

유한요소 모델링을 통한 변형체의 햅틱 인터페이스

전성기⁰ 최진복 조맹효
서울대학교{ zenith74⁰, jbchoi95, mhcho }@snu.ac.kr

Haptic Interface with Deformable Finite Element Model

Seongki Jun⁰ Jinbok Choi, Maenghyo Cho
Seoul National University

요 약

햅틱 장치를 이용한 변형체의 실시간 시뮬레이션은 가상현실을 구축하기 위한 중요한 기술의 하나로서 최근에 크게 각광받고 있다. 본 연구에서는 햅틱 장비와 변형체의 정확한 인터페이스를 구축하기 위하여 변형체의 물리적 특성을 고려한 연속체적 모델인 유한요소법을 통한 선형해석을 수행한다. 변형체와 햅틱 장치의 상호작용 과정에서 발생하는 변형과 반력을 사용자에게 실시간으로 제공하기 위하여 선형해석 결과를 이용한 변형체의 정적 시뮬레이션을 구현한다. 이와 함께 햅틱 장치와 접촉이 이루어지는 부분의 변형을 보다 자연스럽게 표현하기 위하여 적응적 유한요소법인 s-adaptive 방법을 적용하였으며 햅틱 장치와 접촉이 끝난 후의 변형체가 평형 상태로 돌아가는 과정을 모사하기 위하여 Newmark scheme을 통한 동적 시뮬레이션을 구현한다. 또한 최적화 행렬 연산 함수인 BLAS와 LAPACK을 이용하여 행렬 연산을 빠르게 수행하고 효율적인 메모리 사용 추구한다.

1. 서 론

현실 세계를 사실적으로 모사할 수 있는 모델링의 한 방법으로 변형체의 변형 렌더링에 대한 관심이 높아지고 있다. 이와 함께 변형에 상응하는 역감을 사용자에게 전달할 수 있는 햅틱 장치와의 인터페이스에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며 게임, 애니메이션, CAD, 의료 산업 등에 활용되고 있다. 변형체와 햅틱 장치의 인터페이스는 양방향 정보 전달을 기반으로한다. 즉 사용자에게 햅틱 장치의 움직임 정보가 가상현실로 전달되고 움직임에 의하여 가상현실에서 발생하는 변형체의 변형과 반력이 계산되어 사용자에게 전달된다. 이러한 양방향 정보 전달 체계 내에서 사용자에게 사실감있는 안정적인 햅틱 인터페이스를 구축하기 위해서 정확한 변형과 반력의 계산이 실시간으로 이루어져야 한다.

변형과 반력 계산의 정확성과 신속성을 모두 만족시키기 위한 변형체 모델링 방법으로는 질량-스프링 시스템과 연속체 개념을 이용한 모델링 방법이 주로 사용되고 있다. 질량-스프링 시스템은 변형체를 이산화하여 각 질점에 질량을 부과하고 질량과 질량 사이를 스프링으로 연결한 격자 형태로써 햅틱 인터페이스에 적용하기에 매우 용이하며 계산 시간이 매우 빠른 방법이다. 그러나 질량과 스프링 상수뿐만 변형체의 물리적 특성을 표현하기에는 한계가 있기 때문에 변형과 반력이 부정확한 단점이 있다. 이에 반하여 연속체 개념을 도입한 방법은 변형체의 물리적 특성, 경계 조건, 외부 하중 조건 등을 고려하기 때문에 질량-스프링 모델보다 적은 수의 절점으로 보다 정확한 변형 형상을 제공한다. 그러나 편미분방정식을 풀어야 하며 대형 행렬을 다루어야 하기 때문에 햅틱 장치와의 인터페이스에 어려움이 있다.

