인터넷 상에서의 수학적 거리

강미연*, 정원호° 계승혁+
* (주)iCanTek 기술연구소
o 덕성여자대학교 정보공학대학 컴퓨터공학부
+ 서울대학교 자연과학대학 수학과
mykang@icantek.com, whchung@duksung.ac.kr

On Mathematical Distance on Internet

Mi-Yeon Kang*, Won-Ho Chung°, and S. H. Kye

* Research Center, iCanTek Co.
o Division of Computer Engineering, Duksung Women's University
+ Department of Mathematics, Seoul National University

요 약

실제 공간에서 네트워크를 통해 지역적으로 산재해 있는 통신 노드들에 관한 최단거리 문제 등을 위시한 각종 지리적 요소를 지니고 있는 문제들을 다루는 것은 복잡할 뿐만 아니라, 환경 및 상태 의존적이라 용이하지 않다고 할 수 있다. 본 논문에서는 네트워크를 통해 존재하는 실제 공간상에서의 지리적 성격의 문제를 특정 공간상의 문제로 매핑하여, 형식화(formalization)함으로써, 그 공간상에서의 수학적 문제로 변환하여 접근할 수 있는 효율적이고 간단한 방법을 제안한다. 그리하여 인터넷상에서의 2 노드 간의 최단 거리 문제를 위한 접근으로서, 본 논문에서 제안된 공간상에서의 두 노드 간의 수학적 거리를 정의하여 정형화된 수학적 최단거리를 구하도록 한다.

1. 서 론

유무선 네트워크 상에 광범위하게 산재해 있는 다양한 형태의 장비들은 - 예를 들면, PC, 라우터, 스위치 등 - 모두 네트워크 노드(node)라고 총칭할 수 있다. 두 노드 간의 최단 거리 문제와 같은, 실제 공간에서 네트워크를 통하여 지역적으로 산재해 있는 노드들에 관한 지리적인 문제를 위시한 각종 지리적 특성을 포함하는 문제들을 다루는 것은 복잡할 뿐만 아니라 환경 및 상태 의존적이라 용이하지 않다고 할 수 있다[1-5].

본 논문에서는 네트워크를 통해 존재하는 실제 공간상에서의 지리적 요소를 포함하는 각종 문제를 특정 *W-공간* 이라고 하는 좌표 공간상의 문제로 매핑하여 형식화(formalization)함으로써, 그 공간에서의 수학적 문제로 변환하여 접근할 수 있는 간단한 방법을 제안한다.

여기서 다루고자 하는 문제의 해는 실제 공간에서와 일치하지 않을 수 있다. 왜냐하면 실제 공간에서의 문제가 아니라 수학적, 논리적 문제로의 변환을 통한 접근이기 때문이다. 즉, W-공간에서 최단거리라고 해서 실제 공간에서 최단거리라고는 할 수 없는 것이다. 그러나 실 공간에서는 이론적이고 정형화된 해가 존재하지 않지만. W-공간으로의 매핑을 통한 후에는 수학적 문제로 변환되어, 하나의 정형화된 해가 존재할 수도 있다.

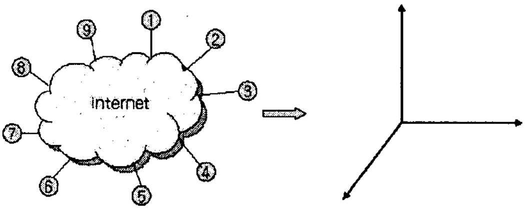
본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (R06-2002-003-01003-0) 지원으로 수행되었음.

예를 들면, 인터넷상에서의 최단거리 라우팅 문제, 노드 클러스터링 문제 등을 수학적으로 접근할 수 있을 것이다.

