

무차원 동영향 함수를 이용한 자유단 경계를 가진 임의 형상 평판의 진동해석: 직선 및 곡선 경계가 혼합된 경우

최 장훈¹⁾, 강 상욱²⁾

Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions: the case that straight and curved boundaries are mixed

Janghoon Choi, Sangwook Kang

Key words : Non-dimensional Dynamics Influence Function(무차원 동영향 함수), Free Plate(자유단 평판), Free vibration(자유진동), Local Polar Coordinate(지역 극좌표계)

Abstract : Free Vibration Analysis using Non-dimensional Dynamic Influence Function (NDIF) is extended to arbitrarily shaped plates including polygonal plates. Since the corners of polygonal plates have indefinite normal directions and additional boundary conditions related to a twisting moment at a corner along with moment and shear force zero conditions, it is not easy to apply the NDIF method to polygonal plates with the free boundary condition. Moreover, owing to the fact that the local polar coordinate system, which has been introduced for free plates with smoothly varying edges, cannot be employed for the straight edges of the polygonal plates, a new coordinate system is required for the polygonal plates. These problems are solved by developing the new method of modifying a corner into a circular arc and setting the normal direction at the corner to an average value of normal directions of two edges adjacent to the corner. Some case studies for plates with various shapes show that the proposed method gives credible natural frequencies and mode shapes for various polygons that agree well with those by an exact method or FEM (ANSYS).

1. 서 론

본 논문의 저자들에 의해 NDIF 법은 1차원 문제(현, 빔)에서 2차원 문제(멤브레인, 평판)까지 고정단 및 단순지지 등의 여러 가지 경계조건에 대하여 성공적으로 확장되어 졌다. 이번 논문에서는 이미 이전에 해석되었던 곡선형 형상을 가진 자유단 평판에서의 자유진동을 더욱 발전시켜 다각형과 임의의 형상에 대한 자유진동해석 방법이 새로이 소개된다. 이전에 수행되었던 원호 형상과 달리 다각형 형상은 모서리가 직선이기 때문에 기존의 해결책이었던 지역 극좌표계(local polar coordinate)를 이용하는데 어려움이 있었다. 또한 다각형 평판의 꼭지점에서는 모서리에서의 모멘트나 전단응력 외에도 꼭지점에서의 비틀림에 의한 경계조건이 추가되고 모멘트와 전단응력의 수직방향의 모호성으로

인해 경계조건을 적용하는데 어려움이 있다. 이와 같은 문제점을 극복하기 위하여 모서리에 대해서는 원호형상으로의 근사화기법으로, 꼭지점에 대해서는 미소 반경을 갖는 중심원에 대한 상대좌표를 이용하여 자유진동해석을 수행하였다. 실제로 다각형 평판의 미소한 형상 변화는 저주파수 대역에서의 고유진동수와 고유모드에는 거의 영향을 주지 않는다는 사실은 이미 잘 알려져 있고 모서리에서의 형상변화가 매우 미소하기 때문에 형상변화로 인한 영향은 거의 없다고 볼 수 있다. 제안된 방법으로 여러 다각형에 대해 해석한 결과 신뢰할 수 있는 수준의 고

1) 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : jhchoi@mail.vib.snu.ac.kr
Tel : (02)880-7152 Fax : (02)876-9493
2) 한성대학교 기계시스템공학부
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : (02)760-4327

유치와 고유모드를 얻을 수 있었고, 이들 결과는 FEM(ANSYS) 해석 결과와 잘 일치함이 증명되었다.

마지막으로, 본 논문에서 제안된 방법의 검증을 위해 자유단 경계 조건을 가진 사각형 평판과 임의 형상 평판의 고유치와 모드 형상이 NDIF법에 의해 구해진다. 사각형 평판의 경우, 해석 결과가 엄밀해(exact solution)⁸⁾와 비교되어졌다. 엄밀해가 존재하지 않는 임의 형상 평판의 경우는 유한요소법에 의해 구해진 결과와 비교되어진다.

