

경계 적분법을 이용한 박막유전체의 3차원 정전장 해석

김용일, 황보훈, 최홍순, 박일한
성균관대학교 전기전자공학과

Three-dimensinal electro static field calculation of thin film dielectric substance using boundary integral equation method.

Yong-il Kim, Hoon Hwang-Bo, Hong-soon Choi, Il-Han Park
Department Electronic and Electrical Engineering, Sungkyunkwan University.

Abstract - 본 논문에서는 3차원 공간에 종이와 같은 박막형 유전체가 있을 때 임의의 점에서의 전계 \vec{E} 를 구하기 위해 유전체의 분극벡터 \vec{P} 를 미지수로 하는 경계적 분법(Boundary integral method)을 사용한다. 경계적 분법의 사용으로 FEM 3차원 해석에 있어서의 요소분할의 난이성 및 계수 행렬의 대형화로 인한 컴퓨터 수행능력의 한계를 극복할 수 있다. 여기서 분극벡터 \vec{P} 를 구하기 위해 전하에서의 전계 \vec{E}_s 에 의한 유전체내의 분극벡터 \vec{p} 를 수식으로 정리하여 $[\bar{K}][\vec{P}] = [\vec{E}]$ 형태의 \vec{P} 를 미지수로 하는 system matrix를 구성한다. 위의 system matrix 통해 구해진 분극벡터 \vec{P} 를 이용하여 유전체 밖의 한 점에서의 전계세기 \vec{E}_m 를 구한 후 우리가 구하고자 하는 전계 \vec{E} 를 계산한다.

지수로 하는 경계적분법을 사용한다.

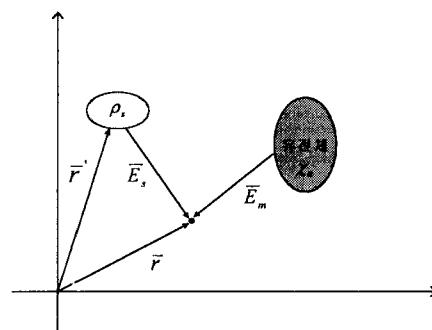


그림 1. 3차원 영역 문제의 일반 모델

그림 1과 같이 관측점에서의 \vec{E} 를 구하기 위해서는 전하에서의 \vec{E}_s 와 유전체에서의 \vec{E}_m 의 합으로 구할 수 있다.

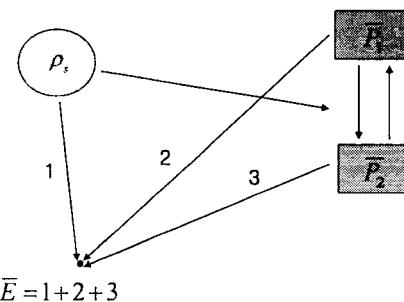


그림 2. 임의의 관측점에서의 전계

여기서 유전체 내에서는 전하에서의 \vec{E}_s 에 의해 분극이 일어나며 분극 된 유전체의 요소들은 각각의 요소들의 전계에 의한 영향을 받은 후의 요소에서의 전계들의 합이 \vec{E}_m 이 된다.

그림2는 \vec{E} 를 구하는 과정을 자세히 설명해 주고 있다. \vec{E}_m 을 구하기 위해서 분극 벡터 \vec{P} 를 구해야 하는데 이는 위의 과정을 수식으로 정리하여 $[\bar{K}][\vec{P}] = [\vec{E}]$ 형태의 \vec{P} 를 미지수로 하는 시스템 방정식을 구성하여 구할 수 있다.

