

비대칭 박벽 탄성 곡선보의 엄밀한 정적 요소강도행렬

Exact Static Element Stiffness Matrix of Nonsymmetric Thin-walled Elastic Curved Beams

윤희택*
Yoon, Hee-Taek

김문영**
Kim, Moon-Young

김용기***
Kim, Young-Ki

ABSTRACT

In order to perform the spatial buckling analysis of the curved beam element with nonsymmetric thin-walled cross section, exact static stiffness matrices are evaluated using equilibrium equations and force-deformation relations. Contrary to evaluation procedures of dynamic stiffness matrices, 14 displacement parameters are introduced when transforming the four order simultaneous differential equations to the first order differential equations and 2 displacement parameters among these displacements are integrated in advance. Thus non-homogeneous simultaneous differential equations are obtained with respect to the remaining 8 displacement parameters. For general solution of these equations, the method of undetermined parameters is applied and a generalized linear eigenvalue problem and a system of linear algebraic equations with complex matrices are solved with respect to 12 displacement parameters. Resultantly displacement functions are exactly derived and exact static stiffness matrices are determined using member force-displacement relations. The buckling loads are evaluated and compared with analytic solutions or results by ABAQUS's shell element.

1. 서론

연계논문⁽⁷⁾에서 비대칭 박벽곡선보의 엄밀한 동적강도행렬을 유도하는 과정을 제시하였다. 이전의 연구에서 박벽 곡선보의 동적강도행렬을 산정하는 여러 가지 방법을 제안했지만, 엄밀한 정적강도행렬을 산정하는 일관된 기법을 제시한 연구는 찾아볼 수 없다. 본 연구에서는 박벽 곡선보 구조의 좌굴해석을 수행하기 위하여 임의의 경계조건을 가지며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 해석기법을 제안한다. 먼저 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 평형방정식과 힘-변위 관계식으로 부터 14개의 변위 파라미터를 도입하여 1차 연립미분방정식으로 변환한다. 이때 운동방정식의 경우와는 달리 평형방정식은 2개의 적분상수가 발생하므로 미정계수법을 적용하여 이를 미리 제거한 후 12개의 비제차 연립 1계 미분방정식에 대응하는 선형 고유치 문제를 구한다. 이로부터 제차해와 특별해를 각각 구하여 엄밀한 처짐함수를 산정하고, 힘-변위 관계식에 이를 적용함으로써 엄밀한 14×14 정적 요소강도행렬을 구한다. 이러한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 비대칭 단면을 가지는 단순지지, 캔틸레버 박벽 곡선보에 대한 좌굴하중을 산정하고, 해석해 혹은 ABAQUS의 쉘 요소를 이용한 유한요소 해와 비교, 검토한다.

* 한국철도기술연구원 선임연구원, 정회원

** 성균관대학교 토목환경공학과 교수

*** 한국철도기술연구원 책임연구원, 정회원

2. 엄밀한 변위함수의 유도

2.1 평형방정식의 변환

연계연구(7)에서 도심에서 정의한 7개의 변위파라미터를 바탕으로 비대칭 단면을 가진 박벽 곡선보에 대한 평형방정식과 힘-변위 관계식을 구한 바 있다. 안정성 해석을 위한 비대칭 곡선 박벽 보요소의 엄밀해를 구하는데, 연계연구(8)에서 개발된 운동방정식의 해법을 그대로 사용할 수 없다. 왜냐하면 14개의 연립 미분방정식으로 변환한 후 고유치문제의 해를 구할 때 복수개의 '영'의 값을 갖는 고유치가 발생하기 때문이다. 이러한 '영'의 값을 갖는 고유치를 제거하기 위하여 미리 적분해야 하며, 이의 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & EI_3 \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + \frac{1}{R} EI_\phi \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) - \frac{1}{R} GJ \left(\theta + \frac{1}{R} U_y \right) \\
 & + \frac{1}{R} EI_{2\phi} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) + EI_{3\phi} \left\{ \frac{1}{R} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right\} \\
 & + EI_{23} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) - {}^oF_1 U_y - \frac{1}{R} {}^oM_p \left(\theta + \frac{1}{R} U_y \right)
 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $a_i, i = 5, 6$ 는 평형방정식을 적분할 때 발생한 적분상수이다. 박벽 곡선보의 평형방정식⁽⁷⁾과 식 (1)을 고려하여 14개의 변위 파라미터로 구성되는 변위벡터를 정의한다.