본 연구에서는 탄성 변형체와 PHANTOMTM 햅틱 장치의 연동을 통한 변형체의 실시간 변형 및 반력 시뮬레이션을 구현한다. 정확한 변형과 반력의 계산을 위하여 유한요소법에 의한 변형체

모델링을 선형 해석 과정에서 수행한다. 선형 해석 과정에서는 변형체의 정적 해석과 동적 해석을 동시에 수행한다. 정적 해석 결과인 강성행렬의 역행렬은 햅틱 장치와 변형체의 접촉이 일어날 때 발생하는 변형과 반력의 계산에 사용된다. 실시간 정적 햅틱 시뮬레이션은 James 와 Pai[1]가 제안한 capacitance matrix algorithm (CMA)을 유한요소로 확장하여 탄성 변형체의 변형 및 반력을 실시간으로 모사할 수 있는 시스템을 구축한다. 이와 동시에 햅틱 장치의 끝점이 변형체의 격자 꼭지점에 접촉하였을 때 보다 자연스러운 변형 형상을 구현하기 위하여 물리적으로 타당한 s-version 적응적 방법[4]을 적용한다. 선형 해석 과정에서 계산된 동적 해석 결과인 유효강성행렬의 역행렬은 Newmark[2] 방법에 의하여 햅틱 장치와 변형체의 접촉이 끝난 후 변형체가 평형상태로 되돌아가는 동적 시뮬레이션 과정에 사용한다. 이와 더불어 대형 행렬 저장에 소요되는 메모리의 양을 줄이고 보다 빠른 행렬연산을 구현하기 위하여 최적화 행렬 연산 함수인 BALS와 LAPACK을 이용한다.

2. 유한요소 정식화

2.1 정적 탄성 변형체

일반적으로 탄성 변형체는 작은 변형에 대하여 정확한 해를 얻을 수 있기 때문에 공학적 해석에서 흔히 사용되는 가정이다. 유한요소법은 탄성 변형체의 물리적 특성, 경계조건, 외력 등을 고려하기 때문에 정확한 변형과 반력을 제공한다.

탄성 변형체의 변형은 외부에서 가해지는 하중과 변형체의 물성치의 함수로 표현할 수 있다. 탄성 변형체의 전체 퍼텐셜 에너지가 최소가 될 때 변형체는 평형에 도달한다. 탄성 변형체 시스템의 전체 퍼텐셜 에너지는 식 (1)으로 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon dV - \sum_i u_i^T f_i \quad (1)$$

여기서 ϵ 과 σ 는 변형률과 응력을 각각 의미한다. 변형률은 변위에 대한 일차 미분으로 정의되므로 변형률-변위 관계 행렬 \mathbf{B} 를 이용하여 변형률 벡터를 $\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$ 와 같이 표현된다. 변형률에 상응하는 응력 벡터는 Hooke's Law 에 의하여 $\sigma = \mathbf{D}\epsilon$ 의 관계식으로 표현된다. 여기서 \mathbf{D} 는 탄성 계수 행렬이다. 등방성 재료의 탄성 계수 행렬은 두 개의 라에 상수로 정의된다. 따라서 절점 N 개를 갖는 변형체 내의 한 요소에 대한 퍼텐셜 에너지를 변형률-변위 관계식과 응력-변형률 관계식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\Pi = (\mathbf{u}^e)^T \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e \right\} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{u}^e 는 한 요소의 변위 벡터이고 이고 \mathbf{f}^e 는 집중하중과 보간 함수에 의해 유도된 집중 하중 벡터이다. 상첨자 e 는 요소를 의미한다.

전체 퍼텐셜 에너지가 최소가 될 때 탄성 변형체는 평형에 도달하므로 전체 퍼텐셜 에너지가 최소가 되는 변형을 구하기 위해 변위 \mathbf{u}^e 에 대하여 편미분을 수행하면 식 (3)와 같은 선형 시스템이 유도된다.

$$\left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e = 0 \quad (3)$$

여기서 \mathbf{K}^e 는 체적 V 에 대하여 수치적으로 적분을 수행한 강성 행렬로서 희박한 대칭 행렬이다. 따라서 변형체를 많은 요소로 나누어 각각의 요소에 대한 강성행렬을 변형체 전체에 대한 강성행렬로 구성하게 된다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4)$$