2. 본 론

2.1 기본이론

3차원 공간에 임의의 전하와 유전체가 있을 때 임의의 점에서의 전계를 구하기 위해 유전체의 분극벡터를 미

2.1.1 전계의 표시식

그림1과 같은 구조에서 유전체 내의 어느 한점 \bar{r} 에서의 전기변위 \bar{D} 는

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (1)$$

\bar{E} 는 유전체 내의 관측점에서의 전계를 나타내는데, 이는 앞에서 설명한 것처럼 $\bar{E} = \bar{E}_s + \bar{E}_m$ 로 나타낼 수 있다. 전하에 의한 전계 \bar{E}_s 을 수식으로 나타내면,

$$\bar{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\nu \quad (2)$$

유전체에 의한 전계 \bar{E}_m 은,

$$\bar{E}_m = -\nabla \phi_p \quad (3)$$

따라서, 전체전계 \bar{E} 을 수식으로 정리하면,

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\nu - \nabla \phi_p \quad (4)$$

여기는 ϕ_p 는,

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{-\nabla' \cdot \bar{P}}{r} d\nu + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\bar{P} \cdot \bar{n}}{r} ds \quad (5)$$

이다. 유전체가 동방성이고 선형적일 경우 $\nabla \cdot \bar{P}(\bar{r}) = 0$ 에 의해 위 식의 첫째항은 사라지며, \bar{P} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad (6)$$

식(6)에 식(4)를 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\chi_e}{4\pi} \int \frac{\rho_s(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\nu - \epsilon_0 \chi_e \nabla \phi_p \\ &= \frac{\chi_e}{4\pi} \int \frac{\rho_s(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\nu - \frac{\chi_e}{4\pi} \int \frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot \bar{n}(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} ds \end{aligned} \quad (7)$$

위식에서 우변 첫 항을 알면, 위식은 \bar{P} 를 미지수로 하는 적분방정식이 된다.

2.1.2 유전체의 분극계산

우선, 분극을 구하기 위해서 유전체를 N개의 요소로 나눈다.

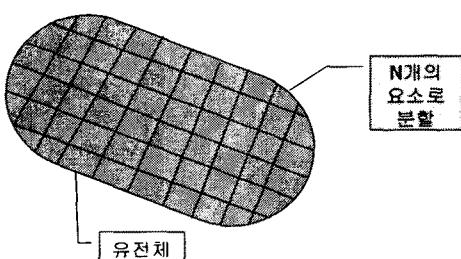
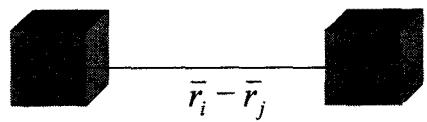


그림 3. N개의 요소로 분할된 유전체



i번째 요소

j번째 요소

그림 4. 분할된 N개의 6면체 요소 중 임의의 i,j번째 요소

우선, N개의 요소 중 임의의 i번째 요소와 j번째 요소를 선정하여 그림 4와 같이 i번째 요소표면의 면 전하 ($\sigma(\bar{r}) = \bar{n} \cdot \bar{P}(\bar{r})$)에 의한 i번째 요소 중심점에 미치는 전계세기 \bar{E}_{mi} 는

$$\bar{E}_{mi} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_j \bar{n}_j \cdot \bar{P}(\bar{r}_j) \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} ds_j \quad (8)$$

이 된다. 여기서 각 요소가 6면체이기 때문에 i번째 요소 중심점 \bar{r}_i 에 유전체의 전체 요소가 미치는 전계세기 \bar{E}_{mi} 는

$$\bar{E}_{mi} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{sj} \bar{n}_j \cdot \bar{P}(\bar{r}_j) \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} \Delta S_j \quad (9)$$

식(6)를 $\bar{P}_i = \epsilon_0 \chi_e (\bar{E}_{si} + \bar{E}_{mi})$ 와 같이 표현하여 식(9)의 대입에 의해서 i번째 요소 중심점에서의 전계 세기 \bar{E}_{si} 는

$$-\bar{E}_{si} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{sj} \bar{n}_j \cdot \bar{P}_j \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} \Delta S_j - \frac{\bar{P}_i}{\epsilon_0 \chi_e} \quad (10)$$

이를 직각좌표계에서 x, y, z의 성분으로 전개하면

$$\begin{aligned} -E_{srx} &= \sum_{j=1}^N (K_{ijrx} P_{jx} + K_{ijry} P_{jy} + K_{ijrz} P_{jz}) - \frac{P_{ix}}{\epsilon_0 \chi_e} \\ -E_{sry} &= \sum_{j=1}^N (K_{ijrx} P_{jx} + K_{ijry} P_{jy} + K_{ijrz} P_{jz}) - \frac{P_{iy}}{\epsilon_0 \chi_e} \\ -E_{srz} &= \sum_{j=1}^N (K_{ijrx} P_{jx} + K_{ijry} P_{jy} + K_{ijrz} P_{jz}) - \frac{P_{iz}}{\epsilon_0 \chi_e} \end{aligned} \quad (11)$$

와 같이 정리된다.

