최적제어를 이용한 도시철도 차량 주행제어 연구

A study on the operation perfomance control of urban rail vehicle using an optimal control

탁길훈* 김동환** 김치태***
Tak, Kil Hun Kim, Dong Hwan Kim, Chi Tae

ABSTRACT

When it comes to automatic operation control of urban rail vehicle, a PID control makes it run between stations within the fixed time and stop exactly at the stop sign on the platform, satisfying jerk limit. An optimal control is applied to automatic operation performance control to minimize energy consumption while the urban rail vehicle satisfies automatic operation condition on this paper. The control performance in terms of energy minimization along with the constraint on precision stops is compared between the optimal control and PID control.

1. 서 론

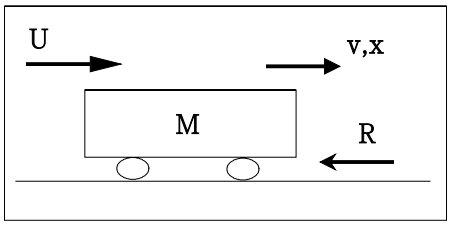
철도기술의 발전과 더불어 경제의 발전은 차원 높은 서비스를 원하는 승객의 욕구를 충족시키고, 경영의 효율화를 달성할 목적으로 도시철도 5, 6, 7, 8호선 도시철도차량에는 자동열차운행장치(ATO : Automatic Train Operation)가 도입되어 무인 및 자동운전이 가능하게 되었다. 자동열차운행장치(ATO)에는 일반적으로 PID(비례-적분-미분) 제어 이론이 적용되고 있으며, 목표속도가 주어지고 목표속도와 실제속도의 오차를 보상하여 자동운전을 함으로써 사람의 수동운전을 대신하고 있다. PID제어를 적용한 도시철도차량 자동주행 제어는 목표속도를 추종하여 져크한계를 만족하면서 정해진 시간내에 역간을 주행하여 정차지점에 정확히 정차하도록 운행되지만 소비되는 주행에너지 최소화를 고려하지는 않는다. 본 논문에서는 위의 도시철도차량 자동주행 조건을 만족하면서도 자동주행시 소비되는 주행에너지가 최소화되도록 최적제어를 적용하여 전동열차 모델링을 하였으며, 동일한 운행 조건하에서 최적제어와 PID제어 간 주행에너지 소모를 비교 평가하였다.

* 서울특별시 도시철도공사 대리, 정회원
** 서울산업대학교 기계설계자동화공학부 교수, 정회원
*** 한국철도공사 기술개발실 차장, 정회원

1. 전동열차 모델링

1.1 전동열차 수학적 모델

본 논문에서 사용한 대상 시스템으로서의 열차 모델은 점질량(point mass)을 가정한 모델이다. 뉴우턴의 운동방정식을 토대로 이 점질량의 시간에 따른 위치와 속도에 대한 미분방정식을 세우면 식(1)과 같다.



$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$M\ddot{x}(t) = U(t) - R(v(t)) + G(x(t)) \text{ -- 식(1)}$$

t는 시간, $x(t)$는 열차의 위치, $v(t)$는 열차의 속도, M은 열차의 질량, $U(t)$는 열차에 가해진 힘, $-R(v(t))$는 주행저항, 그리고 $G(x(t))$는 구배저항을 나타낸다. 여기서 역행력과 제동력이 동일하고 열차 저항은 주행저항 중에 속도에 비례하는 차륜답면과 레일간의 마찰저항(b)만 존재하고 다른 열차 저항은 없다고 가정하여 다시 미분방정식을 세우면 식(2)와 같다.

$$M\ddot{x}(t) = U(t) - bM\dot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) = U(t)/M - b\dot{x}(t) \text{ ---------- 식(2)}$$

참고로 지하구간 주행저항 R은 다음식으로 표현된다.

$$R = (a + bV)W + cV^2 (kgf)$$

R: 총주행저항(kgf)

V: 열차속도(km/h)

W: 열차중량(ton)

a: 기계부분 저항(속도와무관)

b: 차륜답면과 레일간의 저항(속도에 비례)

c: 공기저항과 차량동요저항(속도자승에 비례)

1.2 상태방정식($\dot{X} = AX + BU$)

열차의 위치(x)를 x_1, 열차의 속도(v)를 x_2라 하면 다음 미분방정식으로 표현된다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + (1/M)U$$

