

선전류에 의해 발생되는 자장의 해석을 위한 유한요소법과 해석해의 결합 기법

김영선* · 이기식
단국대학교 전기공학과

Analysis of Magnetic Fields induced by Line Currents using Coupling of FEM and Analytical Solution

Young-Sun Kim* · Ki-Sik Lee

Department of Electrical Engineering, Dankook University

Abstract- The analysis of magnetic fields(2-D) induced by line currents, such as Overhead Trolley Lines or Transmission Lines, is not so easy by using the standard Finite Element Method(FEM). Mesh generation is one of the most important processes in the standard FEM. Because, the current region is relatively small compared with whole region, and actually is a line without thickness, the mesh refinement around the source lines yields many demerits. A way of supplement such a defect, we proposed the coupling scheme of analytical solution and FEM.

In this study, the analytical solution is adopted around the region of line currents and FE solution is applied to the rest of source region. And the two types of solution are coupled at the artificial boundary.

To verify the usefulness of proposed algorithm, simplified model with magnetic material in FE region is chosen and analyzed. The results are compared with those of standard FEM. And the errors between them can be reduced by increasing harmonic orders.

1. 서 론

유한요소법을 이용하여 전자장을 해석할 경우 해석 대상을 특별한 기하학적 형태의 요소로 분할하는 과정을 거쳐야 한다. 이때 자장의 변화가 심한 곳에는 요소의 크기를 다른 부분 보다 작게 하여야 한다. 또한, 주 관심영역은 유한요소법의 오차를 줄여서 좀 더 정확한 결과를 나타내게 하기 위하여 더욱 많은 미소요소로 분할하게 한다. 그리고 분할된 요소내의 함수분포를 적당한 근사함수로 설정하여 지배방정식을 구하고, 이를 결합하여 전체 영역에 대한 선형대수방정식을 구한다. 그리하여 구하여진 해석모델의 근사해는 어느 정도 정해(exact solution)에 근접할 수가 있게 된다.

전기철도의 가공 전차선이나 지상 전력선의 경우는 해석대상에 비해 자장분포의 원인이 되는 소스 부분이 매우 작은 영역에 불과하다. 이때 유한요소해석은 소스 부분이 매우 작은 영역이므로 미세하게 요소분할을 하여야 한다. 그러므로 요소의 수가 증가되어 미지수가 증가하고, 이로 인해 전자계산기의 기억용량과 계산시간이 늘어나는 단점을 가지고 있다. 또한 2차원 유한요소 해석 시 전류영역이 매우 작으므로 하나의 점으로 간주하여 다른 선전류 문제(point source)는 해석이 용이하지 않다.

본 논문에서는 이 문제를 해결하기 위해 유한요소법의 활용 기법중의 하나인 해석해와 유한요소법을 결합하여 전자장을 해석하는 방법을 제시하였다. 선전류를 포함하는 영역에서는 해석해를 적용하고, 이외의 영역에서는

유한요소법을 이용하여 결합하였다.

제안한 알고리즘을 검증하기 위하여 자성체가 존재하는 모델을 설정하여 기존의 유한요소법과 제안한 방법의 해를 비교하였다. 해석 영역에서 자성체 주변의 포텐셜을 비교한 결과 제안한 방법에 의한 해와 기존의 유한요소법에 의한 해가 고조파 차수의 증가에 따라 근사함을 보였다.

2. 본 론

2.1 모델 설정 및 해석해

그림 1과 같이 선전류원 I 와 재질이 서로 다른 두 영역 I과 II를 갖는 해석 모델을 설정하고 유한요소법과 해석해의 결합을 통하여 원통좌표계에서 2차원 자장 해석을 실시하였다.