2. 자유단 경계를 갖는 평판

우선 다각형과 임의 형상의 평판에 관한 해석이 곡선형 평판의 자유진동해석을 근간으로 그 연장선상에 있으므로 임의 형상의 평판 해석에 앞서 이미 수행되었던 곡선형 평판의 자유진동 해석과 시스템 행렬식을 구하는 방법 및 잉여 고유치의 제거 방법에 대하여 고찰하였다.

2.1 곡선형 평판의 자유진동해석

자유단 경계를 가진 평판의 자유진동에 관한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같이 주어진다.⁴⁾

$$\nabla^4 W - \Lambda^4 W = 0, \quad \Lambda = (\rho \omega^2 / D_E)^{1/4} \quad (1, 2)$$

$$M_n(W) = 0, \quad V_n(W) = 0 \quad (3, 4)$$

여기서 Λ 는 주파수 파라미터를 나타낸다.

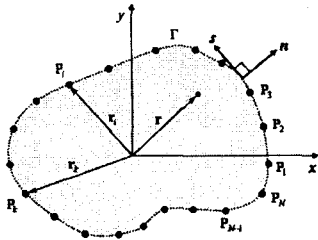


Fig. 1 Free Plate of which the boundary Γ is discrete with nodes P_1, P_2, \dots, P_N

평판의 자유진동해는 평판의 경계를 따라 설정된 N 개의 노드들 위에서 정의되어지는 NDIF들의 선형결합으로 다음과 같이 가정되어진다.

$$W(r) = \sum_{k=1}^N A_k J_0(\Lambda|r-r_k|) + B_k I_0(\Lambda|r-r_k|) \quad (5)$$

지역 극좌표계를 도입하면 경계조건 M_n 과 V_n 은 다음과 같이 나타내어진다.⁶⁾

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] \quad (6)$$

$$V_r = -D \left[\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2-\nu}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3-\nu}{r^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] \quad (7)$$

식 (6,7)에 NDIF를 적용하여 하나의 행렬식으로 간단히 표현할 수 있다.

$$SM_{plate} C = 0 \quad (8)$$

여기서 시스템 행렬 SM_{plate} 와 시스템 벡터 C 는 다음과 같다.

$$SM_{plate} = \begin{pmatrix} SM_M^J & SM_M^I \\ SM_V^J & SM_V^I \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (9)$$

그런데 $i=k$ 인 경우 시스템 행렬의 몇몇 성분들이 발산하게 된다.

$$SM_{plate}^{NDIF} = \frac{func(|r_i - r_k|)}{|r_i - r_k|} \quad (10)$$

식 (10)에서 보는 바와 같이 $i=k$ 인 경우에는 분모가 0이 되게 되므로 수치적 계산이 불가능하다. 따라서 이 경우에 P_k 가 P_i 에 가까이 접근한다는 극한 개념을 이용한다.

2.2 다각형에의 적용

직선 모서리를 가진 다각형의 경우 Fig. 2에서와 같이 직선 모서리를 원호 형태로 수정하여 형상의 변화를 주었다. 그런데 만일 지역 극좌표계의 원점 O_i 와 주어진 모서리 사이의 거리 $R^{(i)}$ 가 커진다면 실제 좌표점 P_{i+n} 과 수정된 좌표점 P'_{i+n} 사이의 차이가 미소하게 되어 형상의 변화로 인한 오차 또한 적어진다고 할 수 있다. 실제로 미소한 형상 변화로 인한 고유진동수의 변화는 미미한 것으로 알려져 있다.

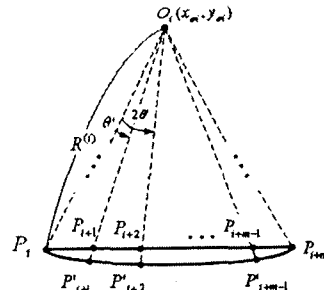


Fig. 2 Local Polar System at a straight edge

또한 꼭지점에서의 법선 방향은 Fig. 3에 보는 바와 같이 두 모서리 사이의 영향을 모두 고려하여 각 모서리에서의 법선 방향을 평균한 값을 꼭지점에서의 법선 방향으로 정한다. 꼭지점에서도 지역 극좌표계를 이용하는데 꼭지점에서의 곡률반경 $R^{(i)}$ 은 모서리에서와 반대로 매우 작은 값을 주게 되면 주어진 평판의 형태로 근사화 시킬 수 있다. 그 값이 미소하다면 역시 형상변화로 인한 고유치의 변화는 미미할 것이다.

