

다상 유동 해석을 위한 압축성 실제기체 해법

한상훈¹, 최정열^{2*}

A REAL GAS SOLUTION ALGORITHMS FOR MULTI-PHASE FLOW ANALYSIS

S.H. Han and J.Y. Choi

For the analysis of compressible multi-phase and real gas flows, characteristic form of Roe's Riemann solver was derived using real gas equation of state. It was extended to multi component reactive system considering variable specific heat. From this study, it is known that some correction should be made for the use of existing numerical algorithm. 1) Sonic speed and characteristic variable should be corrected with real gas effect. 2) Roe's average was applicable only with the assumption of constant properties. 3) Artificial damping term and characteristic variables should be corrected but their influences may not be significant.

Key Words: 실제 기체(Real Gas), 다상유동(Multi-phase), Roe의 기법(Roe's scheme)

1. 서론

압축성 유동의 해석에 있어 이상 기체 상태 방정식은 질량, 운동량 및 에너지 보존식에 추가되는 또 하나의 지배 방정식으로써, 압력을 계산하기 위하여 이용되어 왔다. 이상기체 상태 방정식은 압력과, 밀도 그리고 온도 사이의 관계를 선형적인 비례로 규정하는 관계식으로서, 압축성 유체 해석에 아주 편리하게 이용되어 왔으며, 현재 이용되고 있는 여러 가지의 고급 수치 기법은 이상기체 상태 방정식을 기초로 하여 개발되었다. 그러나 다상 유동 및 상 변화 현상이 발생하는 유동의 경우 이상 기체의 가정을 적용할 수 없기 때문에 현재 개발된 수치 기법을 그대로 이용하기에는 무리가 있을 수 있으며, 적용의 한계나 기법의 수정을 고려하여야 한다. 따라서, 이상 기체 상태 방정식이 아닌 실제 기체 상태 방정식이 필요하게 되며, 실제기체 상태 방정식은 기체상, 액체상, 기체-액체 혼합상 등 열역학적으로 다룰 수 있는 모든 상에 대한 물리량의 정보를 제공하여야 한다.

역사적으로 이상 기체가 아닌 실제기체에 대한 초기의

고찰은 1800년대 Van der Waals에 의해 이루어졌다. Van der Waals방정식이라고 일컬어지는 실제기체 상태 방정식은 기체 분자를 질점으로 보고 분자간의 상호 작용을 고려하지 않는 이상기체 상태 방정식과는 달리 분자의 크기와 분자간의 힘을 고려하여 제시한 상태 방정식이다. 분자의 크기와 분자간의 힘을 무시할 수 없는 이상기체의 경우는 분자간의 거리가 매우 작을 때 나타나며, 이는 일반적으로 압력이 높고 온도가 낮은 상태를 의미한다. 그러나, 이때의 높은 압력과 낮은 온도는 상대적인 값으로써, 여러 가지 유체 공학적인 상황에서 나타날 수 있다. 일반적으로 이상기체 가정을 적용할 수 없는 경우는 상변화가 발생하는 임계점 부근에서 일반적으로 나타난다. 즉, 기체의 압축과 팽창 과정 가운데 기체의 응축이 나타날 수 있는 문제들이 압축성 유체 해석 분야에 이상기체 가정을 적용할 수 없는 경우이다. 이러한 대표적인 예로써는 증기를 이용하는 터빈 등의 문제나, 고체 화합물의 폭발, 고압 연소체계 등이 있으며, 기타 고압 유체 기계 등에서 이러한 예를 찾을 수 있다.[1] 따라서, 이러한 문제를 해석하는 경우에는 이상기체 상태 방정식에 근거하여 개발된 수치 기법을 적용하기에 문제가 있을 수 있으며, 현재 이용되고 있는 해석 기법의 적용 가능성 및 적용 한계 또는 해석 기법의 수정을 고려하여야 한다. 이상기체 상태 방정식에 따르면, 압력과, 밀도 온도 등은 선형적 비례 관계로 나타나 있으며, 이러한 선형적 비례관계는 현재의 수치

1 학생회원, 부산대학교 대학원 항공우주공학과

2 정회원, 부산대학교 항공우주공학과

* Corresponding Author E-mail: aerochoi@pusan.ac.kr

기법을 개발하는데 아주 유용한 특징이 되어 왔다. 그러나 이상 기체가정을 적용할 수 없는 실제기체의 경우 압력과 밀도 및 온도와의 관계는 비선형이며, 이러한 비선형성은 그동안의 수치 해법의 개발 과정에서 충분히 고려된 바가 없다.