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \quad (2)$$

운동방정식의 해를 구하는 경우와는 달리, 14개 변위파라미터 중에서 2개의 파라미터는 다음과 같이 1차 함수와 상수로 가정할 수 있다.

$$d_5 = a_5 + a_6 x, \quad d_6 = d_5' = a_6 \quad (3a-b)$$

식 (3)의 2개의 변위파라미터를 제외한 나머지 12개의 변위파라미터로 구성된 벡터 \mathbf{d}_s 는 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_s(\mathbf{x}) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \quad (4)$$

식 (1)과 (4)로 부터 변위벡터식 \mathbf{d}_s 에 대한 12개의 연립 미분방정식을 행렬식으로 나타낼 수 있으며, 이는 비제차(non-homogeneous) 연립 미분방정식으로 이의 일반해는 제차해와 특별해로 구성됨은 널리 알려진 사실이다.

$$\mathbf{A} \mathbf{d}_s' = \mathbf{B} \mathbf{d}_s + \mathbf{C} \quad (5)$$

2.2 14개의 연립 미분방정식의 일반해

전술한 바와 같이, 식(5)는 비제차 연립 미분방정식으로 이의 일반해는 다음과 같이 12개의 변위파라미터에 대한 특별해와 제차해로 구성된다. 여기서, $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_c$ 는 상수이며, $\mathbf{X}^h(\mathbf{x}), \mathbf{G}$ 는 연계는

문⁽⁷⁾에 자세히 나와 있다.

$$d_s = d_s^h + d_s^p = X^h(x) a_s + G a_c \quad (6)$$

2개의 변위파라미터에 대한 가정함수인 식 (3)과 12개의 변위파라미터에 대한 해인 식 (6)으로부터 식 (2)에서 정의한 14개의 변위성분의 엄밀해를 구성할 수 있다.

$$d(x) = X(x) a \quad (7)$$

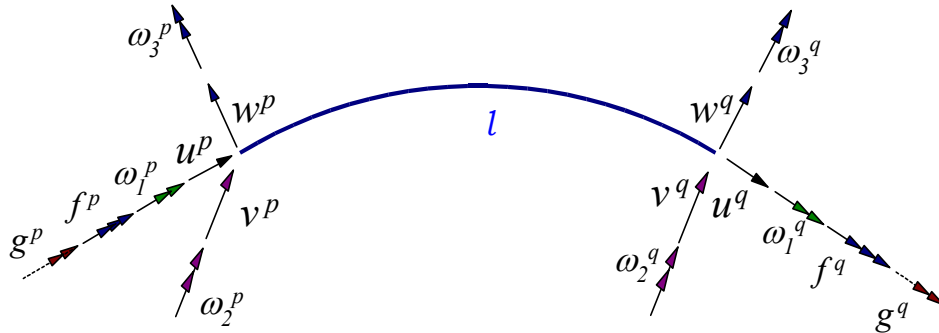


그림 1. 박벽 곡선보 요소의 절점변위 벡터

이제 복소계수 a 를 그림 1과 같은 박벽보 요소 양단의 14개의 절점변위 성분으로 표시하기 위하여 다음과 같이 절점변위 벡터를 정의한다.

$$U_e = \langle U^p, U^q \rangle^T \quad (8)$$

여기서 $U^\alpha = \langle u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha, \omega_3^\alpha, f^\alpha \rangle^T$, $\alpha = p, q$ 이다. 부재 양단의 좌표($x = 0, l$)를 식 (8)에 대입하면 절점변위벡터 U_e 를 적분상수벡터 a 로 나타낼 수 있다.

$$U_e = E a \quad (9)$$

$$a = E^{-1} U_e \quad (10)$$

여기서 E 의 각 요소는 $X(x)$ 로부터 부재양단의 x 좌표를 대입하여 쉽게 구할 수 있다. 식 (10)을 식 (7)에 대입하여 복소계수 a 를 소거하면, 최종적으로 14개의 변위성분으로 구성되는 엄밀한 변위함수를 구할 수 있다.