2.2 동적 탄성 변형체

Newmark 방법은 구조 동역학에서 동적 시스템의 시간에 따른 동적 거동을 해석하기 위해 사용되는 수치 적분법 중의 하나이다. 이 방법의 장점은 적절하게 선택되는 파라미터에 대해서 시간 간격에 관계없이 발산되지 않는 안정된 결과를 보여준다는 것이다. 또한 속도와 변위의 변화를 보다 정확하게 근사화한 차분식을 사용하므로 비교적 큰 시간 간격에 대해서도 정확한 결과를 보여준다는 점에서 중앙 차분법과 같은 여타의 방법보다 유리하다[3]. Newmark 방정식은 다음과 같은 두 식에 의하여 주어진다.

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_i + (\Delta t)(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_i + (\Delta t)\delta\ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_{i+\Delta t} = \mathbf{u}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{u}}_i + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \ddot{\mathbf{u}}_i + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \right] \quad (6)$$

여기서 \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ 그리고 $\ddot{\mathbf{u}}$ 는 변위, 속도, 가속도를 각각 의미한다. 또한 Δt 는 시간 간격을 나타내고 δ 와 α 는 사용자가 임의로 선택하게 되는 변수이다. 하첨자 $i + \Delta t$, i 는 각각 현재 시간과 이전 시간을 나타낸다. 식 (5)과 (6)을 다음의 동역학 방정식에

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1} \quad (7)$$

대입하여 정리하게 되면 다음과 같이 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_0\mathbf{M} + \mathbf{a}_1\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u}_{i+\Delta t} &= \mathbf{M}(\mathbf{a}_0\mathbf{u}_i + \mathbf{a}_2\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{a}_3\ddot{\mathbf{u}}_i) \\ &+ \mathbf{C}(\mathbf{a}_1\mathbf{u}_i + \mathbf{a}_4\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{a}_5\ddot{\mathbf{u}}_i) + \mathbf{f}_{i+\Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 \mathbf{M} 와 \mathbf{C} 는 각각 질량행렬과 땀땀 행렬을 의미하고 $\mathbf{f}_{i+\Delta t}$ 는 시간의 함수로 주어지는 외력이다. 식 (8)의 좌측항과 우측항들을 각각 유효 강성행렬 $\bar{\mathbf{K}}$ 과 유효력 $\bar{\mathbf{f}}_{i+\Delta t}$ 으로 정의하면 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{i+\Delta t} = \bar{\mathbf{f}}_{i+\Delta t} \quad (9)$$

2.3 격자 결합법

Fig. 1 과 같이 영역 Ω 와 경계 Γ 를 갖는 탄성 변형체를 고려하자. 상첨자 G 와 L 는 각각 전역 격자와 국소 격자 관련 항을 의미한다. 국소 영역 $\Omega^L \subset \Omega$ 는 임의의 형상을 가질 수 있으며 일반적으로 해의 변화가 급격한 영역에 위치시킴으로써 정확한 해를 구할 수 있다. Γ^L 은 Ω^L 의 경계로 정의된다. Ω 는 $\Omega^G = \Omega / \Omega^L$ 와 Ω^L 로

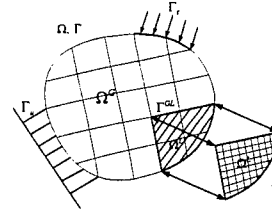


Fig. 1 전역 격자와 국소 격자의 예

나뉘게 되며 $\Gamma^{GL} = \Gamma^L \setminus (\Gamma \cap \Gamma^L)$ 은 Ω^G 와 Ω^L 의 공동된 경계로 정의된다. 변위는 전역 변위 \mathbf{u}^G 와 국소 변위 \mathbf{u}^L 의 간단한 선형조합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^G & \text{on } \Omega^G \\ \mathbf{u}^G + \mathbf{0} & \text{on } \Gamma^{GL} \\ \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L & \text{on } \Omega^L \end{cases} \quad (10)$$

여기서 변위의 연속성을 보장하기 위하여 다음과 같은 C^0 연속 조건이 사용된다.

