

# 압축성 코드에서 예조건화 코드로의 이전 및 검증

한상훈<sup>1\*</sup>, 김명호<sup>2</sup>, 최정열<sup>3</sup>

## IMMIGRATION FROM COMPRESSIBLE TO PRECONDITIONING CODE WITH VALIDATIONS

S.H. Han, M.H. Kim and J.Y. Choi

*Generally, Compressible Navier-Stokes codes are used to solve high mach number flows. But, Most of high mach number flows embrace low mach number flows. This phenomenon results in low convergence rate and non-physical solution in CFD analysis. So Many researchers developed preconditioning technique to solve these problems. This Study presents how to modify previous compressible N-S computer code with little changes of structure into preconditioned compressible N-S code applying Roe's Approximate Riemann Solver. And this study show developed preconditioning code is very well operated at all mach number flows.*

**Key Words:** 예조건화(Precondition), 압축성(Compressible), 비압축성(Incompressible), Roe의 해법(Roe's scheme), 비정상(Unsteady)

### 1. 서론

전산 유체역학 기법은 고 마하수 압축성 유동을 해석하기 위한 Density-Based Method와 저 마하수 비압축성 유동을 해석하기 위한 Pressure-Based Method로 개발되어져 왔으며, 일반적으로 Density-Based Method에 기반한 압축성 Navier-Stokes 코드가 고 마하수 압축성 유동 해석에 널리 이용되고 있다.

하지만, 실제 유동 현상은 고 마하수 압축성 유동 일지라도 정체점 같은 국부적으로 저 마하수 비압축성 특성을 갖는 영역이 존재하게 되며, 저마하수 비압축성 유동에서도 연속 현상 등 열전달 및 열적 화학반응이 수반될 경우 밀도 변화가 생기는 압축성 특성을 갖는 영역이 존재하게 된다. 이 때 압축성 Navier-Stokes 코드를 이용하여 저 마하수 비압축성 유동을 해석하게 되면, 마하수가 작아짐에 따라 고유치의 차이가 커지게 되어 Time Marching Algorithm을 이용하여 해를 구하게 될 때 수렴성이 저하되는 결과를 초래한다. 또한, 마하수가 작아질수록 운동량 보존 방정식의 압력 구배항의 특이

성에 의해 Round Off가 발생하여 해의 부정확성을 초래하게 된다. 따라서, 저 마하수에서 발생하는 수렴성의 저하를 막기 위하여 지배방정식의 시간 미분항에 예조건화 행렬을 곱하여 유동 조건에 대한 고유치의 차이를 줄이는 예조건화 방법과 Round Off Error에 의한 해의 부정확성을 개선하기 위하여 연속 방정식 및 운동량 방정식의 압력항을 절대 압력과 게이지 압력으로 분리하여 적용하는 압력 분리기법이 개발되었다. 이 두 가지 방법을 압축성 Navier-Stokes 코드에 적용하여 모든 속도의 유동장 해석을 용이하게 하는 예조건화 Navier-Stokes 코드가 많은 연구자들에 의하여 개발되어 다양한 분야에 응용되어 왔다.

따라서, 본 논문에서는 아직까지 예조건화 해석 코드보다 기존의 압축성 Navier-Stokes 코드가 훨씬 널리 이용되고 있는 현실임을 감안하여 기존의 압축성 해석 코드와 유사한 구조로 쉽고 체계적으로 예조건화 압축성 해석 코드로 전이하는 방법을 제시할 것이며, 그 수치 기법은 일반적으로 압축성 해석 코드의 수치 기법으로 가장 널리 쓰이고 있는 Roe의 근사 Riemann 해법을 선택하였다. 그리고, 개발된 예조건화 압축성 해석 코드를 검증하기 위하여 다양한 유동장 속도에서의 정상 및 비정상 상태 유동을 해석하여 보았다.