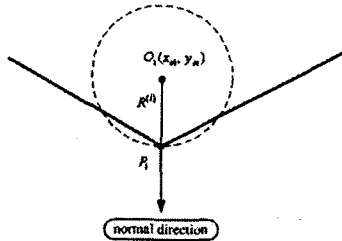


Fig. 3 normal direction and radius of curvature at corner

실제 수치 계산을 통해 곡률반경은 크기가 어느 정도 크거나(모서리) 작게(꼭지점) 되면 고유치에 큰 영향을 미치지 않게 되어 소수점 둘째 이하로는 신뢰할 수 있음을 확인하였다.

3. 비교 예제

3.1 자유단 사각형 평판(Free Rectangular Plate)

NDIF를 적용하기 위해 Fig. 4에서 보는 바와 같이 12개의 노드를 설정하여 해를 구하였다. 그림에서는 곡률이 설명을 위하여 실제 경계와 위치가 달라 보이지만 해석에서 반경에 매우 큰 값을 넣었을 경우 실제로 차이가 미미하다. 그 결과는 Table.1에 요약되어졌다.

해석결과 FEM 결과와 비교해 훨씬 적은 12개의 노드 수만으로도 만족할 만한 수준의 고유치와 고유모드 형상에 관한 결과를 얻을 수 있었다.

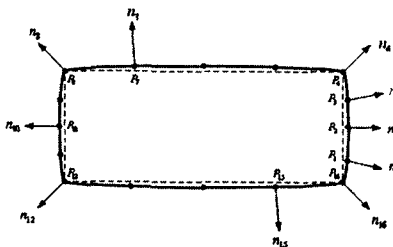
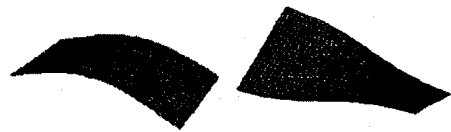


Fig. 4 the location of nodes in rectangular(5x2)

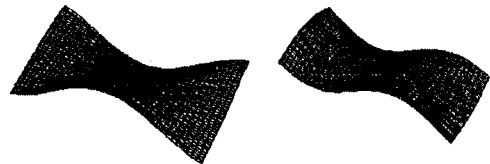
Table 1 Eigenvalues of the rectangular plate obtained by the proposed method and the other method

NDIF법 (before sorting)	NDIF법 (after sorting)	FEM (Ansys)	Exact Solution	
			Plate	Membrane
0.91	0.91	0.92	0.93	
1.25	1.25	1.15	1.15	
1.58	1.58	1.54	1.55	
1.66				1.66
1.69	1.69	1.68	1.69	
2.01				2.01
		2.16	2.17	



(a) 1st Mode Shape

(b) 2nd Mode Shape



(c) 3rd Mode Shape

(d) 4th Mode Shape

Fig. 5 Mode Shapes of the rectangular plate obtained by the proposed method when N=16

3.2 자유단 정사각형 평판(Free Square Plate)

자유단 정사각형 평판에 대해서는 18개의 노드를 설정하여 각각의 고유치와 고유모드형상을 얻었고, 모두 FEM 해석을 통해 얻은 고유모드의 형상과 일치하는 것을 확인할 수 있었다.

