

직교다각형에 대한 지붕의 기하학적 성질¹⁾

나현숙, 신찬수, 안희갑

한국외국어대 디지털정보공학, 숭실대 정보과학대학, 한국과학기술원 전산학전공

cssini@hufs.ac.kr, hsnaa@ssu.ac.kr, heekap@tclab.kaist.ac.kr

Geometric properties on roofs of rectilinear polygons

Hyeon-Suk Na, Chan-Su Shin, Hee-Kap Ahn

School of Computing (Soongsil Univ.), Digital Info. & Eng.(HUFSS), Div. of Comp. Sci. (KAIST)

요 약

이차원 평면에 직교다각형이 주어져 있을 때, 직교다각형 위에 45도 각도로 기울어진 면들로 구성된 지붕 구조인 지붕(roof)을 정의할 수 있다. 본 논문에서는 직교다각형에 대한 지붕의 다양한 기하학적 성질을 살펴본다. 이것은 인공위성으로부터 얻은 건물의 평면도 이미지로부터 3차원 지붕구조를 획득하여 출력함으로써 사실감있는 영상을 제공하는 데 활용될 수 있다.

1. 서 론

인공위성으로부터 촬영한 집이나 빌딩의 이미지는 위에서 내려다본 이차원 평면도 영상이다. 이 영상을 보다 사실적으로 표현하기 위해선, 그 지붕을 3차원 모델로 재구성하여 보여줄 필요가 있다. 그러나 영상의 제한된 해상도 때문에, 건물의 경계 정보만을 추출하는 것이 일반적이다. 따라서 건물의 경계 정보만으로 3차원 지붕을 구성해야 한다. 일반적으로 건물의 경계는 이차원 평면에서 직교다각형(rectilinear polygon)의 형태로 정의된다. 직교다각형이란 각 에지가 수평선분이나 수직선분으로 구성된 단순 다각형을 의미한다. 현재까지의 연구[1,2]는 위성 사진으로부터 영상처리 기법을 이용하여 건물의 경계 정보를 얻고, 여기에 휴리스틱 알고리즘을 적용하여 몇 가지 지붕 모양을 생성하고 사용자에게 제시하는 방식이었다. 사용자는 이 중에서 자신이 원하는 지붕을 선택하게 된다.

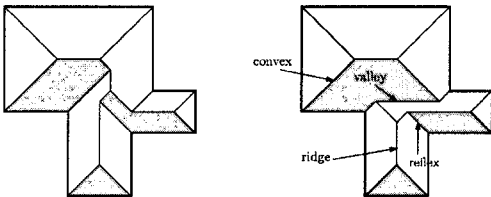


그림 1 왼쪽: straight skeleton. 오른쪽: 계곡(valley), 능선(ridge), 볼록(convex), 오목(reflex) 에지

이차원 XY 평면에 직교다각형 P 가 주어질 때, P 에 대한 지붕은 어떻게 정의할 수 있을까? 그림 1에는 지붕의 한 예가 나타나 있다. 지붕은 +Z 공간에 존재하는 P 를 덮고 있는 3차원 지붕의 단순화된 형태이며, 여러 개의 면(face)으로 구성되어 있다. 실제로 P 에 대해 정의할 수 있는 지

붕은 P 의 정점 개수의 지수 승만큼의 개수가 존재한다. 이 중에서 현실적으로 의미가 있는 적절한 지붕을 정의해야 한다. 본 논문에서는 지붕의 각 면이 지표면과 45도의 일정한 각도로 유지하며 +Z 공간에 있어야 하고, P 의 한 에지는 지붕의 한 면과 정확히 인접해야 한다.

본 논문의 주된 내용은 P 에 대한 모든 (적절한) 지붕을 계산해 내기 위한 전 단계로 지붕의 기하학적 성질을 파악하는 것이다. 본 논문에서의 모든 증명은 생략한다.