$$d(x) = X(x) E^{-1} U_e \quad (11)$$

3. 정적 요소강도행렬의 산정

상기에서 구한 엄밀한 변위함수로 부터 곡선보 요소의 정적강도행렬을 산정할 수 있다. 이후의 과정은 요소의 힘-변위 관계식을 적용한다는 것을 제외하면 동적강도행렬의 경우⁽⁸⁾와 동일하다. 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 힘-변위관계식⁽⁷⁾에 14개의 변위 파라미터를 도입하여 정리하고, 이를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$f(x) = Sd(x) \quad (12)$$

요소의 절점변위를 나타내는 식 (11)을 식 (12)에 대입하면, 임의의 좌표 x 에서 박벽보 요소에 대한 단면력과 변위 파라미터와의 관계식을 구할 수 있다.

$$f(x) = SX(x) E^{-1} U_e \quad (13)$$

한편, 부재 양단의 절점력 벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$F_e = \langle F^p, F^q \rangle^T \quad (14)$$

여기서, $F^\alpha = \langle F_1^\alpha, F_2^\alpha, F_3^\alpha, M_1^\alpha, M_2^\alpha, M_3^\alpha, M_\phi^\alpha \rangle^T$, $\alpha = p, q$ 이다. 이로부터 부재 양단 ($x = 0, l$)의 부재력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F^p &= -f(0) = -SX(0) E^{-1} U_e \\ F^q &= f(l) = SX(l) E^{-1} U_e \end{aligned} \quad (15a-b)$$

식 (15)로 부터 박벽 곡선보의 엄밀한 정적 요소강도행렬 K 를 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$F_e = K U_e \quad (16)$$

$$\text{여기서, } K = \begin{bmatrix} -SX(0) E^{-1} \\ SX(l) E^{-1} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

이상으로부터 박벽보 구조의 좌굴하중은 대응하는 하중파라미터 λ 를 변화시킴으로서 정적강도행렬의 행렬식이 '영'이 되는 조건으로부터 구할 수 있다.

$$\det |K(\lambda)| = 0 \quad (17)$$

4. 수치해석

본 연구에서 제안한 수치해석 기법의 정확성을 검증하기 위하여 단순지지, 캔틸레버 박벽 곡선보 구조에 대한 좌굴하중을 산정하고, 해석해나 ABAQUS를 사용한 유한요소 해와 비교하였다.

4.1 편심축하중을 받는 비대칭 단순지지 박벽보의 횡-비틀좌굴해석

표 1은 아래의 단면과 재료상수를 가지는 단순지지 박벽보에 대하여 본 연구의 방법과 해석해를 비교한 것이다. 보는 바와 같이 두 결과는 서로 정확히 일치함을 알 수 있다.

$$E = 10000.0 \text{ N/cm}^2, G = 5000.0 \text{ N/cm}^2, A = 30.0 \text{ cm}^2, L = 100.0 \text{ cm},$$

$$I_2 = 100.0 \text{ cm}^4, I_3 = 800.0 \text{ cm}^4, I_\phi = 150.0 \text{ cm}^6, J = 10.0 \text{ cm}^4, \rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3,$$

$$e_2 = 6.0 \text{ cm}, e_3 = 10.0 \text{ cm}, \beta_2 = 5, \beta_3 = -10$$

표 1. Flexural-torsional buckling loads [N]

mode	The axial load oF_1 at shear center		The axial load oF_1 at centroid		The axial load oF_1 at $(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-5, 7)$	
	Present study	Analytic solution	Present study	Analytic solution	Present study	Analytic solution
n=1	186.523	186.523	279.897	279.897	263.490	263.490
n=2	986.960	986.960	1308.45	1308.45	4693.29	4693.29
n=3	7895.68	7895.68	36513.6	36513.6	15447.9	15447.9

4.2 축하중을 받는 캔틸레버 박벽보의 횡-비틀좌굴해석

일반적으로 비대칭 단면을 가지는 캔틸레버 박벽보의 3차원 좌굴하중에 대해서는 해석해를 구할 수가 없으므로 ABAQUS의 쉘 요소를 이용한 유한요소 해와 본 연구의 해석결과를 비교한다. 그림 2와 같이 축력이 도심에 작용하는 캔틸레버 박벽보에 대한 단면과 재료상수는 다음과 같다.