### 2. 예조건화 기법

1 학생회원, 부산대학교 대학원 항공우주공학과

2 정회원, 국방과학연구소

3 정회원, 부산대학교

\* Corresponding Author E-mail: hshk@pusan.ac.kr

2.1 2차원 압축성 방정식

본 연구에서 예조건화 할 2차원 압축성 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q_c}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \tag{1}$$

여기서, 각 벡터는 다음과 같이 구성되어 있다.

$$Q_c = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho v \\ \rho uH \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u\omega \\ \rho v^2 + P \\ \rho vH \end{bmatrix}$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \beta_x \end{bmatrix}, \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \beta_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.2 예조건화 기법 및 2차원 예조건화 압축성 방정식

예조건화 기법은 저 마하수에서 발생하는 수렴성의 저하를 막기 위하여 지배방정식의 시간 미분항에 예조건화 행렬을 곱하여 유동 조건에 대한 고유치의 차이를 줄이는 방법으로, 원시형 변수에 대한 보존형 변수의 자코비안 행렬로부터 유도되며, 그 자코비안 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial Q_c}{\partial Q_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & \rho_T v \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서, 원시형 변수는  $Q_p = [p, u, v, T]^T$ 이다.

유동 시스템의 고유치들을 전 속도 영역에서 같은 차수가 될 수 있도록 (3)의  $\rho_p$ 항을 변형 시키는 것( $\rho'_p$ )이 예조건화 기법이 되며, 그 예조건화 행렬은  $\rho'_p$ 항에 따라 여러 가지 변형된 형태로 제안되었다.

$$\Gamma = \frac{\partial Q_c}{\partial Q_p} = \begin{bmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho'_p u & \rho & 0 & \rho_T u \\ \rho'_p v & 0 & \rho & \rho_T v \\ \rho'_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \tag{4}$$

예조건화 행렬로는 Choi & Merkle, Weiss & Smith, Chen, Chorin, Turkel 등의 것이 있다. 본 연구에서는 2차원 비점성 유동 해석에 위의 방법들을 적용 검토한 결과 Choi and Merkle의 방법이 우수한 결과를 보였기에 이후 모든 유동 해석에 이 방법을 택하였다. 다음은 Choi and Merkle의 예조건

화 행렬이다.[1]

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{M^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M^2} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{M^2} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{H}{M^2} & -\rho u & \rho v & \rho C_p \end{bmatrix}, \quad M_r = \begin{cases} \epsilon^2, & M < \epsilon \\ M^2, & \epsilon < M < 1 \\ 1, & M > 1 \end{cases} \tag{5}$$

예조건화 된 이차원 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{\partial Q_c}{\partial t} + \frac{\partial Q_c}{\partial t} + \frac{\partial(E-E_v)}{\partial x} + \frac{\partial(F-F_v)}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

3. 수치기법

3.1 공간 차분 기법

공간차분법은 풍상차분법(Upwind scheme)의 일종으로 대표적으로 널리 쓰이고 있는 Roe의 근사 Riemann 해법을 기반으로 하였다. 특히, 본 연구의 목적이 기존의 압축성 방정식에서 유도된 Roe의 해법을 예조건화 된 Roe의 해법으로 전이하는 방법을 제시하고자 하는 것이므로 압축성 Roe의 수치 플럭스와 예조건화 된 압축성 방정식의 Roe의 수치 플럭스를 비교하여 그 차이점과 유사점을 검토할 것이다.

Roe의 해법에 의한 수치 플럭스와 수치점성은 다음과 같다.

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(Q_L) + F(Q_R) - \mathcal{A}(Q_R - Q_L)] \tag{7}$$

$$|\Delta F^q| = \mathcal{A}(Q_R - Q_L) \tag{8}$$

그리고, 예조건화 된 수치 플럭스와 수치점성은 다음과 같다.

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(Q_{p,L}) + F(Q_{p,R}) - \Gamma M^+ |M| M^- (Q_{p,R} - Q_{p,L})] \tag{9}$$

$$|\Delta F^q| = \Gamma M^+ |M| M^- \Delta Q_p \tag{10}$$

여기서,  $Q_c$ 는 보존형,  $Q_p$ 는 원시형 변수이다.