Table 2 Eigenvalues of the square plate obtained by the proposed method and the other method

NDIF법 (before sorting)	NDIF법 (after sorting)	FEM (Ansys)	Exact Solution	
			Plate	Membrane
1.96	1.96	1.84	1.84	
2.22	2.22	2.21	2.22	2.22
2.49	2.49	2.46	2.47	
2.91	2.91	2.95	2.96	
3.51				3.51

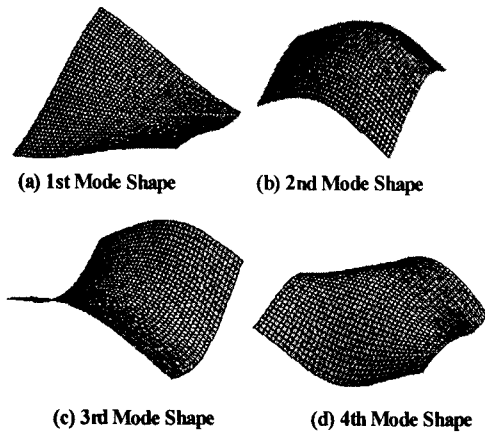


Fig. 6 Mode Shapes of the rectangular plate obtained by the proposed method when N=18

3.3 임의의 형상 평판(Arbitrarily Shaped Plate)

직선과 곡선 모서리를 모두 가진 임의의 형상의 평판에 NDIF를 적용시켜 보아도 앞서 다각형 형상에 관한 예에서 볼 수 있듯이 적은 노드 수만으로도 실제 고유치와 상당히 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 임의의 형상의 경우 해석결과에 있어 엄밀해를 구할 수 없으므로 FEM 해석 결과만을 비교하였다.

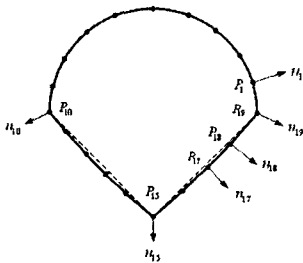


Fig. 7 the location of nodes in Arbitrarily shaped plate(half circle and triangle)

Table 3 Eigenvalues of the Arbitrarily shaped plate obtained by the proposed method and the other method

NDIF법 (before sorting)	NDIF법 (after sorting)	FEM (Ansys)	Membrane
2.30	2.30	2.40	
2.65	2.65	2.63	
2.70			2.71
3.16	3.16	3.16	
		3.80	
3.90	3.90	3.90	

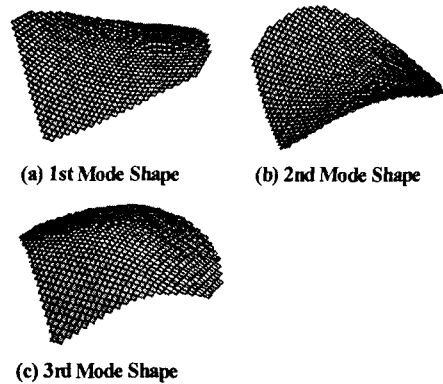


Fig. 8 Mode Shapes of the arbitrarily shaped plate obtained by the proposed method when N=19

4. 결론

본 논문에서는 NDIF 법을 이용하여 자유단 경계를 가진 임의의 형상 평판에 관한 자유진동 해석 기법을 제안하였다. 이 방법은 적은 개수의 노드를 사용함에도 비교적 정확한 해를 제공하는 것을 예제를 통해 검증했다. 이로써 NDIF 법을 이용하여 여러 가지 경계 조건을 가진 2차원 평판에 관한 해석을 마무리하였다.

References

- [1] Kang, S. W., Lee, J. M. and Kang, Y. J., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membranes Using Non-dimensional Dynamic Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117-132.
- [2] Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153-1160.
- [3] Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamic Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455-470.
- [4] Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9-26.
- [5] Kang, S. W., 2002, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-Dimensional Dynamic Influence Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533-549.
- [6] S.W. Kang, I.S. Kim, J.M. Lee, 2003, "무차원 동영향 함수를 이용한 자유단 경계를 가진 임의의 형상 평판의 자유진동해석", 한국소음진동공학회, Vol. 13, No. 10, pp. 821-827.
- [7] Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibrations, New York: Macmillan Publishing, pp. 179-182.
- [8] D. Belvins, 1979, Formulas for natural frequency and mode shape, New York: Van Nostrand-Reinhold, 252-262.