2. 인터넷 주소체계

인터넷을 통해 산재해 있는 노드들에 대한 W-공간으로의 매핑은 인터넷에서 부여되는 각 노드의 주소 (좀 더 자세히 말하면, IP 주소)를 기반으로 하고 있다. 처음에는 인터넷상에 존재하는 모든 노드의 주소체계는 32-비트, 즉 4 바이트로 구성되어 있는 IPv4를 따르고 있다. 이 경우, 각 노드의 주소는 a.b.c.d로 표현된다. 이때, 도트로 구분되는 부분, 즉 a, b, c, d 각각은 8 비트로 표현되는 0부터 255 사이의 음이 아닌 정수이다. 최근 홈 네트워킹의 급격한 추세로, 가전제품들의 네트워킹화가 가속화되면서 IPv4에서의 수용할 수 있는 노드 수가 제약을 받음으로 인해, 이를 해결하면서 IPv4 체계에서는 어려웠던 멀티캐스팅 등의 효율적인·기능들의 추가를 위해 128-비트 즉, 16 바이트 길이의 IPv6 주소체계가 새로이 등장하였고, 기존의 IPv4 주소체계는 점차로 IPv6 기반으로 변환되고 있다. 그러나 그 표현 역시 A.B.C.D로 표현할 수 있다. 이때, 도트로 구분되는 부분, 즉 A, B, C, D는 32-비트로 표현되는 0부터 $2^{32}-1$ 사이의 크기를 가지는 음이 아닌 정수로 하면 범위만 다를 뿐이지 기존의 IPv4 주소 체계와 표현의 호

환성을 가지고 있다 할 수 있다. 본 연구에서는 인터넷 공간에서의 임의의 노드는 A.B.C.D라는 유일한 주소을 가지고 있다고 가정한다.



[그림-1] Problem domain transformation

3. W-공간의 정의

일반적으로, 네트워크 공간 N은 (V, E)라는 그래프 모델로써 정의될 수 있으며, 많은 네트워크상의 문제들의 해결이 실제로 이러한 그래프를 기반으로 시도되고 있다. 그러나 여전히 여러가지의 요소 할당 및 분석 때문에 상당히 복잡한 과정을 거치는 것이 보통이며, 범용성 있는 일반적인 해결책이 나오기가 어려운데, 그 이유는 그래프를 구성하는 V와 E에 대한 고정 프레임이 존재하지 않기 때문이다. 여기서 생각을 해보도록 하자. 만약에, 네트워크상의 한 노드의 위치가 특정 공간의 한 점으로 고정된다고 가정해보자. 이렇게 된다면, 네트워크상에서 발생하는 많은 문제들은 그 특정 공간상의 문제로 변환될 수 있을 것이다. 본 연구는 이러한 목적을 가지고 네트워크에 산재해 있는 모든 노드들을 특정 공간으로 매핑시킬 수 있는 그러한 공간을 정의하고, 노드들 사이에서 발생하는 문제들을 정의된 공간 내에서 해결하고자 하는 것이다. 우리는 여기서 이 공간을 W-공간이라고 부른다.

[정의-1] W-공간과 W_I**-공간**

$0 \le Z \le Z_{MAX}$인 정수의 집합 Z와 자연수 γ에 대하여, $Z^{\gamma}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_\gamma) : x_i \in Z, i=1,2,\cdots,\gamma\}$을 γ-차원 **W-공간**이라 하고, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_\gamma)\in Z^{\gamma}$에 대해 γ-차원 가중치 벡터 (weight vector) $W=(w_1,w_2,\cdots,w_\gamma)$가 연관된다. 특별히 $\gamma=4$인 경우 W-공간을 W_I-공간이라고 한다.

■

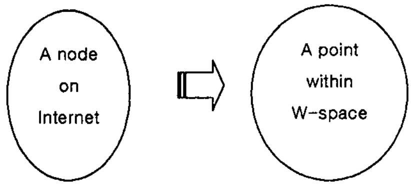
[정의-1]에서 알 수 있듯이 W-공간 W는 정의 영역이 Z_{MAX}로 제한을 받는 γ-차원 공간이며, 각 컴포넌트는 가중치 벡터와 연관되어 있다. 그리고 W_I-공간은 4차원 W-공간이다. 현재의 인터넷 상의 각 노드는 W_I-공간으로 매핑되며, W_I-공간으로의 매칭은 해당 노드의 IP 주소를 기반으로 한다.