이 미분방정식을 상태방정식으로 나타내면 식(3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} U \text{ ---------- 식(3)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix}: \text{상태행렬}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}: \text{입력행렬}$$

M은 열차질량으로 서울시 6호선 전동차 1편성 열차 공차하중 W(272ton)에서 다음과 같이 구할수 있다

M = W/g = 272ton/9.8m/sec = 27,755(kg)

b는 차륜과 레일간의 마찰저항으로 속도에 비례하며 km/h와 m/sec의 단위 환산을 적용하면 다음과 같다.

b = 0.0359 × 1000 / 3600 = 0.01

2. 최적제어 설계

2.1 최적추종제어(Linear Tracking Problem) 이론

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ ------ 식 (4)}$$

$$J = \|\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{r}(t_f)\|_{\boldsymbol{H}}^2 + \int_{t_0}^{t_f} [\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{r}(t)\|_{\boldsymbol{Q}}^2 + \|\boldsymbol{u}(t)\|_{\boldsymbol{R}}^2] dt \text{ --- 식 (5)}$$

최적추종제어는 식(4)와 같은 시스템의 $\boldsymbol{x}(t)$가 $\boldsymbol{r}(t)$을 추종하는데 있어서 식(5)와 같이 주어진 성능지수를 최소화하는 최적제어입력 $\boldsymbol{u}(t)$을 결정하는 것이다. 본 논문에서는 $\boldsymbol{r}(t)$을 열차위치 기준값, $\boldsymbol{x_1}(t)$을 $\boldsymbol{r}(t)$을 추종하는 열차위치, $\boldsymbol{u}(t)$을 열차에 가해진 힘으로 설정했다.

성능지수를 최소화하는 제어입력 u는 최적제어 이론에 의해 식(6)과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) - R^{-1}(t)B^T(t)s(t) \text{ --- 식 (6)}$$

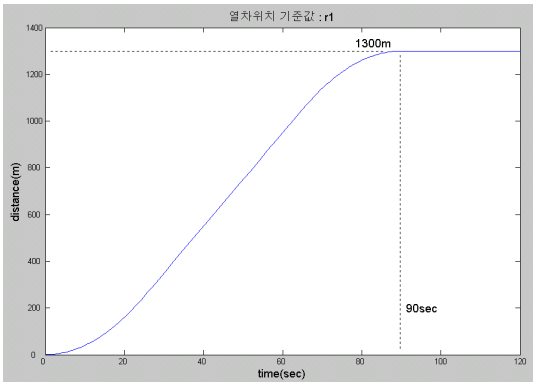
여기서

$$\dot{K}(t) = -\boldsymbol{K}(t)A(t) - A^T K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

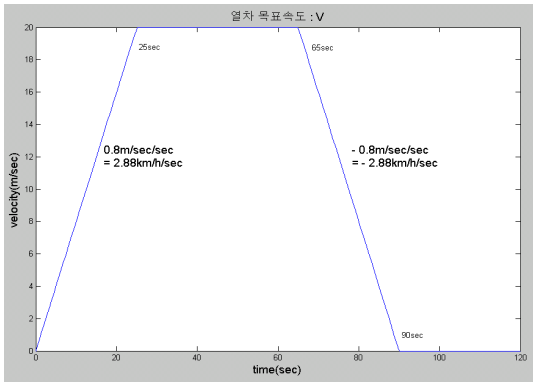
$$\dot{s}(t) = -[A^T(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]s(t) + Q(t)r(t)$$

2.2 Matlab을 이용한 최적제어기 설계

2.2.1 추종하고자 하는 열차위치 기준값(r1)과 열차 목표속도 기준값(v)



[그림1. 열차위치 기준값 : r1]



[그림2. 열차속도 기준값 : V]

A역과 B역간의 거리는 1300m이며, A역을 출발한 전동열차가 0.8m/sec^2(2.88km/h/sec)의 가속도로 25초간 운행하여 속도20m/sec(72km/h)로 40초간 등속 운행 후 0.8m/sec^2(2.88km/h/sec)의 감속도로 25초간 운행하여 B역에 도착하는 것으로 열차의 속도 궤적을 가정한다.

2.2.2 제어입력 u값(열차에 가해지는 힘)의 결정

상태행렬 A와 입력행렬 B는 위의 열차 모델링으로부터 A=[0 1;0 -b], B=[0;1/M]으로 주어지고, boundary 조건을 H=[0 0;0 0], K(T)=H=0, S(T)=-Hr=0으로 하여, 반복적인 모델링을 통해 R값과 Q값을 구하면 성능지수 J를 최소화하는 제어입력 u값이 결정된다.