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (11)$$

전역 격자와 국부 격자의 구성방정식은 다음과 같이 구성되며

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon = \begin{cases} \sigma^G = \mathbf{D}^G \mathbf{B}^G \mathbf{u}^G \\ \sigma^L = \mathbf{D}^L (\mathbf{B}^G \mathbf{u}^G + \mathbf{B}^L \mathbf{u}^L) \end{cases} \quad (12)$$

식 (4)를 유도한 방법과 유사하게 다음과 같은 강성 행렬을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^G \\ \mathbf{u}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서 \mathbf{K}^{GG} 와 \mathbf{K}^{LL} 은 전역 격자와 국부 격자의 강성 행렬을 각각 의미하고 \mathbf{K}^{GL} 과 \mathbf{K}^{LG} 는 전역 격자와 국부 격자의 상호작용 관계 효과를 반영한다.

$$\mathbf{K}^{GG} = \int_{\Omega^G} (\mathbf{B}^G)^T \mathbf{D}^G \mathbf{B}^G d\Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} (\mathbf{B}^G)^T \mathbf{D}^L \mathbf{B}^L d\Omega^L \quad (15)$$

$$\mathbf{K}^{LL} = \int_{\Omega^L} (\mathbf{B}^L)^T \mathbf{D}^L \mathbf{B}^L d\Omega^L \quad (16)$$

3. 변형체와 햅틱 장치와의 인터페이스

3.1 선형 해석과정

선형 해석과정에서는 유한요소법에 의하여 식 (4)와 (9)을 구성하는 과정이다. 이 과정에서는 국부 격자를 고려하지 않고 전역 격자만을 고려하여 식 (4)의 강성행렬과 식 (9)의 유효강성행렬의 역행렬을 각각 계산한다. 여기서 계산된 두 개의 역행렬은 대칭행렬을 이루기 때문에 BLAS 와 LAPACK 에서 지원하는 대칭행렬에 대한 저장 방식을 이용하면 사용 메모리 양을 크게 줄일 수 있을 뿐만 아니라 시뮬레이션 과정에서 역행렬과 관련된 행렬 연산의 계산 시간도 크게 단축시킬 수 있다.

3.2 정적 탄성 변형체 시뮬레이션

햅틱 장치가 다각형으로 이산화된 변형체의 절점에 접촉하였을 때 절점을 포함한 요소를 분할하여 국소 격자를 중첩한후 국소 격자에 대한 유한요소 해석을 수행하여 식 (15)와 (16)을 계산한 후 식 (13)를 구성한다. 그러나 식 (14)의 \mathbf{K}^{GG} 는 구성할 필요는 없다. 왜냐하면 \mathbf{K}^{GG} 는 전역 격자에 대한 적분에 의하여 계산되므로 변형체의 어느 부분과 접촉하여도 일정하기 때문이다. 따라서 선형 해석 과정에서 미리 계산된 전역 격자에 대한 강성행렬의 역행렬이 격자 중첩에 의한 시뮬레이션 과정에서 사용할 수 있다. 식 (13)의 강성행렬의 역행렬을 위한 inversion by partitioning (IbP) 방법은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{K}}^{LL} = (\mathbf{K}^{LL} - \Psi^{LG} \cdot \mathbf{K}^{GL})^{-1} \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{GL} = -\tilde{\mathbf{K}}^{LL} \cdot \Psi^{LG} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{GG} = (\mathbf{K}^{GG})^{-1} - (\tilde{\mathbf{K}}^{LG})^T \cdot \Psi^{LG} \quad (19)$$

여기서 $\Psi^{LG} = \mathbf{K}^{LG} \cdot (\mathbf{K}^{GG})^{-1}$ 는 반복 계산되므로 한 번만 계산한다. 전체 강성행렬은 전역 격자의 총 자유도수와 국소 격자의 총 자유도수의 합을 갖기 때문에 1bP 방법만으로는 실시간으로 역행렬을 계산하는 것은 불가능하다. 이를 해결하기 위하여 본 연구에서는 국소 격자의 경계조건을 이용한 절점 numbering 과 CMA의 특성을 고려하여 실시간으로 계산한다. 또한 1bP에 의한 행렬 연산을 보다 빠르게 계산하기 위하여 BLAS와 LAPACK 함수[3]를 이용한다.