[정의-2] W_I**-공간으로의 메핑 :**

인터넷 상에서의 특정 노드 n의 IP 주소를 $A.B.C.D$라고 할 때, 노드 n은 W_I-공간상의 $X=(A, B, C, D)\in Z^4$로 매핑된다. 단, IPv4의 주소체계인 경우 $Z_{MAX}=2^8-1=255$이며 IPv6인 경우, $Z_{MAX}=2^{32}-1$이다.

■

인터넷 상의 각 노드의 W_I-공간으로의 매핑은 각 노드의 IP 주소에 기반을 두고 있음을 알 수 있다. 인터넷 주소 체계 중의 하나인 IPv4를 적용할 경우, 각 컴포넌트는 8 비트로 표현되는 음이 아닌 정수이며, IPv6를 적용할 경우, 각 컴포넌트는 32 비트로 표현되는 음이 아닌 정수이다. 그러므로 실제 인터넷 공간에서 어떤 노드의 IP 주소가 123.456.789.100 일 경우, 이 노드는 W_I-공간상의 한 점 (123, 456, 789, 100)로 매핑된다. 즉, IPv4든 IPv6든 현재의 주소 체계를 따르는 인터넷 공간에서의 임의의 노드 n = $A.B.C.D$은 [그림-2]에 보여준 바와 같이 W_I-공간의 한 점 $X=(A, B, C, D)\in Z^{\gamma}$로 매핑되며, 단지 정의 영역 Z_{MAX}와 가중치 벡터 W만이 다를 뿐이다.



[그림-2] 인터넷 상의 각 노드의 W-공간으로의 매핑

4. W-공간에서의 수학적 최단 거리

인터넷상에 주어진 2 노드 간의 최단 거리를 구하는 문제를 W_I-공간으로 바꾸어 생각해 보자.

[정의-3] 노드 간의 연결성

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_\gamma)\in Z^{\gamma}$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_\gamma)\in Z^{\gamma}$에 대해 $\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_\gamma-y_\gamma|\}=1$을 만족할 경우, X, Y는 **연결**되어 있다고 한다.

■

[정의-4] 곡선 및 곡선의 길이

W-공간상의 유한 수열 $X^1,X^2,\cdots,X^n$이 $i=1,2,3,\cdots,n-1$에 대하여, X^i와 X^{i+1}이 연결되어 있으면, 이 유한수열을 X^1과

X^m을 연결하는 곡선이라고 부르고, 곡선의 길이를 n-1로 정의한다

■

[정의-5] 수학적 최단 거리

인터넷 상의 두 노드 n_1, n_2이 W_I-공간 상의 X_1, X_2로 매핑된다고 가정하자. 두 노드 n_1, n_2 간의 수학적 거리는 X_1, X_2간의 곡선의 길이이며, 최단 곡선의 길이를 **수학적 최단 거리**라고 한다.

■

어느 점이 고정되어 있을 때, 그 점과 연결되어 있는 점은 모두 $3^{\gamma}-1$개가 됨을 알 수 있다. 예를 들어, $\gamma=2$인 경우, W-공간상의 한 점은 3^2-1=8개의 점과 연결되어 있다.

이제 W-공간상에 두 점 X, Y 가 주어졌을 때, 두 점 사이를 연결하는 곡선들 가운데 가장 길이가 짧은 곡선을 어떻게 만들 수 있는가를 생각해 보자.

[정리-1] W-공간상의 수학적 최단 거리

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_\gamma)\in Z^\gamma$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_\gamma)\in Z^\gamma$ 간의 수학적 최단 거리 $\|X-Y\|_{math}=\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, |x_3-y_3|, \cdots, |x_\gamma-y_\gamma|\}$ 이다.

