

공탄성 해석을 위한 보간 기법 비교 연구

이재훈^{*1}, 권장혁²COMPARATIVE STUDY ON THE INTERPOLATION
METHODS FOR THE AEROELASTIC ANALYSIS

Jaehun Lee, Jang Hyuk Kwon

The fluid-structure interaction analysis such as a static aeroelastic analysis requires the result of each analysis as an input to other analysis. Usually the grids for the fluid analysis and the structural analysis are different, so the results should be transformed properly for each other. The Infinite Plate Spline(IPS) and the Thin Plate Spline(TPS) are used in interpolating the displacement and the pressure. In this study, such interpolation methods are compared with kriging which provides a precise response surface. The static aeroelastic analysis is performed for the supersonic flow field with shock waves and the pressure field is interpolated by the TPS and kriging. The TPS shows tendency to weaken the shock strength, whereas kriging preserves the shock strength.

Key Words: 공탄성 해석(Aeroelastic Analysis), 표면 보간법(Surface Spline), 크리징(Kriging)

1. 서 론

유체-구조 연계 해석이란 유체 해석과 구조 해석이 서로 연계된 해석을 말한다. 대표적인 예로는 공탄성 해석을 들 수 있다. 일반적으로 유체 해석의 격자와 구조 해석의 격자는 서로 다르다. 따라서 각 해석의 결과는 다른 해석의 격자계에 맞도록 적절한 변환이 필요하다. 이와 같은 변환은 유체 해석과 구조 해석의 연계 방법에 따라 다르다. 유체 해석과 구조 해석을 연계하기 위해서 mode shape을 이용해 공탄성 방정식을 풀어 변위장, 속도장 등을 구하거나, 또는 하중과 변위를 각 해석의 격자에 맞게 직접 보간해주어야 한다. 전자의 경우에는 구조 해석 격자에서 구한 모드 형상을 유동장 해석 격자에 맞도록 보간해 주어야 한다. 후자의 경우에는 유동장 해석에서 나오는 압력 분포를 구조 해석의 하중으로 변환해 주어야 하고, 구조 해석을 통해 나오는 변형을 유동장 해석 격자에 맞도록 보간해주어야 한다. 전체 유체-구조 연계 해석은 각각의 해석이 수렴할 때까지 수행하게 된다.

기존에 많이 사용되던 보간 기법으로는 IPS(Infinite Plate Spline)와 TPS(Thin Plate Spline)를 들 수 있다[1,2]. 이들은 광범위하게 사용되고 있으며 특히 상용 소프트웨어인 MSC/Nastran의 공탄성 해석에도 쓰이고 있다.

Kriging은 반응면 구성 기법의 일종으로 초기에는 geostatistics 분야에서 고안된 것을 Sacks 등에 의해 수치 실험에 맞도록 변형되어 사용되어 왔다[3,4].

본 연구에서는 항공기 날개의 정적 공탄성 해석을 수행한다. 이 때 유동장 해석을 통해 구한 압력장을 보간 기법을 사용해 구조 해석 격자에 맞도록 변환한다. 보간 기법 중 TPS와 kriging을 사용해 이 두 가지 방법의 성능을 비교한다.

2. 이론적 배경

2.1 표면 보간법(Infinite Plate Spline, IPS)

표면보간법은 두께가 얇은 무한한 길이의 평판에 수직변위가 주어질 때 임의의 점에서의 변위를 계산해 준다[1]. 이는 무한평판 이론을 근거로 이루어진다. 무한 평판에 점 하중들이 가해질 때 평판의 변위 w 는 중첩을 통해 식 (1)과 같이 유도된다.