현재 널리 이용되고 있는 압축성 유체해석 기법들의 가장 큰 특징은 불연속면을 안정하게 포착할 수 있는 인공점성이며, FVS(Flux Vector Splitting) 과 FDS (Flux Difference Splitting) 등, 풍상 차분 기법 (Upwind Schemes)으로 요약할 수 있는 현재의 수치 기법들은 대부분 음속을 기준으로 차분 방법을 달리 함으로써, 압축성 해석에 필수적인 인공점성을 얻었다.[2-4] 그러나 실제 기체의 경우 특히, 상 변화시 음속은 이상기체의 경우와 상당히 다른 형태를 보이며, 따라서 이에 근거하여 얻어지는 인공점성도 다른 형태를 보일 수 있다.

지난 십여년의 연구를 통해 알려진 여러 가지의 수치적 해법 가운데, 현재 가장 널리 이용되고 있는 방법은 FDS로 알려진 Roe 의 근사 리만 해법으로 여겨진다. 따라서 본 연구에서는 실제기체의 일반적인 상태 방정식인 Van der Waals 상태 방정식과 앞서 언급한 고체 화합물의 폭발 등에 주로 쓰이는 JWL(Jones-Wilkins-Lee) 상태방정식, 그리고, 다상 유동 해석을 위한 상태방정식으로 기체상은 이상기체 상태 방정식, 액체상은 Tait 상태 방정식, 기체-액체 혼합상은 포화(saturation) 상태방정식을 이용하여 Roe 의 근사 리만 해법을 다시 유도하여 봄으로써, 현재 이용되고 있는 수치 기법들에서 추가적으로 고려하여야 할 사항이나 수정할 사항을 살펴보기로 한다.[5-8]

2. 유동의 지배 방정식과 실제기체의 열역학 관계식

압축성 유체의 해석에서 실제기체 상태방정식의 비선형적 영향을 살펴보기 위해 비점성 지배 방정식을 변환된 2차원 일 반좌표계에서 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ (e + P)u \end{bmatrix}$$

여기서 ρ 는 밀도, u 는 방향의 속도이며 P 는 압력 e 는 단위체적당의 총 에너지로써 내부에너지와 운동에너지의 합으로서 다음과 같이 정의된다.

$$e = \rho \epsilon + \frac{\rho u^2}{2} \tag{2}$$

여기서 ϵ 은 밀도와 온도의 함수인 단위질량당 내부에너지이다.

이상기체 가정을 이용하는 경우, 압력과 밀도 또는 부피, 온도는 선형적인 비례관계를 가지므로, 압력을 밀도와 온도의 식으로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P = \rho RT \quad (\text{or} \quad Pv = RT) \tag{3}$$

여기서 R 은 기체상수이다. 이상기체의 경우 ϵ 은 온도만의 함수이므로, (2) 식으로부터 반복 계산으로 온도를 구하여, 압력을 계산 할 수 있으며, 특히 비열을 상수로 가정하는 경우에는 압력을 보존 변수의 식으로 직접 변환할 수 있다.

그러나, 기체 분자의 크기와 분자간의 상호작용을 무시할 수 없는 경우, 상태 방정식은 전체 체적에서 기체 분자가 차지하는 부피와 상호작용에 의한 힘을 고려하여 수정되어야 하며, 이런 개념에서 처음 제시된 간단한 형태가 van der Waals 상태 방정식이다.

$$\left(P + \frac{a}{(vM_w)^2}\right)(vM_w - b) = \bar{R}T \tag{4}$$

여기서 M_w 는 분자량이다. 그러나 보다 구체적인 연구들을 통해 van der Waals 상태식에 수정이 가해진 다양한 상태식의 형태가 제시되어 왔으며, 일반적으로는 다음과 같은 비리얼 상태식으로 표시되어야함이 알려져 있다.

$$\frac{PV}{RT} = \sigma(v, T) = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \dots \tag{5}$$

다음은 고체 화합물의 폭발 등에 쓰이는 상태 방정식으로 JWL(Jones-Wilkins-Lee) 상태 방정식이 있다.

$$F(\rho, T) = Ae^{-R_1 \frac{P_0}{\rho}} + Be^{-R_2 \frac{P_0}{\rho}} + uC_v T \frac{P}{\rho_0} \tag{6}$$

여기서, A, B, R_1, R_2 는 고체 화합물에 따른 물성치로 상수이며, ρ_0, P_0 는 각각 초기 고체 반응물의 밀도, 생성 기체의 밀도를 의미한다.