(8)과 (10)의 수치점성을 각각의 항으로 표현하면 (11), (12) 식으로 나타낼 수 있다.

$$|\Delta F^q| = [\Delta f_1^q, \Delta f_2^q, \Delta f_3^q, \Delta f_4^q]^T \tag{11}$$

$$|\Delta F^k| = [\Delta f_1^k, \Delta f_2^k, \Delta f_3^k, \Delta f_4^k]^T \quad (12)$$

그리고, (11), (12)의 첫 번째항은 다음과 같은 식으로 나타내어진다.

$$\Delta f_1^k = |\lambda_1| \Delta \rho - |\lambda_1| \frac{\Delta p}{c^2} + \frac{|\lambda_3| + |\lambda_4|}{2} \frac{\Delta p}{c^2} + \frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2c} \rho \Delta U \quad (13)$$

$$\Delta f_1^k = \frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2} \frac{U}{c} \Delta \rho + \frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2c} \rho \Delta U - \frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2} \frac{U}{c} \frac{\Delta p}{c^2} + \left\{ \frac{|\lambda_3|}{2c(c+U-\epsilon U)} + \frac{|\lambda_4|}{2c(c-U+\epsilon U)} \right\} \Delta p \quad (14)$$

(14)에서 3번째, 4번째 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda_{3,4}^k = U \frac{1+\epsilon}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{U^2(1-\epsilon)^2 + 4\beta} \quad (15)$$

(13), (14)의 비교를 통하여 예조건화 된 Roe 해법으로의 전이 방법을 제시한다. (14), (15)에서  $\beta = 1/\rho_p' = \epsilon c^2$ ,

$U = U \frac{1+\epsilon}{2}$ ,  $c' = \frac{1}{2} \sqrt{U^2(1-\epsilon)^2 + 4\beta}$ 이다. 만약, 압축성 유동일 경우  $\epsilon = 1/\gamma$  이것은 예조건화에 의해  $\epsilon = 1$ 로 변환될 경우  $U = U$ ,  $c' = c$  이 되어 압축성 유동의 고유치와 일치함을 알 수 있다.

수치 점성항의 비교를 위해  $\Delta f_1^k$ 의  $U(|\lambda_3| - |\lambda_4|)/2c$  항과  $\Delta f_1^k$ 의  $|\lambda_1| = U$ 를 U의 속도 영역에 따라 나누면 다음과 같이 나타난다.

(1)  $c < U$  일 경우

$$\frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2c} U = \frac{|U+c| - |U-c|}{2c} U = \frac{U+c - U+c}{2c} U = U = U$$

이며, 압축성 방정식의 고유치는  $|\lambda_1| = U$ 이다.

(2)  $0 < U < c$  일 경우

$$\frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2c} U = \frac{|U+c| - |U-c|}{2c} U = \frac{U+c - U-c}{2c} U = MU$$

이며,  $M = \frac{U}{c}$  이고, 압축성에서는  $|\lambda_1| = U$ 이다.

(3)  $-c < U < 0$  일 경우

$$\frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2c} U = \frac{|U+c| - |U-c|}{2c} U = -MU$$

이며, 압축성에서는  $|\lambda_1| = -U$ 이다.

(4)  $U < -c$  일 경우

$$\frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2c} U = \frac{|U+c| - |U-c|}{2c} U = -U = -U$$

이며, 압축성에서는  $|\lambda_1| = -U$ 이다.

따라서,  $U(|\lambda_3| - |\lambda_4|)/2c$  항은 압축성 방정식의 고유치  $|\lambda_1|$  에 해당하는 것이며, (13), (14)의 다른 항들도 위와 같은 방법으로 비교해 볼 경우, 압축성 영역 하에서  $\Delta f_1^k$ 이  $\Delta f_1^k$ 와 같게 된다는 것을 알 수 있다. 이와 유사하게 (11), (12)의 나머지 항에 대해서도 수식의 물리적 의미에 대한 비교를 통하여 기존의 압축성 방정식의 Roe의 해법의 수치 점성을 예조건화 된 수치 점성으로 변경함으로써 예조건화 된 Roe의 해법을 유도할 수 있다.