여기서 K_{ijxx} , K_{ijxy} , ..., K_{ijzz} 는 i번째 요소의 중심점과 j번째 요소표면의 한 대표점 사이의 거리, 방향 그리고 j번째 요소의 표면적, 방향 등에 의해서 정해진다. 이로써 분극벡터 P 를 미지수로 하는 시스템 행렬(System matrix) $[E_s] = [K][P]$ 을 완성할 수 있다.

여기서 시스템 행렬이 x, y, z의 3개의 성분을 가지므로 $[E_s]$ 는 $3N \times 1$, $[K]$ 는 $3N \times 3N$, $[P]$ 는 $3N \times 1$ 의 행렬을 갖는다.

이 행렬식을 풀어냄으로 해서 각 요소에서의 분극 \bar{P}_i 가 구해진다.

2.1.3 분극에 의한 전계 계산

식(6) $\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e (\bar{E}_s + \bar{E}_m)$ 에서 위에서 구한 분극벡터를 이용하여 유전체에서의 전계세기 \bar{E}_m 을 구할 수 있다. 임의의 점에서의 전계세기는 전하에서의 전계 \bar{E}_s 와 유전체에서의 전계 \bar{E}_m 의 합이므로 식(2)를 이용하여 전하에서의 전계를 구한 후 최종적으로 구해야 할 임의의 점에서의 전계를 구할 수 있다.

2.2 코딩작업을 통한 박막유전체의 전장해석

우선, 일반 meshing tool을 사용하여 박막유전체(종이) 모델을 2차원으로 설계한 후 임의로 mesh를 나눈다. mesh를 통해 얻어진 좌표와 요소 정보를 토대로하여 박막유전체의 두께 방향으로 3차원 형상을 구현한다.

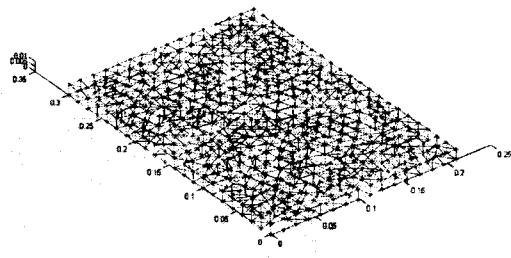


그림 5. 3차원으로 구현한 mesh형상

그림 5와 같이 2차원 형상에서 높이를 추가하여 3차원 mesh형상을 구현하였다. 3차원 형상 정보로부터 박막유전체의 3차원 노드 정보를 얻을 수 있고 그로부터 각 면의 법선 벡터 정보, 각 5면체간의 거리 정보, 등 필요한 모든 정보를 얻을 수 있다.

위의 정보를 토대로 $[K][P] = [\bar{E}]$ 의 시스템 행렬을 완성시킨 후 분극벡터값을 $[\bar{K}][\bar{P}] = [\bar{E}]$ 의 시스템 행렬을 통하여 구할 수 있다. 여기서 구해진 분극벡터를 식(6)을 이용하여 유전체에서의 전계를 구하게 된다. 마지막으로 전하에서의 전계와 유전체에서의 전계를 합하여 최종적으로 구하고자 하는 임의의 점에서의 전체 전계값을 얻을 수 있다.