기체상, 액체상, 기체-액체 혼합상의 다상(multi-phase)유동장을 풀기 위해서는 각각의 상에 대한 상태 방정식이 주어져야한다. 일반적인 실제기체 상태 방정식인 Van der Waals 상태 방정

식이나 좀 더 개량된 형태인 Benedict-Webb-Rubin 상태방정식, Peng-Robinson 상태 방정식을 이용하기 위해서는 상 평형 관계 식으로부터 기체-액체 혼합상을 표현하는 포화 상태 방정식을 구해야 하는 과정이 필요하게 된다. 그러나, 본 연구에서는 위의 방법 대신에 각각의 상에 대한 상태 방정식을 다음과 같이 정의하여 다상을 표현할 수 있도록 구현하였다.

즉, 기체상은 이상기체 상태 방정식으로

$$P = \rho RT \text{ (or } Pv = RT) \tag{3}$$

를 적용하였으며, 액체상은 Tait 상태 방정식으로 다음과 같다.

$$P = p(\rho, T) = K_0 \left[\left\{ \frac{\rho}{\rho_{l, sat}(T)} \right\}^n - 1 \right] + p_{sat}(T) \tag{7}$$

여기서, K_0 와 n 은 액체에 따라 달라지는데 물(Water)일 경우 K_0 는 $3 \times 10^9 \text{ pa}$, n 은 7이다.

기체-액체 혼합상은 포화 상태 방정식으로 표현하였다.

$$P = p_{sat}(T) \tag{8}$$

이며, 물에 대한 포화 상태 방정식은 다음과 같다.

$$p_{sat}(T) = p_c e^{-\frac{T_c}{T} (a_1 \theta + a_2 \theta^{1.5} + a_3 \theta^3 + a_4 \theta^{3.5} + a_5 \theta^4 + a_6 \theta^{7.5})}, \tag{9}$$

$$\theta = 1 - T/T_c$$

여기서, p_c , T_c 는 물의 임계압력, 임계온도이다.

3. 일반 상태 방정식과 열역학적 상태량

위에서 살펴본 바와 같이 실제기체 상태 방정식은 상 및 방정식 형태에 따라 매우 다양하게 표현되며, 이상기체와 달리 압력이 온도 및 밀도와 선형적인 비례관계를 가지지 않는다. 따라서, 다양한 실제기체에 대한 상태 방정식을 일반적으로 표현하기 위해 온도와 밀도의 함수인 압축성 계수(compressibility factor) σ 를 도입하여 이상기체 상태방정식을 수정한 형태로써 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Pv = \sigma(v, T)RT \text{ 또는 } P = \sigma(\rho, T)\rho RT \tag{10}$$

(10) 식으로부터, 이상기체의 경우 압축성 인자 $\sigma(\rho, T) = 1$ 임을 알 수 있다.

한편 실제기체를 고려하는 경우 온도만의 함수로 고려하였던 주된 열역학적 변수들도 수정되어야하며, 이 경우 편리한 방법은 각 변수들을 이상기체 항과 수정항의 합으로 표시할 수 있다. 예를 들어 ϵ 은 다음과 같이 쓸 수 있으며, 엔탈피나 다른 열역학 함수들도 유사한 방법으로 표시

$$d\epsilon = c_v dT + \left(T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_v - P \right) dv = c_v dT - \sigma_T RT \frac{\partial \rho}{\rho} \tag{11}$$

할 수 있다. 이 경우 편의상 압축성 인자의 미분 계수를 다음과 같은 기호로 정의한다.

$$\sigma_T = T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \Big|_v, \quad \sigma_v = v \frac{\partial \sigma}{\partial v} \Big|_T \tag{12}$$

한편, 열역학적 함수의 정의로부터, 등엔트로피 과정에서 정의되는 음속 (Thermodynamic Speed of Sound)은

$$a^2_{th} = \frac{\partial P}{\partial a} \Big|_s = \Gamma \frac{P}{\rho}, \quad \Gamma = \frac{c_p}{c_v} \left(1 - \frac{\sigma_v}{\sigma} \right) \tag{13}$$

과 같이 수정된다. 따라서 실제 기체를 고려하는 경우 열역학 관계식은 일반기체의 경우와 많은 차이가 있으며, 엄밀한 수치적 해석 방법은 이를 고려하여 개발되어야 한다.