### 3.2 시간 적분 기법 및 저 레이놀즈 수 안정화 조건

본 연구에서는 정상 및 비정상 상태의 해석을 위하여 대류 항, 점성항, 물리적 시간항의 자료비안을 계산하였으며, 완전 내재적 기법인 LU-SGS 기법을 이용하였다.

낮은 레이놀즈 유동장에서의 수렴성 저하와 비 물리적인 해의 방지를 위해 점성항에 대한 시간 길이를 고려하여 예조건화 계수를 스케일링하는 기법인 Von Neumann Stability Condition을 이용하였다. Von Neumann 상수와 스케일링 상수는 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{\mu \Delta t}{\rho \Delta x^2}, \quad k = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\epsilon(\alpha-1+\gamma RT/U^2)} \quad (16)$$

## 4. 검증 및 계산 결과

### 4.1 정방형 Cavity 유동

예조건화 Navier-Stokes 방정식의 비압축성 점성 유동 해석 검증을 위해 정방형 Cavity 유동을 해석해 보았다. 유동 조건은 상단 마하수  $4.5 \times 10^{-4}$  속도 조건하에서의 레이놀즈수 1, 100, 1000의 3가지 유동을 해석했다. Fig. 1은 레이놀즈수 1, 100, 1000 조건에서의 등압력 분포와 유선을 도시하였다. 아래 벽면에서의 재순환 영역이 나타남을 확인할 수 있다. 수직 중심축과 수평 중심축에서의 x, y 속도 성분 비교를 위해 Ghia et al.[2]의 비압축성 유동 수치해석 결과와 비교하였다. Re=1000에서의 유속이 빠른 구간에서 Ghia의 해석 결과와 약간의 차이가 있으며, 다른 영역에서의 비압축성 유동 해석 결과와 차이가 없음을 확인할 수 있다.

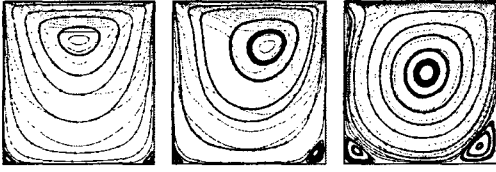


Fig. 1 Re=1, 100, 1000에서의 정방향 Cavity 유동

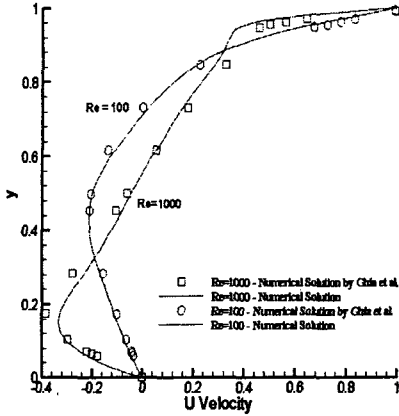


Fig. 2 수직 중심축에서의 x방향 속도(u) 비교

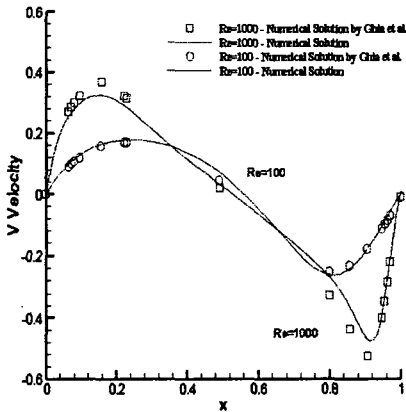


Fig. 3 수평 중심축에서의 y방향 속도(v) 비교

4.2 후향계단 유동

예조건화 방정식의 비압축성 점성 유동 해석 검증 두 번째로 후향 계단 유동을 해석해 보았다. 입구 상단에 포물선의 속도분포를 주었으며, 최고 입구 마하수는 0.001로 하였다. 레이놀즈수는 입구 하단의 높이를 기준으로 20, 50, 100에 대해 검증해 보았다. 계산에 적용한 격자는 72x72로 하였으며, 낮은 레이놀즈 유동에서도 수렴성 저하되지 않도록 정방향