1 학생회원, 한국과학기술원 항공우주전공

2 정회원, 한국과학기술원 항공우주전공

* Corresponding author E-mail: jaehun94@kaist.ac.kr

$$w(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \sum_{i=1}^N [K_i(x, y) P_i] \quad (1)$$

식 (1)에는 $N+3$ 개의 미지수가 있고 이것들은 주어진 변위 w_i 와 식 (2)에 의해 구해질 수 있다.

$$\sum P_i = 0, \quad \sum x_i P_i = 0, \quad \sum y_i P_i = 0 \quad (2)$$

식 (2)를 행렬 형태로 표시하면 식 (3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} & 1 & x_1 & y_1 \\ K_{21} & 0 & K_{23} & \cdots & K_{2n} & 1 & x_2 & y_2 \\ K_{13} & K_{13} & 0 & \cdots & K_{1n} & 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{13} & K_{13} & K_{13} & \cdots & 0 & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (3)에서 $K_i(x, y)$, K_{ij} 는 식 (4), (5)와 같이 정의된다.

$$K_i(x, y) = \frac{\phi(r_i)}{16\pi D} = \frac{r_i^2 \ln r_i^2}{16\pi D} \quad (4)$$

$$K_{ij} = K_i(x_j, y_j) \quad (5)$$

그런데 행렬 계산의 크기가 커지면 수치적 불안정성이 발생하므로 이를 줄여주기 위해 regularization을 적용한다. 즉, K 행렬을 $K + \lambda I$ 로 대체한다.

2.2 Thin Plate Spline, TPS

TPS는 IPS에 3차원 효과를 추가한 것이다. 모든 구조 절점들이 같은 평면 내에 있을 경우엔 TPS를 사용할 수 없으며 이때에는 IPS를 사용해야 한다.

2.3 Kriging

Kriging에는 인자들의 상관관계를 모사할 수 있는 다양한 상관함수가 존재한다. 본 연구에서는 linear correlation function을 사용하였으며 distance parameter인 θ 를 구하기 위해 구배법의 일종인 BFGS를 사용하였다.

kriging predictor는 식 (6)과 같다. Y 는 sample response, F 는 design matrix를 의미한다.

$$\hat{y}(x) = f(x)^T \beta^* + r(x)^T \gamma^* \quad (6)$$

$$R\gamma^* = Y - F\beta^* \quad (7)$$

β^* 는 least square estimate으로 구할 수 있지만 큰 문제이거나 ill-condition일 경우 계산이 부정확해질 수 있다[5,6]. 따라서 β 는 식 (8)과 같은 overdetermined system에 대한 least square solution을 구한다.

$$F\beta \approx Y \quad (8)$$

우선 F, Y 에 대해 식 (9)와 같은 선형 방정식을 풀어 F, Y 를 구한다. 식 (9)에서 C 는 lower triangular matrix를 의미한다.

$$CF = F, CY = Y \quad (9)$$

이와 같이 구한 F 에 대해 QR factorization을 수행하면 식 (10)과 같이 된다. 이 결과를 이용해 식 (11)로부터 β^* 를 구할 수 있다.

$$F = QG^T \quad (10)$$

$$G^T \beta^* = Q^T Y \quad (11)$$

3. 수치 해석

3.1 유동장 해석

유동장 해석에는 본 연구실에서 개발된 코드인 KFLOW를 사용하였다. 이 코드는 FVM을 이용해 공간차분을 하고, 시간전진은 내재적 기법의 일종인 DADI를 사용하고, 다중격자, mesh sequencing 등을 이용해 수렴 가속을 한다[7]. 난류 효과를 고려하기 위해 Baldwin-Lowmax 모델을 사용하였다.

3.2 구조 해석

구조 해석에는 상용 소프트웨어인 MSC/Nastran을 사용하였다. 구조 모델링에는 스킨, 스파, 리브 등이 사용되었다. 스킨의 격자점 개수는 유동장 해석의 벽면의 격자점 개수와 동일하게 설정하였다. 구조 해석에는 CQUAD4 쉘 요소 사용을 사용하였다.