$$E = 30000.0 \text{ N/cm}^2, G = 11500.0 \text{ N/cm}^2, A = 8.0 \text{ cm}^2, t = 0.5 \text{ cm}$$

$$I_2 = 114.812 \text{ cm}^4, I_3 = 7.6048 \text{ cm}^4, I_\phi = 70.9687 \text{ cm}^6, J = 0.6667 \text{ cm}^4,$$

$$e_2 = 1.5894 \text{ cm}, e_3 = -2.5723 \text{ cm}, \beta_2 = 5.6617, \beta_3 = 11.0599, \beta_\phi = -0.5586,$$

$$\theta = 0.10906 \text{ rad}, L = 200.0 \text{ cm}$$

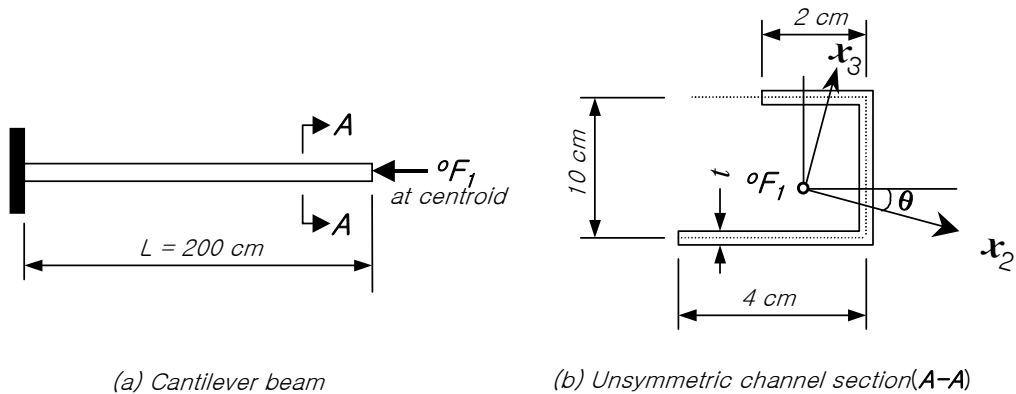


그림 2. Cantilever beam with unsymmetric channel section

좌굴하중은 가장 작은 값만 물리적 의미를 갖지만, 여기서는 수치적인 비교를 위하여, 표 2에 정적 강도행렬을 이용한 7개의 엄밀해와 쉘요소를 이용한 유한요소 해를 함께 제시하였다. 표에서 보는 바와 같이 두 해석 결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

표 2. Flexural-torsional buckling loads under axial load at the centroid [N]

mode	Present Study	ABAQUS
1	13.902	13.983
2	112.80	114.81
3	191.74	193.94
4	257.24	265.82
5	411.01	421.44
6	529.42	526.81
7	571.69	573.23

5. 결론

비대칭 단면을 가지는 곡선 박벽보의 3차원 좌굴해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석 기법을 제안하였다. 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식으로 표현되는 비대칭 곡선 박벽보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 재단력-변위 관계식을 적용하여 엄밀한 정적 요소강도행렬을 산정하였다. 이를 이용하여 단순지지, 캔틸레버 곡선보 구조에 대한 좌굴하중을 산정하고, 해석해나 유한요소 해와 비교함으로써 본 해석기법의 타당성을 검증하였다. Hermitian다항식과 같이 형상함수를 도입하여 산정하는 요소 강도행렬과는 달리, 본 연구에서 산정한 요소 강도행렬은 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있다는 장점을 가지고 있다.

참고문헌

1. Friberg, P. O.(1985) "Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams," Int. j. numer. methods eng., 21, pp.1205-1228
2. Banerjee, J. R.(1989), "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements", Int. J. Num. Meth. Eng., 28, pp.1283-1298
3. Banerjee, J. R. and Williams, F. W.(1994), "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded Timoshenko beam element", Int. J. Solids Structures, 31(6), pp.749-762
4. Banerjee, J. R., Guo, S. and Howson, W. P.(1996), "Exact dynamic stiffness matrix of a bending-torsion coupled beam including warping", Computers & Structures, 59(4), pp.613-621
5. ABAQUS, User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992
6. Microsoft, Fortran PowerStation Programmer's Guide, Microsoft Corporation, 1995
7. 윤희택(2001), "비대칭 박벽거더의 개선된 자유진동, 좌굴 및 응력해석", 박사학위 논문, 성균관대학교.
8. 윤희택 외(2004), "축하중을 받는 비대칭 박벽 곡선보의 엄밀한 동적강도행렬", 철도학회 추계학술대회 논문집