Cavity 유동에서처럼 Von Neumann 수( $\sigma$ )를 3.0으로 동일하게 적용하였다. Fig. 4는 마하수 분포와 유선을 도시하였다. 레이놀즈 수가 증가할수록 재순환영역이 넓어지면서 재부착 위치가 길어짐을 확인할 수 있다.[3]

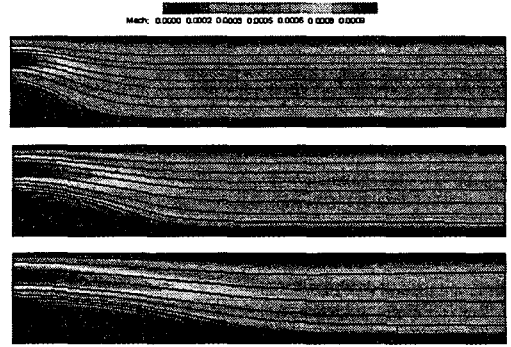
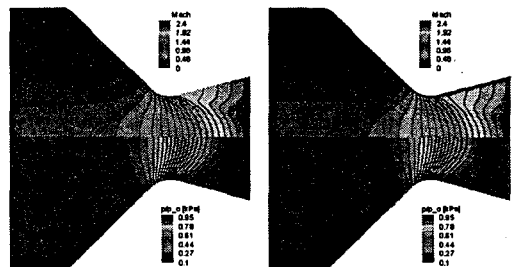


Fig. 4 Re=20, 50, 100에 대한 유선과 마하수 분포

4.3 천음속 노즐 유동

예조건화 압축성 지배방정식의 압축성 유동 검증을 위하여 NASA의 JPL 천음속 노즐 유동을 해석해 보았다. 120x80 격자계를 사용하였으며, 입구 경계조건은 입구 압력 4.824x106Pa의 아음속 조건이다.

Fig. 5는 JPL 노즐의 마하수와 압력 분포를 나타내었다. 첫 번째 계산결과는 비점성 유동에 대한 해석결과로 경계층에서의 Slip Wall 조건을 유지하고 있다. 두 번째 계산결과는 점성 유동 해석결과로 노즐 벽면에 경계층이 발달되어 있음을 확인할 수 있다. 또한 비점성 등엔트로피 관계식에 의해 계산된 노즐 목 벽면과 중심축에서의 마하수는 각각 1.4, 0.8로 비점성 유동 해석결과로는 1.26, 0.84로 유사한 결과를 나타냈다. Fig. 6과 Fig. 7은 노즐 중심축과 벽면에서의 압력비(정압력/전압력) 분포를 Cuffel등[4]이 벽면에서의 실험 측정결과 및 중심축의 등엔트로피 유동 계산결과와 비교하였다. 비점성 유동 및 점성 유동 계산결과 모두 실험결과와 비교적 잘 일치하고 있다.