4. Flux Jacobian 행렬, 고유치 및 음속

풍상 차분 기법의 개발에서 가장 우선하는 과정은 보존 변수벡터 U 와 플럭스 벡터 F 사이의 플럭스 Jacobian 행렬의 계산이다. 압력이 보존변수의 함수로서 외재적(explicit)으로 표시되지 않는 일반적인 경우에 대하여 압력의 도함수를 이용하여 플럭스 Jacobian 행렬을 표시하면 다음과 같다[9].

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + P_\rho & 2u + P_{\rho u} & P_e \\ (P_\rho - H)u & H + P_{\rho u} & (1 + P_e)u \end{bmatrix} \tag{14}$$

$P_\rho = \frac{\partial P}{\partial \rho}$ 로써 압력의 미분을 의미한다. 한편 플럭스

Jacobian 행렬의 고유치 행렬은

$$A = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U+a & 0 \\ 0 & 0 & U-a \end{bmatrix} \quad (15)$$

로 놓을 수 있으며 이로부터 유도되는 특성음속(Characteristic Speed of Sound)을

$$a_{ch}^2 = P_p + P_e(H-u^2) \quad (16)$$

과 같이 정의 할 수 있다. 이와 같이 유체역학적으로 정의되는 음속은 등 엔트로피 과정을 통하여 열역학적으로 정의되는 음속과 같지 않을 수 있으며 이에 관해서는 뒤에서 다시 논의하기로 한다.

5. 실제기체 효과가 인공 점성항에 미치는 영향

대류항의 차분식은 일반적으로 numerical flux를 이용하여 나타내며, numerical flux는 일반적으로

$$F = \frac{1}{2} [F(U_R) + F(U_L) - |\delta F|] \quad (17)$$

으로 표시 할 수 있다.

이 경우 $|\delta F|$ 는 인공 점성항을 나타내며 각 수치기법에 따라 다르게 구해진다.

characteristic 형태의 풍상차분 기법의 경우

$$|\delta F| = |A| \delta U = R |A| R^{-1} \delta V \quad (18)$$

로 쓸 수 있으며, 엄밀한 의미에서의 풍상차분을 위하여 특성변수를 이용하여 인공점성항을 표시하는 경우

$$|\delta F| = R |A| \delta W = R |A| (R^{-1} M \delta V) \quad (19)$$

로 표시 할 수 있다. 여기서 R 는 A 의 고유치 행렬이며 W 는 특성변수 벡터, V 는 원시변수 벡터이고, $M = \partial U / \partial V$ 로써 보존변수와 원시변수의 관계를 나타내는 행렬이다. 따라서 (14)의 Jacobian 행렬로부터 인공점성항을 유도하여 보면

$$\begin{aligned} \partial U = & |\lambda_1| \partial w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 - \frac{P_p}{P_e} \end{bmatrix} + |\lambda_2| \partial w_2 \begin{bmatrix} 1 \\ u+a \\ H+ua \end{bmatrix} \frac{1}{2a^2} \\ & + |\lambda_3| \partial w_3 \begin{bmatrix} 1 \\ u-a \\ H-ua \end{bmatrix} \frac{1}{2a^2} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \partial w_1 &= a \delta \rho - \delta P / a^2 \\ \partial w_2 &= (1-a)a^2 \delta \rho + \rho a \delta u + \beta \delta P \\ \partial w_3 &= (1-a)a^2 \delta \rho - \rho a \delta u + \beta \delta P \end{aligned} \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{P_e(H-e_p)}{a^2}, \quad \beta = P_e \cdot e_p \quad (22)$$

따라서 위의 식들에서, (20)식의 인공점성항의 전반적인 형태는 이상기체의 경우와 별다른 차이가 없지만 (21)식으로 표시되는 특성변수에 압력의 도함수에 따른 추가적인 고려를 하여야 함을 알 수 있다.

한편 U_R 과 U_L 의 적절한 평균값으로부터 얻어지는 행렬 A 는

$$F_R - F_L = A(U_R, U_L)(U_R - U_L) \quad (23)$$

의 관계를 만족하여야 하는데, Roe는 U 벡터와 F 벡터의 관찰을 통하여 완전기체에 대하여 보조변수 벡터 U 와 플러스 벡터 F 가

$$z = \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix} \quad (24)$$

로 정의할 수 있는 z 벡터의 2차식으로 표시될 수 있음을 보였고, 이를 바탕으로 (23) 식을 완전히 만족시킬 수 있는 U_R 과 U_L 의 평균값(Roe의 평균)을 정의 할 수 있었다. 그러나 이는 이상 기체에서 비열이 일정한 경우에 압력이 보존변수의 식으로써 외재적(explicit)으로 표시될 수 있는 경우에만 가능하며, ① 비열이 온도의 함수이고 ② 압력이 온도와 밀도에 선형적으로 비례하지 않는 실제기체의 경우에는 Roe의 평균이 적용되지 않음을 쉽게 알 수 있다.