최적제어의 설계 과정은 다음과 같으며, 우선 성능지수 J가 주어진다.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [Q(\boldsymbol{x_1}(t) - \boldsymbol{r_1}(t))^2 + R\boldsymbol{u}^2(t)] dt \;\Rightarrow\; J = \int_{t_0}^{t_f} [2(\boldsymbol{x_1}(t) - \boldsymbol{r_1}(t))^2 + (1 \times 10^{-8}\boldsymbol{u}^2(t))] dt$$

이 성능지수를 최소화하는 최적 제어입력 $\boldsymbol{u}$값을 결정하기 위해 A=[0 1;0 -b], B=[0;1/M], R=1×10^{-8}, Q=[2 0;0 0]일 때 matlab에서 care함수를 이용하여 K값을 구한다.

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t) = -\boldsymbol{Q}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{T}(t)\boldsymbol{K}(t) - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}^{T}(t)\boldsymbol{K}(t)$$

$$[k,l,g] = care(A, B, Q, R)$$

$$k = [3.9626\ 3.9252; 3.9252\ 7.6999]$$

다음은 K값을 이용하여 다음과 같이 S값을 구한다.

$$\dot{\boldsymbol{s}}(t) = -[\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(t) - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{T}(t)]\boldsymbol{s}(t) + Q(t)r(t)$$

$$s = inv(A' - \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{1}/\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}') \times Q \times r$$

$$s = [-3.9626 \times r_1; 3.9252 \times r_1]$$

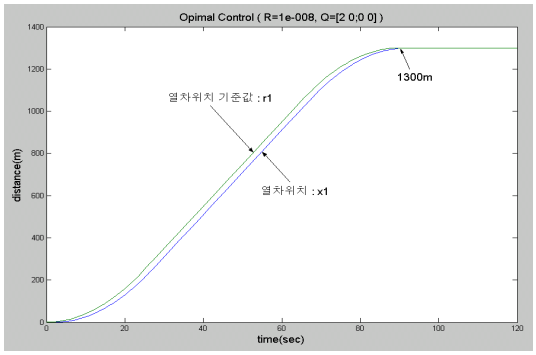
A, B, R, k, s 값이 정해지면 다음과 같이 최적 제어입력 $\boldsymbol{u}^{*}$값을 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{u}^{*}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{T}(t)\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) - R^{-1}(t)B^{T}(t)s(t)$$

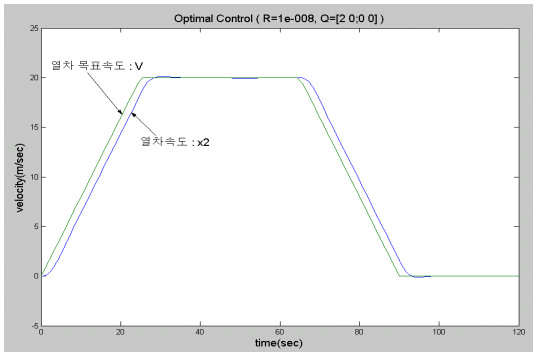
$$\boldsymbol{u}^{*}(t) = -1/R \times 1/M \times [k_{12} \times x_1(t) + k_{22} \times x_2(t) + s_2(t)]$$

$$\boldsymbol{u}^{*}(t) = -1.4142 \times 10^{4} \times x_1(t) - 2.7742 \times 10^{4} \times x_2(t) + 1.4142 \times 10^{4} \times r_1(t)$$

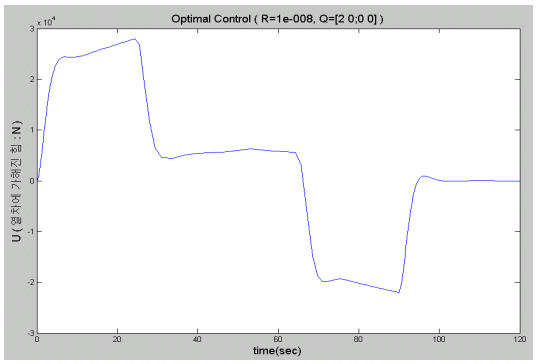
2.3 x_1(열차위치), x_2(열차속도), u(열차에 가해지는 힘), 주행에너지 그래프