2. 용어 및 기존의 결과들

지붕구조는 지형구조의 특별한 경우이므로, 지형에 나타나는 능선(ridge)과 계곡(valley)을 지붕에서도 정의할 수 있다. (그림 1 참조) 능선과 계곡은 서로 마주보는 두 개의 45도 평면이 만나서 이루는 선분을 의미하며, 능선의 점은 주변보다 (지역적으로) 최대 고도(+Z방향으로의 높이)를 갖게 되며, 반대로 계곡의 점은 주변보다 (지역적으로) 최소 고도를 갖게 된다. 또한 능선과 계곡을 XY 평면으로 투영했을 때, X축이나 Y축에 평행하다. 지붕을 구성하는 에지에는 능선과 계곡 이외에도 XY 평면에 투영시 45도 (또는 135도) 각도를 이루는 선분들이 존재한다. 이 선분들도 능선과 계곡처럼, 지역적인 고도를 기준으로 각각 오목에지(reflex edge)와 볼록에지(convex edge)로 정의한다. 다각형의 볼록 정점에서는 항상 볼록에지가 시작되고, 오목정점에서는 오목에지가 항상 시작된다. 결국, 지붕은 면과 네 가지의 종류의 에지 - 능선, 계곡, 오목에지, 볼록에지-로 구성된다. 이러한 지붕의 3차원 구조를 XY 평면에 투영하여 얻은 이차원 구조는 평면 그래프(plane graph)가 됨을 쉽게 알 수 있다.

지붕 중에서 계곡을 하나도 포함하고 있지 않은 지붕구조를 straight skeleton이라고 부른다. 그림 1에 나타난 다각형에 대한 straight skeleton은 그림 1에 나타나 있다. Straight skeleton은 지붕들 중에서 가장 고도가 높은 지붕이며, 계곡이 존재하지 않기 때문에 빗물이 지상으로 자연스럽게 배수가 가능한 지붕이다. 이러한 개

1) 이 논문은 2005학년도 한국외대 교내학술연구비 지원(신찬수)에 의해 이루어졌음.

넙은 실제 건축물의 평면도와 그에 따른 지붕 설계 과정에서 자주 인용되며, 실제 이용되기도 한다[1]. 주어진 단순 다각형에 대한 stragith skeleton을 구성하는 알고리즘은 크게 세 가지 정도가 알려져 있다[3,4,5]. 다각형의 정점 개수가 n 이고 그 중에서 오목점의 개수가 r 이라면, [3]에서 제시한 알고리즘은 $O(nr \log n)$ 시간에 구성할 수 있다. 논문 [4]에서는 $O(n^{17/11} + \epsilon)$ 시간에 계산하는 좀 더 빠른 알고리즘을 제안했으며, 논문 [5]에서는 특수한 경우가 없는 다각형에 대한 $O(n\sqrt{n} \log n)$ 시간 랜덤(random) 알고리즘이 제안되었다.

3. 지붕 면의 기하학적 성질

3.1 기본 사각형과 합집합

직교다각형 P 의 각 에지를 다각형 내부로 P 의 경계와 만날 때까지 연장한다. 그러면 연장선들에 의해 P 의 내부가 사각영역들로 나뉘게 된다. 이러한 연장선들이 이루는 그리드(grid)를 기본 그리드(basic grid)라고 부른다. 기본 그리드 위에 존재하는 사각형 중에서 P 의 외부와 교차하지 않는 사각형을 기본 사각형(basic rectangle)이라 정의한다. 기본 사각형에 대한 지붕은 네 개의 면으로 구성되며, 특별히 피라미드(pyramid)라 부른다. 그렇다면, P 의 지붕은 다음과 같이 표현할 수 있다.