그러나 이런 경우에도, 국부적으로 비열이 일정하고 σ 를

일정하다고 가정한다면 Roe의 평균은 (23)식을 만족시키는 행렬 A 를 찾기 위한 편리한 방법이 될 수 있다.

5. 압력 및 에너지의 편도함수

인공 점성에 포함되는 압력 및 에너지의 편도함수를 구하기 위하여, 보존 변수의 식으로서 상태방정식을 이용하여 정의되는 압력은 온도를 매개 변수로 하여

$$P = P(\rho, T), \quad T = T(\rho, \rho u, e) \tag{25}$$

과 같이 정의되며, 밀도에 대한 도함수는 연쇄법칙을 이용하여

$$P_\rho = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho u, e} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_T + \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho u, e} \tag{26}$$

로 나타낼 수 있으며, 유사한 방법으로 각 도함수를 구하여 보면 다음과 같이 유도되고,

$$P_\rho = (\sigma - \sigma_v)RT + P_e(u^2 - e/\rho + \sigma_T RT) \tag{27}$$

$$P_e = \frac{R}{c_v}(\sigma + \sigma_T), \quad P_{\rho u} = -uP_e$$

이로부터 특성음속은 다음과 같이 구해진다.

$$a_{ch}^2 = \Gamma_{ch} \frac{P}{\rho}, \quad \Gamma_{ch} = 1 - \frac{\sigma_v}{\sigma} + \frac{R}{c_v} \frac{(\sigma + \sigma_T)^2}{\sigma} \tag{28}$$

또한, 에너지의 편도함수는 원시변수의 함수로 다음과 같이 정의되는 에너지로부터,

$$e = e(\rho, u, T), \quad T = T(P, \rho) \tag{29}$$

아래와 같이 유도할 수 있다.

$$e_\rho = \frac{\partial e}{\partial \rho} \Big|_{\rho u} = \frac{c_v}{R(\sigma + \sigma_T)} = \frac{1}{P_e} \tag{30}$$

$$e_\rho = \epsilon + \frac{u^2}{2} - \frac{\sigma - \sigma_v}{\sigma + \sigma_T} c_v T - \sigma_T RT$$

따라서 (21)식의 특성 변수에서 포함된 α, β 는 위의

도함수들을 대입하여 보면 각각 1 이 됨을 알 수 있다. 따라서 실제기체가, characteristic 형태의 풍상차분 기법에 미치는 영향은 (20)식의 첫 항에 포함된 압력의 도함수를 통해서만 나타나며, 이는 도함수들은 (26) 식으로 유도된 식을 이용하여 구할 수 있음을 알 수 있다.

한편, 열역학적 음속과 특성음속은 압축성인자 σ 를 일정하다고 가정하였을 경우,

$$\Gamma_{th} - \Gamma_{m} = \frac{R(1-\sigma)}{c_v} \tag{31}$$

$\sigma=1$ 인 이상기체인 경우에만 서로 동일한 값을 가짐을 알 수 있다. 따라서 열역학적 음속과 특성음속은 서로 다른 것이라고 할 수 있으며, 인공점성항에 나타나는 음속은 특성음속을 이용하는 것이 수학적인 관점에서 타당할 것으로 여겨진다.

6. 수치 검증 및 계산 결과

6.1 Van der Waals 상태 방정식

지금까지 유도된 실제 기체의 풍상차분법 및 Van der Waals 상태 방정식으로 1차원 및 준 1차원 유동인 충격파 관 문제 및 노즐 문제를 해석하여 보았다. 본 연구에서 고려한 충격파 관 문제는 고압부와 저압부의 압력비가 10이고 밀도비는 8인 Sod's problem 이며, 노즐 문제는 diverging 노즐 형상으로 입구조건 및 출구조건 모두 초음속 유동으로 등엔트로피 조건하에 팽창하는 경우를 살펴보았다.