(a) 비점성 계산결과 (b) 점성 계산결과

Fig. 5 JPL 노즐 마하수, 압력 분포

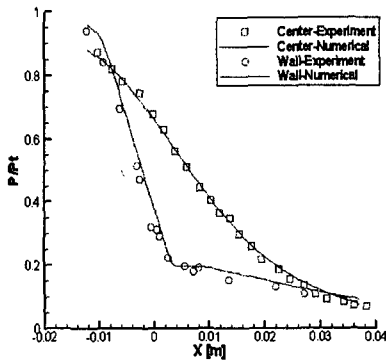


Fig. 6 노즐 중심선과 벽면에서의 압력분포

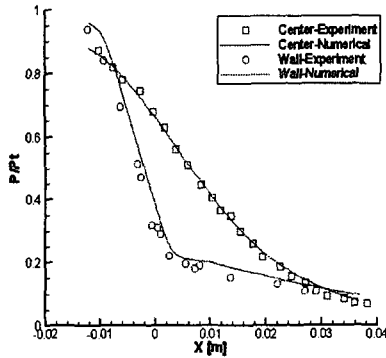


Fig. 7 노즐 중심선과 벽면에서의 압력분포

4.4 원형 실린더 유동

예조건화 지배방정식의 비정상 유동 해석 검증에 사용된 예제로 2-D 원형 실린더의 Vortex Shedding 유동을 해석해 보았다. Vortex Shedding 유동의 검증은 일반적으로 Shedding Vortices에 대한 무차원 주파수 즉, Strouhal Numbers(St)로 확인한다. Strouhal Number는 아래 식으로 계산할 수 있다.

$$St = \frac{fD}{U_0} \tag{17}$$

여기서,  $f$ : Shedding 주파수,  $D$ : 원형 실린더 지름  
 $U_0$ : 전방 입구 속도

본 연구에서는 Case 1(Ma=0.0002, Re=75)과 Case 2(Ma=0.02, Re=1000)에 대한 비정상 2-D 원형 실린더 유동을 Tritton, D.의 실험[5]과 Philip E. O. 등[6]의 계산결과와 비교 검증하였다. Fig.8는 Case 1에서 주기적으로 발생하는 와류의 변화를 한 Cycle에 대해 유선의 변화로 나타내었다. Fig.9은 원형 실린더 중심에서의 2.75cm 아래 지점에서의 x축 속도 성분을 나타내었다. 한 Cycle 동안 0.86sec의 주기로 예측되었으며, St는 1.65로 실험결과와 유사한 결과를 보이고 있다. Fig.

10는 Case 2의 Vortex Shedding 유선 변화를 나타내었고, Fig. 11은 원형 실린더 중심에서의 3.4cm 아래 지점에서의 x축 속도 성분을 변화를 나타내었다. 한 Cycle 동안 7.23×10<sup>-3</sup>sec의 주기로 St는 1.198로 실험결과와 별 차이가 없음을 확인할 수 있다.

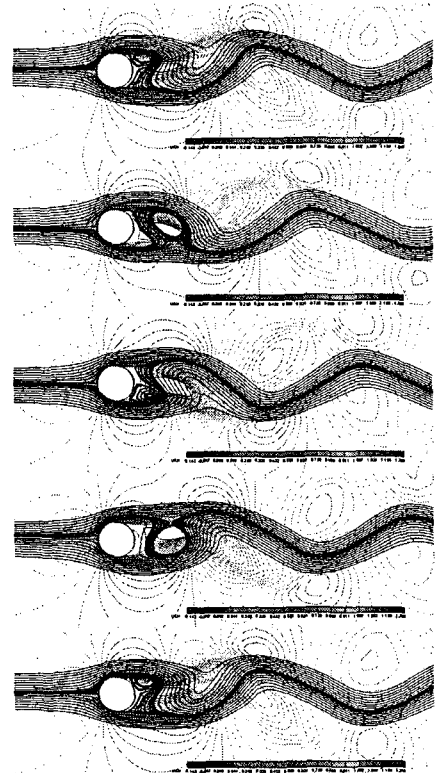


Fig. 8 한 주기 당 Vortex Shedding Cycle(Case 1)

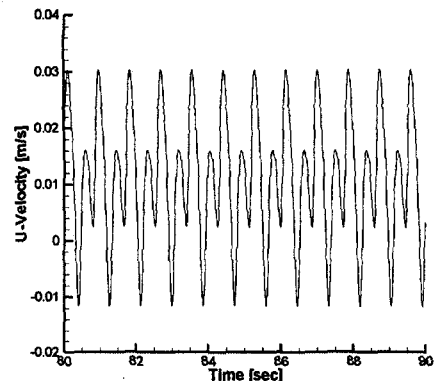


Fig. 9 실린더 중심에서 2.75cm아래 지점에서 x축 속도 (Case 1)