우선 기본 사각형들의 합집합이 P 를 커버(cover)하는 기본 사각형들의 집합을 고려하자. $+z$ 축으로 충분히 높은 고도에서 다각형을 바라보자. 이 때, 기본 사각형들의 피라미드 중에서는 다른 피라미드에 의해 일부가 가릴 수도 있고, 일부는 보일 수도 있다. 이렇게 위에서 P 를 바라볼 때, 피라미드들 중에서 보이는 면들만으로 구성된 3차원 구조를 위쪽 껍질(upper envelope)이라 한다. 그렇다면, 아래의 소정리가 성립한다.

소정리 1. P 의 모든 지붕은 P 를 커버하는 기본 사각형들의 집합에 대한 위쪽 껍질로 표현가능하다.

지붕의 한 면을 f 라 할 때, 지붕의 정의에 의해, f 는 항상 어떤 다각형 에지에 인접해 있어야 한다. 그 에지를 edge (f)라 표기하자. (인접 에지가 하나 이상이라도 그 에지들은 동일 직선위에 놓이므로 하나의 에지로 묶어서 edge (f)라 하자.) 지붕의 한 면은 기본 사각형들의 위쪽 껍질에 존재해야 한다. 다음 관찰은 지붕의 면과 그에 관련된 기본 사각형들의 특성을 정리한 것이다. 여기서, 어떤 면이 직선 ℓ 에 단조(monotone)하다는 것은 ℓ 에 수직인 임의의 평면과 면의 교차영역(이 경우엔 선분)이 항상 연결되어 있다는 의미이다.

관찰.

1. 지붕의 한 면 f 를 정의하는 기본 사각형들은 edge (f)를 포함하는 직선에 사각형의 같은 변이 포

- 함되어야 한다.
2. 지붕의 각 면 f 는 edge (f)에 평행한 축에 대해 단조하다.
3. 지붕의 한 면 f 의 임의의 한 점 p 에서 edge (f)를 연장한 직선 ℓ 위에 수직으로 내린 점을 p' 이라 하자. 그러면 선분 pp' 은 P 의 외부와 교차하지 않는다.

3.2 계곡의 기하학적 성질

지붕의 기하학적 성질을 규명하기 위해선 계곡과 능선의 모양이 매우 중요하다. 특히, 계곡의 모양은 전체 지붕의 구조를 결정짓는 중요한 요소이다. 본 절에서는 계곡과 능선의 양 끝 점의 구조가 매우 제한된 모양을 갖게 됨을 증명한다. 이것은 적절한 지붕의 총 개수를 계산하는 데 이용된다.

우선, 계곡에 대해 살펴본다. 계곡의 끝 점을 두 종류로 구분한다. 끝 점의 근처에 있는 지붕의 영역이 끝 점보다 고도가 같거나 낮다면 그 점을 열려(open)이라고 정의하고, 같거나 높다면 닫혀(closed)있다고 정의한다. 직관적으로 설명하면 다음과 같다. 비가 계곡에 내릴 때, 만약 한 쪽 끝 점이 열려 있다면 그 점을 통해 계곡이 빗물이 흘러나간다는 것을 의미하고, 끝 점이 닫혀 있다면 흘러나갈 수 없음을 의미한다. 그림 1의 왼쪽 지붕에는 하나의 계곡이 존재하는데, 양 끝 점 모두 열려 있음을 알 수 있다.

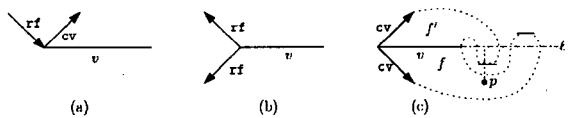


그림 2 계곡 끝 점에 연결 가능한 두 에지의 종류. 여기서 rf는 오목에지를 cv는 볼록에지를 나타낸다. (c)는 존재 불가능.