수치 코드의 정확도를 검증하기 위해 충격파 관 문제에 대해서는 충격파 전후의 물리량을 충격파 관계식을 이용하여 해석적으로 구하였으며, 이 해석적인 결과를 수치 코드의 초기조건으로 대입하여 충격파가 진행하지 않고 초기 조건으로 서 있는 현상을 관찰(standing shock wave)함으로써 검증할 수 있었다. 또한, 노즐 문제에 대해서는 질량, 운동량, 에너지 보존방정식으로부터 해석적인 해를 구하였으며, 이 결과와 수치 코드를 통하여 계산 되어진 결과를 비교하여 보았다. 해석에서 대상으로 삼은 기체는 질소(N2)로서, 분자량은 28이며, 압력의 비선형성에 의한 실제기체 효과만을 살펴보기 위하여 질소의 비열비를 1.4로 두고 비열을 일정하다고 가정하였다. Fig. 1은 Van der Waals 상태 방정식을 이용

Table. 1 Initial Condition

	pressure[pa]	velocity[m/s]	density[kg/m ³]
Left	0.6×10 ⁶	1000	6.7647
Right	5.498×10 ⁶	275.94	24.5146

한 수치 코드의 검증 결과로 이론적인 해를 초기 조건으로 주었을 때, 압력이 초기조건 그대로 서 있는 현상을 관찰 할 수 있다. 이 때 준 초기조건은 Table. 1에 나타내었다.

Fig. 1은 Table. 1의 초기 조건을 Van der Waals 상태방정식과 풍상차분법을 이용한 수치 코드에 적용한 결과로 정지 충격파의 이론해와 수치해가 일치함을 알 수 있다. Fig. 2와 Fig. 3은 1차원 충격파 관 해석 결과로 Fig. 2는 압축성 계수 (compressibility factor)가 0.992로 이상기체인 1에 매우 가까운 경우이다. Fig. 2에서 보는 것처럼 이상기체를 이용한 수치 결과와 Van der Waals 상태 방정식을 이용한 결과가 거의 유사함을 알 수 있다.

본 연구에서 이용된 인공 감쇠항은 국부적으로 일정한 압축성인자를 가정하는 Roe의 평균만을 제외하고는 엄밀한 것이다. 비록 Roe의 평균을 이용하는 데에 있어 다소의 이의가 있을 수 있지만, Fig. 2에서 보이는 해석 결과의 충격파 및 접촉 불연속면 등의 불연속면 포착 특성은 충분히 좋은 결과를 보이고 있는 것으로 보인다.

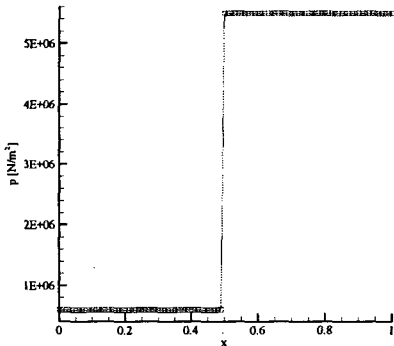


Fig. 1 Standing normal shock wave

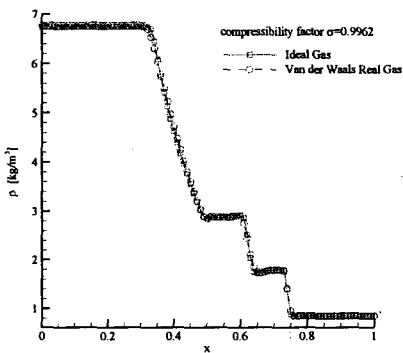


Fig. 2 Density profile of ideal and Real Gas

Fig. 3은 압축성 계수가 0.662로 이상기체에서 많이 벗어난 실제 기체로 Fig. 3에서 보이듯이 충격파 및 팽창파에 있어 이상 기체와 다른 속도 및 강도를 가지고 있음을 알 수 있다. 즉, 압축성 계수의 정도에 따라 실제 기체의 경우 이상 기체와 매우 다른 물리적 특성을 가지게 될 것이다.