3.3 정적 공탄성 해석

정적 공탄성 해석 유동장에 의해 발생하는 공기력과 구조물의 상호작용을 고려하는 것이다. 그 과정은 다음과 같다. 유동장 해석을 통해 계산된 벽 주위 압력 분포는 구조 해석

에 필요하므로 이를 전해주게 되고, 구조 해석에 의해 나온 변위는 유동장의 격자 변형에 필요하므로 이를 역시 전해주게 된다. 이와 같은 반복적인 계산은 구조물의 변형이 더 이상 진행되지 않고 수렴하면 멈추게 한다.

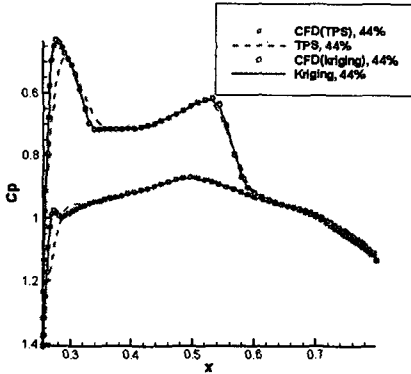


Fig. 1 Pressure coefficient for the converged static aeroelastic analysis at 44% span

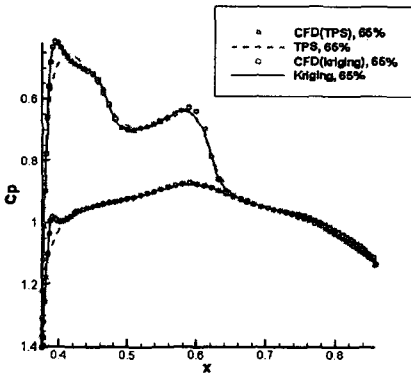


Fig. 2 Pressure coefficient for the converged static aeroelastic analysis at 65% span

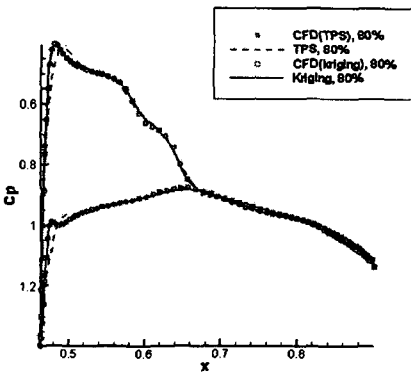


Fig. 3 Pressure coefficient for the converged static aeroelastic analysis at 80% span

3.4 수치 실험 및 결과

본 연구의 비교 대상인 TPS와 kriging을 충격파가 존재하는 압력장의 보간에 적용하여 정확도를 비교한다. 날개 형상은 ONERA-M6로서 유동장 해석에는 C-O 타입 격자를 사용하였고 격자 크기는 193×49×33로 31만개의 격자점이 쓰인다. 병렬 계산에는 총 16개의 CPU를 사용하였다. 유동 조건은 받음각이 3.06°, 레이놀즈 수는 11.7×10⁶, 마하수 0.8395 등이다.

Fig. 1-3에는 정적 공탄성 해석이 수렴한 후 44%, 65%, 80% 스패에서의 압력 계수를 표시한 것이다. 점은 유동장 해석으로 구한 압력 계수이고 이들은 TPS와 kriging을 통해 구조 격자로 보간되기 전의 값들을 의미한다. 반면 점선과 직선은 TPS, kriging을 이용해 구조 격자로 보간된 압력 계수를 의미한다. TPS의 결과는 전방 충격파 부근에서 크기와 최대값의 위치에 오차가 발생함을 알 수 있다. 반면에 kriging의 결과는 공력해석의 결과와 거의 일치한다.