이전 계곡의 끝 점에 연결된 에지의 종류는 어떻게 되는지 살펴보자. 가장 먼저 알 수 있는 것은 다른 계곡이 곧바로 연결될 수 없다는 것이다. 결국 오목에지와 볼록에지들만이 연결될 수 있다. 그러나 끝 점의 분지수는 3이라고 가정했으므로, 끝 점에 올 수 있는 오목에지와 볼록에지의 개수는 두 개뿐이다. 계곡은 국부적으로 최소 고도를 갖는 점들이라는 사실과 오목, 볼록에지의 정의로부터 그림 2와 같은 세 가지 모양만 존재할 수 있다. 그림에서 화살표는 고도가 낮은 곳에서 높은 곳으로 향한다. 그러나 그림 2(c)의 경우는 실제로 존재할 수 없다. 그 이유는 계곡 v 의 위쪽으로 인접한 면 f' 의 에지 edge (f')는 v 의 아래쪽에 존재해야 하고, 아래쪽으로 인접한 면 f 의 에지 edge (f)는 v 의 위쪽에 존재해야 한다. 또한 두 에지는 그림처럼 모두 v 의 오른쪽에 와야 한다. 왼쪽에 위치한다면 두 볼록에지(cv-에지)에 의해 면의 단조성이 성립하지 않기 때문이다. 두 에지 모두 v 의 오른쪽에 온다면, 그림과 같은 모양이 되어야 한다. (대칭적인 모양에 대한 설명은 생략) 그러면 edge (f')의

바로 아래쪽에 있는 f 의 한 점에서 edge(f)의 연장선 위로 수선을 내리면 edge(f')과 교차하기 때문에 관찰 3에 위배된다. 그러므로 그림 2(c)는 존재할 수 없다. 따라서 계곡의 끝 점에 연결되는 두 에지의 종류는 그림 2(a)와 그림 2(b) 두 가지 뿐이다.

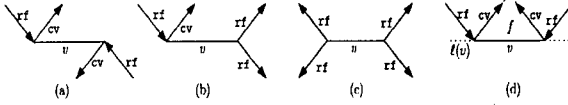


그림 3 계곡의 세 가지 모양. (d)는 존재하지 않는다.

이제, 계곡을 계곡의 양 끝점이 열려있는가와 닫혀있는가에 따라, 그림 3과 같이 네 가지 경우가 존재한다. 이 중에서 네 번째 경우(그림 3(d)의 경우)는 발생할 수 없다. 그 이유는 면 f 의 에지 edge(f)가 계곡 v 의 아래쪽에 위치하는 데, 면 f 가 시계방향으로든 반시계방향으로든 단조성을 유지하면서 v 아래쪽의 edge(f)에 연결될 수 있는 방법이 없기 때문이다. 그렇다면 그림 3의 (a), (b), (c) 세 가지 모양의 계곡만이 존재한다. (양 끝점이 모두 열려 있다면 그 계곡은 양방향 계곡이라 부르고, 한 쪽만 열려 있다면 단방향 계곡, 모두 열려있지 않고 막혀 있다면 폐쇄형 계곡이라 부른다.) 그림 4에 나타난 폐쇄형 계곡의 빗물은 빠져나가지 못하고 호수처럼 물을 담고 있는 상태가 된다.

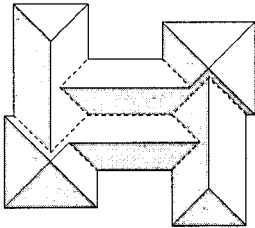


그림 4 폐쇄형 계곡

소정리 2. 계곡의 모양은 그림 3에 나타난, 양방향, 단방향, 폐쇄형 계곡, 세 종류만 존재한다.

3.2 계곡이 서로 연결될 수 있나?

이 절에서는 두 개 이상의 계곡들이 서로 연결되어 빗물이 계곡을 따라 흘러갈 수 있는지 살펴보겠다. 결론적으로 계곡들은 서로 연결될 수 없다.