Fig. 4는 준 1차원 노즐 문제에 대한 Mach 수 contour로 압축성 계수가 0.992로 이상 기체에 가까운 경우이다. 해의 결과에서 볼 수 있듯이 Van der Waals 상태 방정식을 이용한 결과와 이상기체 상태 방정식을 이용한 결과는 크게 차이가 나지 않으나, 압축성 계수의 차이에 따라 해에 있어 약간의 차이가 남을 볼 수 있다. 또한, 수치 코드의 검증과정으로 Van der Waals 상태 방정식을 이용한 전산 해석 결과와 이론적인 해를 비교하여 보면 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5는 압축성 계수가 0.652로 이상 기체에서 크게 벗어

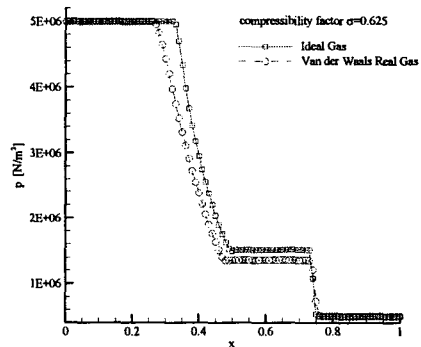


Fig. 3 Pressure profile of ideal and Real Gas

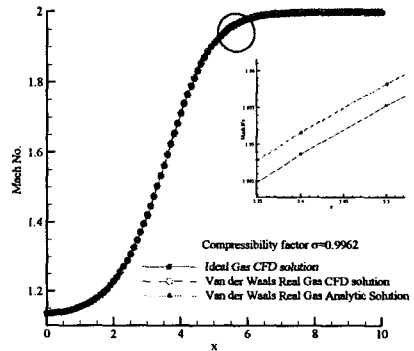


Fig. 4 Mach number profile of Ideal gas, Real gas CFD solution and analytic solution

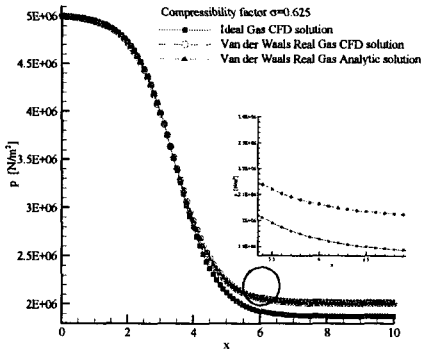


Fig. 5 Pressure profile of Ideal gas, Real gas CFD solution and analytic solution

난 실제 기체에 대한 압력 형상이다. Fig. 5에서 보이듯이 노즐 후방부에서 이상기체와 실제 기체는 다른 결과를 보여 주고 있다.

6.2 JWL 상태 방정식

실제 기체의 풍상 차분법 및 JWL 상태 방정식을 이용하여 준 1차원 노즐 문제를 해석하였다. 노즐은 diverging 형상으로 입구 및 출구 모두 초음속 유동으로 등엔트로피 조건 하에 팽창하는 경우를 살펴보았다. Fig. 6은 압력에 대하여 JWL 상태 방정식을 이용한 수치 결과와 이론적인 해를 비교한 것으로 수치 및 이론적 해 모두 거의 일치함을 알 수 있다.

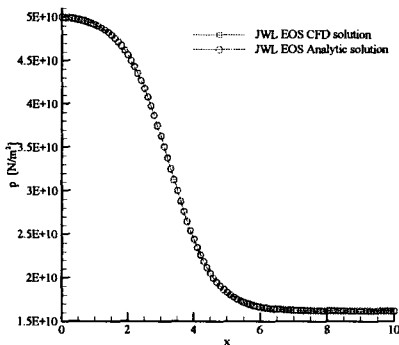


Fig. 6 Pressure profile of Real gas(JWL) CFD solution and analytic solution

6.3 Multi-phase 유동해석

상대습도와 마하수에 따른 2차원 NACA0012에어포일 주위의 유동해석 문제로 기체상에서 기체-액체 혼합상으로 상 변화가 발생하는 경우에 대한 수치 해석 결과이다.

Fig. 7은 상대 습도가 50%, 마하수 0.8인 경우의 혼합상의 액체 질량분율 contour로 에어포일 주위의 팽창 영역에서 온도 하강에 의한 수증기의 응결 현상이 일어난다.

Fig. 8은 상대 습도가 95%, 마하수가 0.8일 경우로 이 조건에서는 위의 상대 습도가 50%인 경우보다 현재 수증기압이 포화상태에 근접한 상태로 팽창에 의해 온도 하강이 일어날 시 혼합상으로 상 전이하기 쉬운 조건이 된다. 따라서, Fig. 8에서 볼 수 있듯이 팽창이 일어나는 대부분의 영역에서 수증기 응결 현상이 발생한다.