3. 2. 1 국소 격자의 절점 numbering

국소 격자와 전역 격자가 일치하는 부분에 있는 국소 격자의 절점의 경계조건은 식 (11)에 의하여 변위가 0으로 기술되어 있는 부분이다. 이 절점에 해당하는 \mathbf{K}^{LG} 과 \mathbf{K}^{LL} 부분은 어떠한 계산에도 관여하지 않으므로 제외하고 그 외의 절점에 해당하는 부분만 고려하면, 즉 변위가 기술되어 있지 않은 절점의 numbering을 연속적으로 부과하면 \mathbf{K}^{LG} 과 \mathbf{K}^{LL} 에 필요한 메모리의 양을 크게 줄일 수 있을 뿐만 아니라 1bP에서 요구하는 계산의 시간을 급격하게 줄일 수 있다.

3. 2. 2 CMA의 특성

본 연구에서 사용된 변형체는 탄성 변형체라는 가정을 기반으로 하기 때문에 CMA을 이용한 햅틱 시뮬레이션에서 식 (13)의 강성행렬의 전체 역행렬이 필요한 것이 아니라 햅틱 장치와 접촉이 발생한 변형체의 절점에 해당하는 block column 만 갱신할 필요가 있다. 이러한 사실은 식 (19)의 계산 시간을 크게 줄일 수 있다.

3. 3 동적 탄성 변형체 시뮬레이션

햅틱 장치와 변형체의 접촉이 끝난 직후 변형체는 평형 상태로 되돌아 간다. 이러한 변형체의 동적거동을 사실적으로 모사하기 위한 Newmark 방법은 초기 조건의 종류로 변위, 속도, 가속도 또는 외부에서 작용하는 힘을 사용한다. 본 연구에서는 햅틱 장치와 변형체 접촉에서 발생하는 때 계산된 변위를 초기 조건으로 이용하여 시뮬레이션한다. 매 시간 단계마다 식 (8)의 우측 항에 해당하는 유효력을 계산한 후 미리 계산된 유효강성행렬의 역행렬과 곱에 의하여 각 절점의 변위를 계산한다.

4. 결과 및 검토

Fig. 2는 본 연구에서 제안한 격자 중첩법에 의한 변형체 햅틱 시뮬레이션의 예를 보여주고 있다. Fig. 2-(a)의 점선은 4x4의 요소를 이용한 햅틱 시뮬레이션의 결과이고 실선은 4x4의 요소를 전역 격자로 사용하여 햅틱 장치와 접촉이 일어난 주위에 6x6의 요소를 국소 격자로 중첩한 결과이다. Fig. 2-(a)에서 보는 바와 같이 격자 중첩법을 사용할 경우 접촉이 발생한 부위의 변형 형상이 보다 자연스럽게 나타나고 있다. Fig. 2-(b)는 격자 중첩법에 의하여 계산된 변형의 정확성을 나타내고 있다. Fig. 2-(b)에서 점선으로 표현된 변형 형상은 12x12의 격자를 사용한 변형 형상을 나타내며 이는 격자 중첩법을 사용할 경우의 해와 유사함을 보여주고 있다. 또한 Table. 1은 Fig. 2의 계산 시간과 반력을 나타내고 있다. 격자 중첩법을 사용할 경우 시뮬레이션 시간이 크게 증가하나 보다 적은 메모리를 사용하여 정확한 변형과 반력을 계산할 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 제안한 격자 중첩법은 어떠한 형태의 유한요소에도 적용 가능하다. Fig. 3은 사면체 요소를 사용하여 나타난 격자 중첩법의 결과를 나타내고 있다. 상기의 결과는 Pentium 4 3.2 GHz, 1.0GB RAM 개인용 컴퓨터를 사용하였으며 햅틱 렌더링을 위하여 Ghost SDK 함수[5]를 이용하였다.