계곡 v_1 에 다른 계곡 v_2 가 연결되어 있다고 가정하자. 편의상 v_1 은 수평선분이라고 하자. 그림 2처럼 다른 계곡 v_2 가 v_1 의 오른쪽에 연결된다고 할 때, v_1 의 오른쪽 끝 점에 연결된 오목에지와 볼록에지의 종류는 그림 2의 (a)와 (b) 두 가지뿐이다. 여기서 (b) 경우만을 고려한다. (b)의 경우는 v_1 의 왼쪽 끝 점에 두 개의 오목 에지가 연결된 형태이다. 그러면 v_2 의 끝 점은 하나의 오목에지와 하나의 볼록에지로 구성되어야 한다. 그렇다면 v_2 가 수평일 때와 수직일 때 두 경우로 나누어 고려할 수 있다. 이 중에서 그림 5처럼 수평인 경우만을 살펴보자.

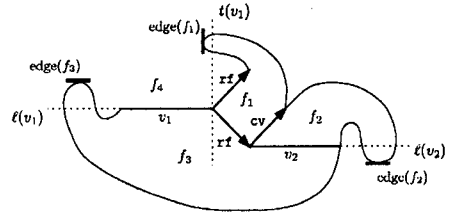


그림 5 두 계곡이 수평으로 연결되는 경우

에지 edge(f_1)은 반드시 v_1 의 오른쪽 끝 점을 지나가는 수직선 h 의 왼쪽에 존재해야 한다. 그래서 f_1 은 반시계방향으로 edge(f_1)과 연결되어야 한다. 반면에 edge(f_2)는 v_2 를 연장한 수평선 $\ell(v_2)$ 아래쪽에 위치해야 한다. f_2 는 단조성을 만족하기 위해 시계방향으로 edge(f_2)와 연결해야 한다. 면 f_3 도 시계방향으로 $\ell(v_1)$ 위에 위치한 edge(f_3)와 연결해야 한다. (반시계방향으로 연결한다면 f_2 에 대해서 관찰 3에 위배된다.) 이제 남은 것은 면 f_4 이다. 여기서 f_4 는 시계, 반시계 어느 방향으로든 $\ell(v_1)$ 위에 위치한 edge(f_4)와 연결할 수 없다. 시계방향으로 연결한다면 단조성을 만족하지 못하고, 반시계방향이라면 f_3 와 관찰 3에 위배된다. 결국, f_4 는 자신의 에지와 연결할 수 없다. 그러므로 수평으로 v_2 가 v_1 에 연결될 수는 없다.

소정리 3. 하나의 계곡에 다른 계곡이 연결될 수 없다.

4. 다른 결과 및 향후 연구 계획

앞에서 설명한 지붕의 성질 이외에도 다양한 사실을 증명할 수 있다. 주어진 직교 다각형이 가질 수 있는 지붕 개수의 하한 및 상한을 제시했고, 양방향 계곡만으로 구성된 모든 가능한 지붕을 생성하는 출력-종속(output sensitive) 알고리즘도 설계하였다. 앞으로는 양방향과 단방향 계곡이 섞여 있는 지붕을 생성하는 알고리즘을 설계할 계획이다.

5. 참고문헌

- [1] C. Brenner, Towards fully automatic generation of city models, *ISPRS*, Vol XXXIII, Amsterdam, 2000.
- [2] R. G. Laycock and A. M. Day, Automatically generating large urban environments based on the footprint data of buildings, *Proc. of 8th ACM symposium on Solid modeling and applications*, pp. 346 - 351, 2003.
- [3] O. Aichholzer and F. Aurenhammer, Straight skeletons for general polygonal figures in the plane, *Proc. 2nd Annu. Int'l. Computing and Combinatorics Conf.*, pp. 117-126, 1996.
- [4] D. Eppstein and J. Erickson, Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: Applications of a data structure for finding pairwise interactions. *Discrete Comput. Geom.*, 22, pp. 569-592, 1999.
- [5] Siu-Wing Cheng and Antoine Vigneron, Motorcycle graphs and straight skeletons. *Proc. 13th Annu. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 156-165 2002.