1. 서론

본 논문에서는 불확실성을 포함한 특정 형태의 비선형 시스템에 관한 적응 상태 관측 문제를 다루면서, spline을 이용하여 보다 간단한 형태의 관측기 구조를 얻어내는 방법을 제시한다. 이 때 기존의 범용 근사자들을 사용할 경우 시스템이 복잡해지고 파라미터 개수가 늘어남에 따라 관측기 필터의 차수도 늘어나는 것이 일반적이지만, spline을 사용하면 추정할 파라미터의 개수와는 독립적으로, 고정된 차수를 가지는 관측기 필터를 얻어낼 수 있는데 이는 다른 범용 근사자들과는 차별되는 좋은 특성이다.

2. spline의 정의와 특성

spline을 이용한 근사법은 [1]에서 잘 소개되고 있으며 여기서는 [1]에서 다루고 있는 정의와 특성 중 필요한 일부를 간단히 소개한다. 다수의 SISO 시스템은 비선형 항이 측정 가능한 입출력값에 의존하는 다음의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + F(y(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (1)$$

(정의 1): 1차 B-spline

비감소 시퀀스인 $Y = \{y_i, i = 1, \dots, m, y_i \leq y_{i+1}\}$ 에 대해 1차 B-spline은 다음과 같이 정의된다.

$$B_{i,1}(y) = X_i(y) := \begin{cases} 1, & y_i \leq y < y_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

(정의 2): 고차 B-spline

고차의 B-spline은 다음과 같이 저차 B-spline의 재귀형으로 표현된다.

$$B_{i,k}(y) := w_{i,k}(y)B_{i,k-1}(y) + (1 - w_{i+1,k}(y))B_{i+1,k-1}(y), \quad (3)$$

$$w_{i,k}(y) := \begin{cases} \frac{y - y_i}{y_{i+k-1} - y_i}, & \text{if } y_i \neq y_{i+k-1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(참고 1): 위의 정의를 이용하면, k차의 B-spline은 $y_i \leq y < y_{i+k}$ 에서만 0이 아님을 알 수 있다(지엽 지지성: local support property).

(정의 3): spline

k차의 spline은 다음과 같이 B-spline들의 선형 조합으로 정의된다.

$$S_{k,y}(y) := \sum_i B_{i,k}(y)c_i, c_i \in R. \quad (4)$$

3. spline에 기반한 시스템 근사와 적응 관측기의 설계

식 (1)의 하위 시스템인, 다음과 같은 구조를 가지는 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(y), 1 \leq i \leq n - m - 1, m \geq 0, n > m, \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(y) + g_i(y)u(t), n - m \leq i \leq n - 1, \\ \dot{x}_n &= f_n(y) + g_n(y)u(t), y = x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

(가정 1): $f_i(y), 1 \leq i \leq n$ 은 부분적으로 알려진 평활한(smooth) 함수이다.

$f_i(y) = \nu_i(y) + \overline{f_i(y)}$ 로 쓸 수 있다. 여기서 $\nu_i(y)$ 는 알려진 부분, $\overline{f_i(y)}$ 는 알려지지 않은 부분을 각각 의미한다. $\overline{f_i(y)}$ 는 어떤 종류의 범용 근사자라도 근사될 수 있는데 본 논문에서는 범용 근사자로 spline을 사용하므로 다음과 같이 $f_i(y)$ 들로 이루어진 벡터를 정의하고 이 벡터를

저자 소개

* : 삼성 종합기술원

** : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정

*** : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 교수

재한다고 가정한다.

$$x_o(t) = \Omega(t)\theta. \quad (14)$$

(14)를 이용하면 (13)의 두 번째 식으로부터 다음과 같은 필터를 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + \mathcal{W}(y, t). \quad (15)$$

이제 이 필터의 출력력을 사용하는, 다음과 같은 상태 추정 알고리즘을 고려하자.

$$\dot{\hat{x}} = x_v + \Omega^T \theta. \quad (16)$$

상태 추정 오차를 $\tilde{x} = x - \hat{x}$ 로 정의하고 가정에 의해

$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = 0$ 을 적용하면 (17)을 쉽게 유도할 수 있고, 이로 인해 이 필터의 추정성능을 보장할 수 있다. 이 추정법은 K-필터로 잘 알려져 있다[4].