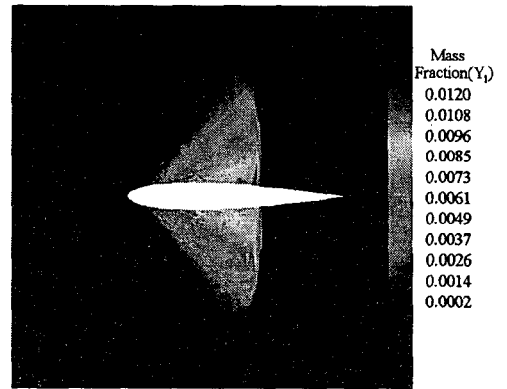


Fig. 7 Liquid mass fraction contour at Φ=50%, M=0.8

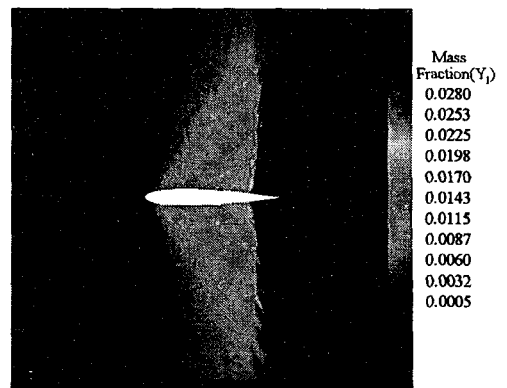


Fig. 8 Liquid mass fraction contour at Φ=95%, M=0.8

7. 결 론

참고문헌

압축성 다상 유동 해석을 위하여 실제기체의 상태 방정식을 고려하여 Roe 의 수치해법을 다시 유도, 계산하여 보았다. 개발된 해석 기법 및 계산 결과에 대하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

- (1) 실제기체 상태방정식 및 다상유동을 해석에 이용하는 경우, 음속을 수정하여야 하며, 인공 감쇠항에도 수정을 가하여야 한다. 이때 음속은 (28)식으로 정의되며, 압력의 도함수는 (27)식과 같이 나타난다.
- (2) 완전 기체가 아닌 경우, Roe의 평균은 성립하지 않으나 국부적으로 비열과 압축성인자가 일정하다고 가정을 이용한 해석 결과의 충격과 포착특성은 별무리가 없는 것으로 보인다.
- (3) Van der Waals 상태 방정식과 같은 실제기체 상태 방정식을 이용할 경우 이상기체로의 가정이 충족될 수 없는 경우에 이상기체로 가정한 해석 결과와 실제기체의 결과와는 상당한 차이를 보일 수 있음을 알 수 있었다. 또한, 개발된 풍상 차분법은 Van der Waals와 상태 방정식 이외에도 JWL 상태 방정식 및 다상 유동 해석시 사용될 수 있는 다양한 실제기체 상태 방정식에도 적용할 수 있음을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 국방과학 연구소 수중운동체 특화연구센터(UVRC)의 연구비 지원으로 수행되었으며, 지원에 감사드립니다.

- [1] Bauer, P., Legendre, J.F., Henner, M. and Giraud, M., Real Gas Effects in Ram Accelerator propellant mixtures: Theoretical Concepts and Applied Thermochemical Codes., Ram Accelerators edited by Takayama, K. and Sasoh A., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998, pp.39-52.
- [2] Grossman, B., and Cinnella, P., Flux Split Algorithms for Flows with Non-equilibrium Chemistry and Vibrational Relaxation, Journal of Computational Physics, Vol. 88, 1990, pp. 131-168.
- [3] Roe, P. L., Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, Journal of Computational Physics, Vol. 43, 1981, pp. 357-372.
- [4] Shuen, J. S., Liou, M. S. and van Leer, B., Inviscid Flux-Splitting Algorithms for Real Gases with Non-equilibrium Chemistry, Journal of Computational Physics, Vol. 90, 1990, pp. 371-395.
- [5] Black, W. Z., and Hartley, J.G., "Thermodynamics, 2nd Edition," HarperCollins, 1991, New York.
- [6] Edwards, J. R., Franklin, R. K., and Liou, M.-S., "Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Real Fluid Flows with Phase Transitions," AIAA Journal, Vol. 38, No. 9, Sep. 2000, pp. 1624-1633.
- [7] Saurel, R., Cocchi, J.P., and Butler, P. B., "Numerical Study of Cavitation in the Wake of a Hypervelocity Underwater Projectile," Journal of Propulsion and Power, Vol. 15, No. 4, Jul. Aug. 1999, pp.513-522.
- [8] Kury, W.Kury., Breithaupt, R.Don., and Tarver, C.M., "Detonation waves in trinitrotoluene", Shock Waves, Vol. 9, 1999, pp. 227-237
- [9] Hirsch, C., Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 2 , Wiley , New York , 1990.