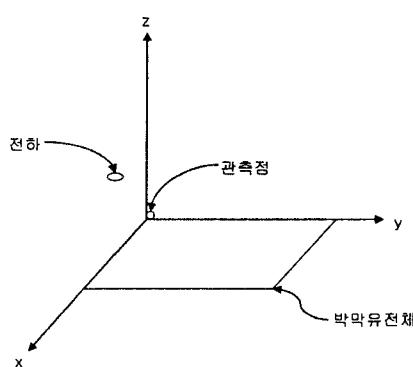


그림 6. 박막유전체에서의 전하와 관측점의 위치

본 논문 해석에서는 그림 6과 같이 관측점의 좌표를 원점으로 하고 전하의 위치는 관측점에서 박막유전체의 반대방향으로 하여 해석하였다. 박막유전체의 크기는 종이모델의 크기와 같은 일반 A4의 크기로 하여 모델링 하였으며 mesh의 개수는 716개로 하였다. mesh의 형

상은 일반적인 삼각형에 3차원형상을 구현하기 위하여 높이를 추가한 3각기둥으로 하여 모델링 하였다. 컴퓨터에서 프로그래밍 하여 계산된 분극벡터는 앞의 기본이론에서와 같이 2148x1의 행렬이 계산되었으며, 분극벡터에 의한 유전체에서의 전계 \bar{E}_m 은 $1.0e+011 * (-8.4903 - 8.1610 - 6.8385)$ 의 값이 계산되었다. 이는 각각 x, y, z의 벡터값에 해당하며, -값은 관측점을 기준으로 전하의 방향과 반대방향에 위치하기 때문이다. \bar{E}_s 는 관측점에서의 전하에 의한 전계값 이므로 식(2)에 의해 $1.0e+012 * (1.7297 1.7297 1.7297)$ 의 값이 계산되며, 최종적인 임의의 점에서의 전계는 두 전계를 더한 $1.0e+012 * (0.8806 0.9135 1.0458)$ 으로 계산되었다.

3. 결 론

본 논문에서는 경계적분법을 사용하여 3차원 공간에 종이와 같은 박막유전체가 있을 때 임의의 점에서의 전계를 구하기 위하여 분극벡터와 전계를 계산하기 위한 기본이론을 정립하였고, 이러한 기본 이론을 바탕으로 2차원 박막유전체 모델을 3차원으로 모델링 하여 분극벡터에 관한 시스템 행렬을 구성하였다. 여기서 구한 분극벡터를 이용하여 유전체에서의 전계 및 전하에서의 전계를 계산한 후 최종적인 임의의 점에서의 전계를 해석하였다.

전계 필드 전체를 다시 해석하는 FEA와 같은 방식은 매 시간 스텝마다 많은 계산 시간을 소모하나, 유한 체적적분 방정식은 분할된 물체의 표면에서만 전하량이 적분법에 의해 계산이 되고 대형의 매트릭스를 풀어낼 필요가 없으므로 효율적인 수단이 된다.

앞으로의 연구는 이러한 해석 방법을 바탕으로 각 요소마다 힘의 크기와 방향을 구하고 3차원 공간의 박막유전체 모델을 동역학 해석 시스템과 연계하여 박막유전체 모델이 움직일 때마다 변화하는 위치에서의 전계를 각각 해석할 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단의 정전계구동 대변형 시스템의 효율적 운동특성 해석기법 개발과제에 의한 지원으로 수행되었습니다.

[참 고 문 헌]

- [1] D. H. Kim, I. H. Park, "Computation of three-dimensional electromagnetic field including moving media by indirect boundary integral equation method", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 35, No. 3, pp. 1932 - 1938, 1997.
- [2] Sompoth Peaiyoun, Computational aspects of the boundary element method applied to two-and three-dimensional magnetic field problems, Ph. D. Dissertation, Dept. of Electric Power Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, 1987.
- [3] J. P. Peng, S. Salom and M. V. K. Chari, "A comparison of finite element and boundary element formulations for three-dimensional magnetostatic problems", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG- 20, pp. 1950 ~ 1952, 1984
- [4] N. Tosaka and T. Nakayama, 경계요소법 기초, 원창출판사, 1995
- [5] J. R. Reitz, et al., Foundations of Electromagnetic theory, Addison-Wesley publishing company, 1992