Table. 1은 두 보간 기법을 사용한 해석 결과를 나타낸다. 계산 시간을 보면 kriging이 TPS보다 두 배 이상 오래 걸린다. 이는 kriging에는 distance parameter라는 것이 있어서 이것들의 값을 구하는 과정이 필요하기 때문이다. 해석의 결과는 두 기법 모두 큰 차이가 없음을 알 수 있다. Table. 2는 짓힘각 (sweep angle)의 변화에 대한 해석 결과의 민감도를 표시하고 있다. 즉 날개의 짓힘각을 1E-02 만큼 증가 시킨 후 해석 결과의 변화를 통해 민감도를 계산하였다. 이 때 민감도는 초기 값으로 정규화하였다. Table. 2에서 볼 수 있듯이 해석 결과는

Table. 1 Comparison of the static aeroelastic analysis between TPS and kriging

	1st iteration		4th iteration	
	TPS	Kriging	TPS	Kriging
Time(s)	45	100	45	88
C_L	1.631E-01	1.633E-01	1.632E-01	1.634E-01
C_D	9.472E-03	9.490E-03	9.476E-03	9.493E-03
Skin stress(MPa)	95.1	94.7	93.9	93.4
Spar stress(MPa)	85	84.5	83.2	82.6
최대변위 (cm)	1.504	1.492	1.469	1.456

Table. 2 Comparison of sensitivities with regard to a sweep angle

	TPS	Kriging
$\Delta C_L / \Delta x$	-0.01471	-0.01408
$\Delta C_D / \Delta x$	-0.03166	-0.02107
$\Delta \sigma_{skin} / \Delta x$	-0.01110	-0.01773
$\Delta \sigma_{spar} / \Delta x$	-0.03126	-0.03058
$\Delta \delta_{max} / \Delta x$	-0.00457	-0.00809



비슷할 지라도 민감도는 서로 다름을 알 수 있다. 특히 구조 해석의 결과에서 민감도의 차이가 크다. 이는 TPS는 압력장의 보간에 오차가 존재하기 때문에 이로 인해 민감도에 그 차이가 반영된 것으로 볼 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 정적 공탄성 해석에 보간 기법의 일종인 TPS와 kriging을 사용해 유동장 해석의 결과인 압력장을 유동장 해석 격자에서 구조 해석 격자로 변환하였다. TPS로 보간된 압력장에서는 전방 충격파의 강도가 약해진 것을 확인할 수 있었다. 반면에 kriging은 유동장 해석을 통해 나온 압력장과 거의 일치하는 결과를 보였다. 두 보간 기법을 이용한 해석의 결과값은 큰 차이가 없었지만 구조 해석에 대한 민감도는 다소 차이를 보였다. 이런 민감도의 차이는 이와 같은 해석을 이용한 설계를 할 경우 계산 시간이 오래 걸리게 하거나 부정확한 최적해를 줄 수 있다.

참고문헌

- [1] R.L. Harder and R.N. Desmarais, 1972, "Interpolation Using Surface Splines", *AIAA Journal*, Vol.9, No.2, p.189-191.
- [2] M.J. Smith, D.H. Hodges, and C.E.S. Cesnik, 2000, "Evaluation of Computational Algorithms Suitable for Fluid-Structure Interactions", *AIAA Journal*, Vol.37, No.2, p.282-294.
- [3] J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell, and H.P. Wynn, 1989, "Design and Analysis of Computer Experiments", *Statistical Science*, Vol.4, No.4, p.409-435.
- [4] T.W. Simpson, T.M. Mauery, J.J. Korte, and F. Mistree, 2001, "Kriging Models for Global Approximations in Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization", *AIAA Journal*, Vol.39, No.12, p.2233-2241.
- [5] S.N. Lophaven, H.B. Nielsen, and J. Sørensen, 2002, "A Matlab Kriging Toolbox Version 2.0", Denmark.
- [6] S.N. Lophaven, H.B. Nielsen, and J. Sørensen, 2002, "Aspects of the Matlab Toolbox DACE", *Technical Report, IMM-REP-2002-13*, Denmark.
- [7] Y. Kim, S.H. Park, C.-h. Sung, and J.H. Kwon, 2003, "Drag Prediction Workshop Results Using the Parallel Multigrid Solver KFLOW3D," *AIAA 2nd Drag Prediction Workshop*, Orlando.