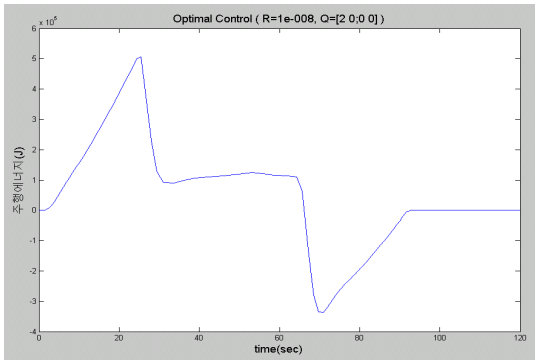
[그림3. 열차위치(x1) 그래프]



[그림4. 열차속도(x2) 그래프]



[그림5. U(열차에 가해지는 힘) 그래프]



[그림6. 주행에너지 그래프]

3. PID제어 설계

3.1 PID제어 이론

PID제어는 비례(Proportional), 적분(Integral), 미분(Derivative) 제어의 세 부분을 조합 하여 구성하는 제어로 정상상태 응답과 과도상태 응답을 모두 개선할 수 있다.

PID제어 전달함수 $C(s)$는

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$$

여기서, K_p, K_d, K_i는 비례계수, 미분계수, 적분계수임,

제어신호 $U(t)$의 시간영역 표시

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{d}{dt} e(t) + K_i \int_0^T e(t) dt$$

3.2 Matlab을 이용한 PID제어기 설계

추종하여야 할 열차위치 기준값(r1), 열차 목표속도 기준값(v)는 그림1, 그림2와 같이 최적제어기 설계 조건과 동일하다.

제어할 시스템(열차 모델)을 Matlab에서 미분방정식으로 다음과 같이 나타낸다..

$$xdot(1,1) = x(2,1)$$

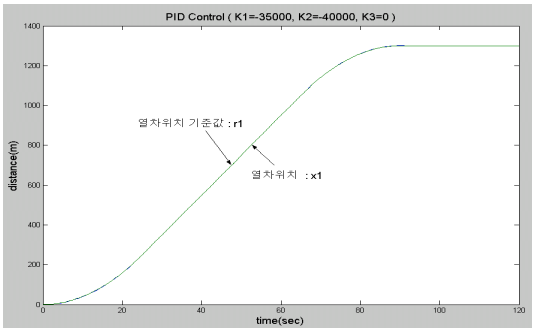
$$xdot(2,1) = U/M - b \times x(2,1)$$

제어신호 U(열차에 가해지는 힘)를 다음과 같이 나타낸다.

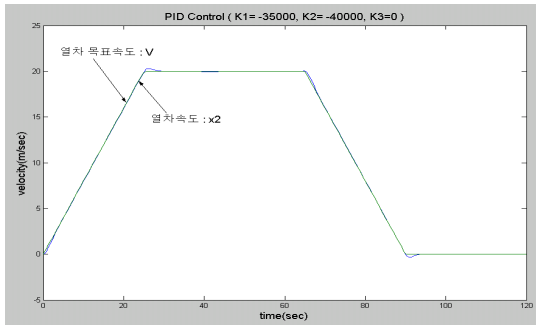
$$U = K_1 \times (x(1,1) - r_1) + K_2 \times (x(2,1) - v) + K_3 \times \int_0^T (x(1,1) - r_1) dt$$

K1, K2, K3 계수를 조정하여 원하는 U값을 구한다.

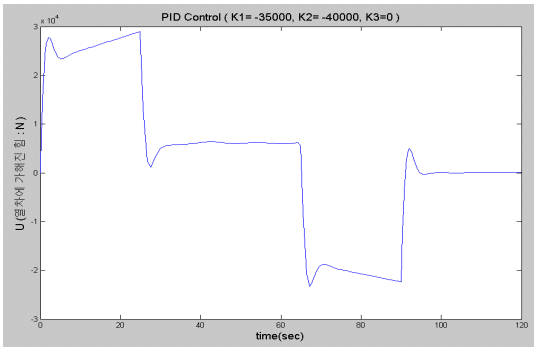
3.3 x_1(열차위치), x_2(열차속도), u(열차에 가해지는 힘), 주행에너지 그래프