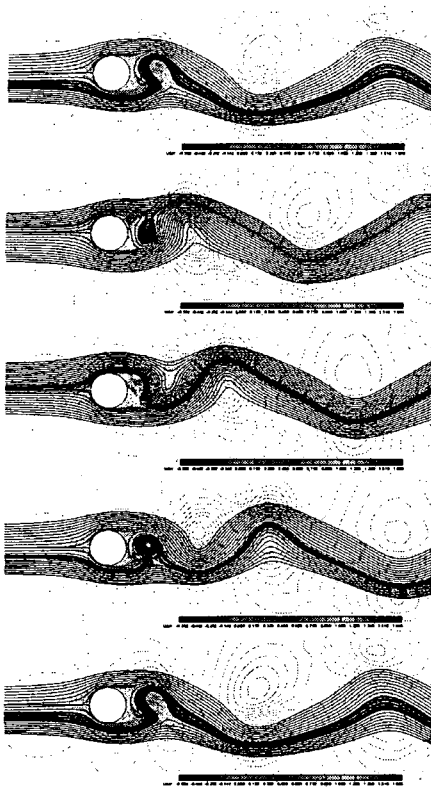


Fig. 10 한 주기 당 Vortex Shedding cycle(Case 2)

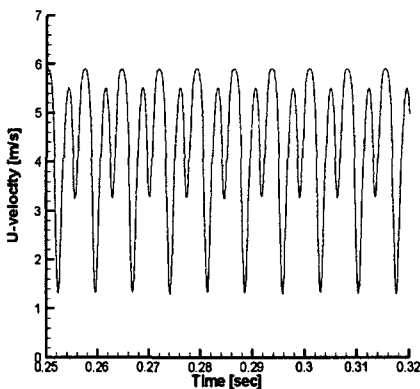


Fig. 11 실린더 중심에서 3.4cm아래 지점에서 x축 속도 (Case 2)

### 5. 결 론

본 연구에서는 기존의 압축성 해석 코드에 사용된 수치 해석 기법을 예조건화 기법이 적용된 수치 해석 기법으로 전이하는 방법을 제시하였다. 적용된 수치 해석 기법은 Roe의 해법으로 압축성 해석 방법에서 유도되어진 수치 플럭스의 수치 점성을 유동 속도에 따라 예조건화 기법이 적용된 수치 점성과 비교함으로써 서로간의 차이점과 유사점을 파악할 수 있었으며, 기존의 압축성 해석 코드의 구조를 유지하며 예조건화 압축성 코드로 변경할 수 있었다. 그리고, 개발된 코드에 대하여 cavity 유동 및 실린더 유동 등 몇 가지 정상 및 비정상 문제에 적용하여 코드의 정확도 및 신뢰도를 검증하여 보았다.

### 후 기

본 연구는 국방과학 연구소와 항공우주연구소의 연구비 지원으로 수행되었으며, 지원에 감사드립니다.

### 참고문헌

- [1] Choi, Y-H., Merkle, C.L. " The Application of Preconditioning in Viscous Flows", Journal of Computational Physics, Vol 105, pp207~223, 1993
- [2] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and Multigrid Method", J. of Comp. Phys. Vol 8, pp387~411, 1982
- [3] Armaly, B. F., Durst, F., Oeireira, K. C. F. and Schonung, B., "Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 127., pp473~496, 1983
- [4] R. F. Cuffel, L. H. Back, and P. F. Massier, "Transonic Flow Field in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature", AIAA J., Vol 7, No 7, 1364, 1969
- [5] Tritton, D., "Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers", Journal of Fluid Mechanics, Vol 6, pp. 547~657
- [6] Philip E. O. Buelow, Douglas A. Schwer, Jinzhang Feng, Charles L. Merkle, "A Preconditioned Dual-Time, Diagonalized ADI Scheme for Unsteady Computations", AIAA-97-2101, pp120~130, 1997