Fig. 4는 변형체가 햅틱 장치와 접촉이 끝난 후 평형 상태로 되돌아가는 동적 거동의 예를 나타내고 있다. 여기서 Fig. 4-(a)는 햅틱 장치의 접촉이 일어났을 때의 변형을 나타내고 있으며 Fig. 4-(b)-(c)는 본 연구에서 제안한 Newmark 방법에 의한 동적 거동을

나타내고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 유한요소법에 의하여 모델링된 변형체의 실시간 변형 및 반력 시뮬레이션을 햅틱 장치와의 연동에 의하여 구현하였다. 선형 해석과정에서 변형체의 정적 해석 및 동적 해석을 수행하여 강성행렬과 유효강성행렬의 역행렬을 각각 저장하였다. 변형체와 햅틱 장치의 접촉이 발생하였을 때 강성행렬의 역행렬과 물리적으로 타당한 s-version 적응적 유한요소법을 이용하여 변형 및 반력의 정확성을 높였다. 또한 햅틱 장치와 접촉이 끝난 직후 보다 자연스러운 변형체의 거동을 모사하기 위하여 Newmark 방법에 의한 동적 거동 시뮬레이션을 수행하였다. 이와 더불어 빠르고 효율적인 행렬 연산과 메모리 관리를 위하여 BLAS와 LAPACK 함수를 적용하였다.

본 연구에서 제시한 유한요소법 기반의 변형체 시뮬레이션은 영역 내부의 해가 중요한 needle 삽입이나 cutting 시뮬레이션에 확장하여 적용할 수 있을 것으로 판단된다. 또한 본 연구의 결과를 바탕으로 국소 영역에 대한 비선형 해석을 수행하여 보다 정확한 변형체 시뮬레이션을 수행하고자 한다.

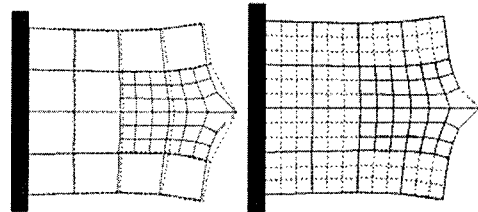


Fig. 2 격자 중첩법의 예와 그 해의 비교

Table. 1 Fig. 2의 시뮬레이션 결과

Global Mesh	Local Mesh	Update Time	Force Feedback
4x4	none	0.03 ms	-120.72
12x12	none	0.07 ms	-89.65
4x4	6x6	1.47 ms	-90.29

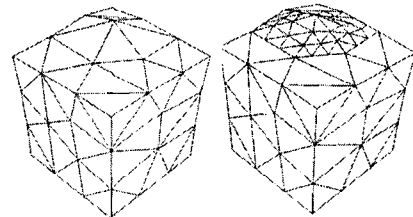


Fig. 3 사면체 요소에 대한 격자 중첩법의 예

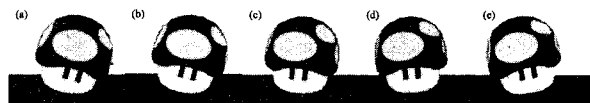


Fig. 4 동적 거동 시뮬레이션의 예

참고문헌

[1] James, D. L and Pai, D. K., "A Unified Treatment of Elastostatic Contact Simulation for Real Time Haptics". Haptics-e, Vol. 2, Number 1, 2001
 [2] Newmark, N.M. "A Method of Computation for Structural Dynamics," Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE 85(EM5), 67-90, 1959
 [3] Intel Corporation, Intel Math Kernel Library, <http://developer.intel.com>
 [4] Fish, J., "The s-version of the Finite Element Method", Computers & Structures, Vol. 43, No. 3, pp 539-547, 1992
 [5] SensAble Technologies, Inc., GHOST SDK, <http://www.seneable.com>