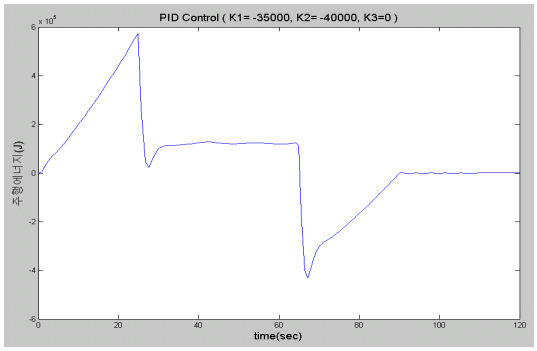
[그림7. 열차위치(x1) 그래프]



[그림8. 열차속도(x2) 그래프]



[그림9. U(열차에 가해지는 힘) 그래프]



[그림10. 주행에너지 그래프]

4. 최적제어와 PID제어의 주행에너지 비교 검토

4.1 주행에너지 비교

주행에너지 J는 u(열차에 가해지는 힘)와 x_2(열차속도)의 곱셈의 합으로 구할 수 있다.

$$J = \int_0^T F(t) v(t) dt \quad \Rightarrow \quad J = \sum_{i=1}^{n} U(i) x_2(i)$$

열차의 주행에 의해 소비된 에너지 J (J)는 역행시에 소비된 역행에너지에서 회생제동시 반환된 제동에너지를 빼주어 계산된다.

A역에서 B역간 1300m를 동일한 속도 궤적을 따라 주행했을 때 최적제어와 PID제어간 소비된 주행에너지는 표(1)과 같이 나타났다.

제 어	역행에너지(①)	제동에너지(②)	총에너지(①+ ②)	소비에너지(①-②)	비 고
최적제어	8,106,850 J	4,471,150 J	12,578,000 J	3,635,700 J	
PID제어	11,597,850 J	6,555,150 J	18,153,000 J	5,042,700 J	

[표1. 최적제어와 PID제어의 주행에너지 비교]

최적제어의 총주행에너지(역행+ 제동)는 12,578,000(J)로 PID제어의 총주행에너지 18,153,000(J)의 69%만 사용했고, 최적제어의 소비된 주행에너지(역행-제동)는 3,635,700(J)로 PID제어의 소비된 주행에너지 5,042,700(J)의 72%만 사용했다. 즉, 소비된 주행에너지를 기준으로 최적제어를 사용시 PID제어에 비해 28%의 에너지 절감 효과가 나타났다.

4.2 열차위치 기준값 추종성 비교

A역과 B역간의 거리 1300m를 90초에 주행하는 것을 기준값(r1)으로 정하여, 열차위치(x1)가 기준값(r1)을 추종하는 상태를 확인한 결과 최적제어는 91.5초에 1300m를 주행했고, PID제어는 90초 에 1300m를 주행했다. PID제어의 기준값 추종성이 좋게 나타났다.

5. 결 론

본 논문에서는 동일한 역간거리, 동일한 속도궤적 조건하에서 전동열차 모델링을 통해 최적제어와 PID제어의 소비된 주행에너지를 비교 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 최적제어는 PID제어에 비해 총주행에너지(역행에너지+ 제동에너지)는 31%의 에너지 절감 효과가 있고, 소비된 주행에너지(역행에너지-제동에너지)는 28%의 에너지 절감 효과가 있는 것으로 나타났다.

둘째, 최적제어의 기준값(역간거리 1300m를 90초에 주행)에 대한 추종성은 1300m를 91.5초에 주행하여 1.5초의 오차가 발생했으나, PID제어는 기준값(역간거리 1300m를 90초에 주행)에 대해 1300m를 90초에 주행하여 추종성이 좋았다.

이상으로부터 최적제어가 전동열차 자동 주행에너지 절감에 탁월한 효과가 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

1. Donald E. Kirk, "Optimal Control Theory An Introduction", 1970.
2. Richard C. Dorf & Robert H. Bishop "Modern Control System", 2005.
3. S.H Han et al.(1999), “An Optimising Automatic Train Operation(ATO) Control Using Genetic Algorithms” Proc. of the IEEE Region 10 Conference-Vol.1, 1999
4. 김치태, “전동열차 주행에너지 소비를 최소화하는 최적운전", 철도기술대학원, 2001
5. 김재영, “도시철도차량 운행에 있어 에너지 절감을 위한 자동운전패턴에 관한 연구”, 철도전문대학원, 2003
6. 변윤섭 & 한성호, “미지의 주행저항을 고려한 도시철도차량 ATO의 속도추종 및 정밀정차 제어” 한국철도학회 1999년도 추계학술대회 논문집, pp.280~287, 1999.