$$\dot{\tilde{x}} = A_b \tilde{x} \quad (17)$$

RBF와 같은 기존의 범용 근사자를 사용할 경우, (15)의 필터는 갱신할 파라미터의 개수가 늘어남에 따라 그 차원도 늘어나게 되어 계산양도 비례적으로 증가하게 된다. 하지만 spline을 범용 근사자로 사용할 경우 이러한 문제를 다음과 같이 해결할 수 있다. (15)에서 $\Omega(t)$ 는 크기가 $n \times (nq + 1)$ 인 행렬이지만, (참고 1)과 (9)로부터 $I(y) \in R^{n \times nq}$ 에서 0이 아닌 부분은 $\bar{I}(y) \in R^{n \times nk}$ 뿐이며, $\bar{I}(y)$ 의 위치와 그 원소들이 y 의 변화에 따라 불연속적으로 변한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 $I(y)$ 가 0인 부분에 해당하는 $\Omega(t)$ 의 원소들을 $\Omega_0(t)$ 라고 하면 다음과 같이 상태 천이 행렬(state transition matrix)을 이용, 잘 알려진 해석적 방법으로 계산할 수 있다. 여기서 t_i 는 $\bar{I}(y)$ 가 이동하는 순간의 시간을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_i) &= (A - KC)\Phi(t, t_i), \quad \Phi(t_i, t_i) = I_{n \times n}, \\ \Omega_0(t) &= \Phi(t, t_i)\Omega_0(t_i), \quad t_i < t \leq t_{i+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

반면 $I(y)$ 가 0이 아닌 부분에 해당하는 $\Omega(t)$ 는 (15)를 직접 적분하여 구한다. 따라서 전체적으로 (15)의 필터는 다음과 같이 구성함으로써 실제로 적분기를 사용하는 부분의 차수는 파라미터 개수와 무관하게 된다. 즉, 모든 $t_i < t \leq t_{i+1}$ 에 대해

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y, t) &= \begin{bmatrix} 0 & I_{m+1}^{(\rho-1) \times (m+1)} \\ \alpha(y)u & | 0_{n \times (\rho-1)} \end{bmatrix} \bar{I}(y) + 0_{n \times (q-\delta)}, \\ \Omega_1(t) &= (A - C K) \Omega_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & I_{m+1}^{(\rho-1) \times (m+1)} \\ \alpha(y)u(t), \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_i) = (A - KC)\Phi(t, t_i), \quad \Phi(t_i, t_i) = I_{n \times n},$$

$$\Omega_2(t) = \Phi(t, t_i)\Omega_2(t_i),$$

$$\Omega_3(t) = (A - KC)\Omega_3(t) + \bar{I}(y),$$

$$\Omega_4(t) = \Phi(t, t_i)\Omega_4(t_i),$$

$$\dot{\hat{x}}_v(t) = (A - KC)\hat{x}_v(t) + \mathcal{W}(y) + K\hat{x}(t),$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_v(t) + [\Omega_1(t) \ \Omega_2(t) \ \Omega_3(t) \ \Omega_4(t)]. \quad (19)$$

와 같이 설계한다. 여기서 $\bar{I}(y)$ 의 이동이 일어나는 매 t_i 마다 $\Omega_i(t_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 의 값이 유지되어 $\bar{I}(y)$ 의 이동 후 동역학의 초기치로 반영된다.

(19)에서 제시한 적응 관측기의 차원을 실시간으로 늘리는 방식도 가능하다. 이 경우 spline의 지엽 지지성을 이용, 초기 시간에는 초기 출력값 주변에서만 spline차수와 같은 개수의 spline을 생성하고 이후 출력값이 변함에 따라 한 개씩 spline을 늘려서 생성하게 되며, 이러한 방식의 이점은 가중치가 0인 spline의 생성을 방지함으로써 계산시간을 단축시킨다는 것과 출력값의 상, 하계를 모르는 경우에도 사용할 수 있다는 것 등이 있다.

4. 결론

본 논문에서는 B-spline을 범용 근사자로 사용하여 불확실성을 가지는 출력례환형 비선형 시스템을 근사하고 이를 위한 상태 관측기를 설계하였다. 이 과정에서 B-spline의 지엽적 지지성(local support property)을 이용하여 필터의 차수가 파라미터 개수와는 독립적으로 고정될 수 있도록 설계하였다. 이는 갈수록 복잡성이 증가하는 비선형 시스템을 근사, 추정함에 있어서 큰 이점으로 작용할 수 있다. 향후 과제는 실시간으로 B-spline의 구조를 조정하는 것 등이 있다.

참고문헌

- [1] C. de Boor. A Practical Guide to Splines. Springer Verlag, New York, 1978.
- [2] P. A. Ioannou and J. Sun. Robust Adaptive Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [3] A. Isidori. Nonlinear Control Systems - 3rd. ed. Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [4] G. Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. IEEE Transactions on Automatic Control, 22:2-8, 1997.
- [5] M. Kristic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley, New York, 1995.
- [6] R. Marino and P. Tomei. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust. Prentice Hall, New York, 1995.