[증명] 먼저 $\gamma=2$인 경우를 생각해 보자. 만일 두 점의 첫째 좌표 혹은 둘째 좌표가 같으면 더 이상 생각할 필요가 없다. 이제 두 점의 첫째 좌표와 둘째 좌표가 모두 다르다고 가정하자. 이 경우, $X=(x_1,x_2)$와 $Y=(y_1,y_2)$를 꼭지점으로 하는 직사각형을 생각하고, X에서 출발하여 직사각형 내부에서 대각선 방향으로 연결된 점을 찾아 나간다. 이 작업을 계속하면 언젠가는 직사각형의 한 변을 만나게 되는데, 여기서부터는 이 변을 따라 Y까지 가면 된다. 이 경우 구한 직선의 길이는 $\|X-Y\|=\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$가 된다. 두 점 X, Y를 연결하는 어떠한 곡선이라도 $\|X-Y\|_{min}$보다 작아질 수 없음은 자명하다. 이제 일반적인 차원에서 생각해보자. 두 점 X = $(x_1,x_2,\cdots,x_\gamma)$와 Y = $(y_1,y_2,\cdots,y_\gamma)$가 주어졌을 때, 좌표축의 순서를 바꾸어서, $|x_1-y_1| \le |x_2-y_2| \le |x_3-y_3| \le \cdots \le |x_\gamma-y_\gamma|$라고 가정하고 생각해도 일반성을 잃지 않는다. 이제 점 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_\gamma)$의 각 좌표에서 1을 더하거나 빼서 X_i^1 (여기서 i = 1, 2, 3,..., γ) 을 얻는데, 각 좌표의 값이 Y에 가까워지도록 한다. 이러한 작업을 $|x_1-y_1|$ 번하고 나면 점 $X_1^{|x_1-y_1|}$을 얻게 되는데, 이 점은 Y와 첫 번째 좌표를 공유하게 된다. 이제 첫 번째 좌표를 그대로 두고 두 번째 이 후의 좌표에 대하여, 같은 작업을 반복하면 두 번째 좌표가 가장 먼저 같게 되어, $X_2^{|x_2-y_2|}$를 얻는다. 이제 첫 번째, 두 번째 좌표는 그대로 두고, 같은 작업을 반복하면, 결국 $X_\gamma^{|x_\gamma-y_\gamma|}$는 Y에 다다르게 되고 그 길이는 $|x_\gamma-y_\gamma|$임을 알 수 있다. 따라서 두점 X에서 Y에 이르는 곡선의 최단 거리는 $\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \cdots, |x_\gamma-y_\gamma|\}$임을 알 수 있다.

■

예를 들어, 두점 (2, 8, 10, 7)과 (9, 15, 1, 3)을 연결하는 최단거리 곡선의 길이는 9이므로 두 노드 간의 수학적 최단거리 또한 9이다.

5. 결론 및 향후연구

본 연구에서는 실제 공간에서는 이론적이고 정형화된 해가 존재하지 않는 네트워크상의 지리적 문제를 특정 공간으로의 매핑을 통해 수학적 문제로 변환시켜 접근하여, 네트워크 노드들 사이에 지리적 특성과 연관된 문제들을 정의된 수학적 공간 내에서 정형화 시켜 해결하고자 하여, IP 주소 기반의 W-공간이라 하는 특수 공간을 제안하였다. W-공간에서 수학적 최단거리라고 해서 실제 공간에서 최단거리라고 할 수는 없는 것이다. 그러나 실제 공간에서의 네트워크 상의 문제를 W-공간 상의 문제로 매핑을 통해 수학적 해결을 도모하고자 하는 통합된 (unified) 프레임워크를 제공하는 데 그 의미를 두고 있다.

향후, 실제적인 의미와 근접하도록 정의는 되어 있으나, 지리적 요소에 적용이 되지 않은 가중치 공간에 대한 연구가 진행중이다.

참 고 문 헌

[1] J. Y. Yen, "Shortest Path Network Problems," Mathematical Systems in Economics, 1975

[2] T. S. E. Ng and H. Zhang, "Towards Global Network Positioning," ACM SIGCOMM Internet Measurement Workshop, 2001

[3] W. Theilmann and Kurt Rothermel, "Dynamic Distance Maps of the Internet," IEEE INFOCOM Conference, March 2000

[4] G. Su and J. Nieh, "Mobile communications with virtual network address translation," Columbia University, 2002

[5] T. S. E. Ng and H. Zhang, "Predicting Internet network distance with coordinates-based approaches," Proc. of IEEE INFOCOM, 2002