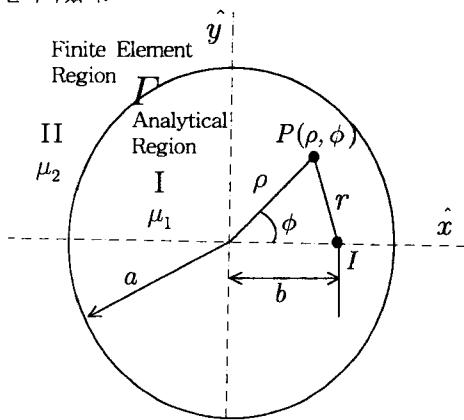


그림 1. 모델 설정

해석 영역에서 반경 ρ 가 영역 I($\rho < a$)이거나 II($\rho > a$)에 위치하는 것과 무관하게 전류 I 에 의해 발생되는 자장의 포텐셜은 순수 전류에 의한 항과 경계에 의한 항의 합으로 표현된다. 식 (1)은 영역 I에서의 해석해를 나타낸 것이다.

$$A_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \ln r + \sum_{n=0}^{\infty} [C_{1n} \rho^n \cos n\theta + S_{1n} \rho^n \sin n\theta] \quad (1)$$

여기서,

C_{1n} , S_{1n} : 적분 상수

2.2 수학적 모델링

변위 전류를 무시한 암페어 주회 법칙으로부터 유한요소법을 적용하고 정리하면 다음과 같다.

$$\int_s \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right] dx dy - \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} N \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \int_s J N dx dy \quad (2)$$

이산화된 식 (2)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

A_2 : 경계 Γ 에서의 포텐셜

A_1 : A_2 을 제외한 포텐셜

식 (2)의 좌변의 두 번째 항은 경계적분항으로서 식 (4)과 같다.

$$B_j = - \oint_{\Gamma} N_j H_{\theta} d\Gamma \quad (4)$$

여기서,

N_j : 절점 j 에 대한 형상함수

식 (4)에서 H_{θ} 는 경계 Γ 에서 자계의 접선 성분이 연속이므로 계수를 정리하여 H_{θ} 를 구하면 식 (5)로 표현된다.

$$\begin{aligned} H_{\theta} &= - \frac{1}{\mu_1} \partial \frac{A_1}{\partial \rho} \\ &= - \frac{I}{2\pi} \frac{\rho - b \cos \theta}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \frac{1}{\rho} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

영역 I과 II의 경계에서 포텐셜을 푸리에 급수로 전개하면 C_n , S_n 은 식 (6)와 (7)처럼 표현된다.

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[A(\theta) - \frac{I}{2\pi} \ln r \right] \cos n\theta d\theta \quad (6)$$

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[A(\theta) - \frac{I}{2\pi} \ln r \right] \sin n\theta d\theta \quad (7)$$

θ 의 각 구간 $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$ 에서는 $A(a, \theta)$ 가 보간법에 의해 식 (8)처럼 표현이 가능하다.

$$A(a, \theta) = \frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} A_j + \frac{\theta - \theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j} A_{j+1} \quad (8)$$

식 (8)를 식 (6)와 (7)에 적용하여 삼각함수의 적분공식을 이용하면 구하여 보면 식 (9)~(11)처럼 급수의 형태로 나타낼 수 있게 된다.

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_t} Z_j A_j - (M_c)_0 \quad (9)$$

$$C_n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{n} U_{nj} A_j - (M_c)_n \quad (10)$$

$$S_n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{n} V_{nj} A_j - (M_s)_n \quad (11)$$

결국 식 (9)~(11)처럼 푸리에급수 전개된 계수 C_n , S_n 은 경계상의 절점의 포텐셜 값과 상수항으로 표현되었다. 푸리에급수 전개된 계수 C_n , S_n 을 $\{A_3\}$ 으로 정의하면 식 (12)처럼 표현할 수 있다.

$$\{A_3\} = \{C_1, S_1, C_2, S_2, \dots, C_{N_t}, S_{N_t}, C_0\}^T \quad (12)$$

여기서,

N_h : 푸리에급수 전개의 고조파 수

이 경우 공간에 대한 고조파의 개수는 무한개가 되어야 하나 N_h 개로 잡았다. 그리고 식 (9)~(11)에 의해 식 (12)는 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{A_3\} = [T] \{A_2\} - \{M\} \quad (13)$$

$$\{M\} = \{(M_c)_1, (M_s)_1, \dots, (M_c)_{N_t}, (M_s)_{N_t}, M_{c_0}\}$$

(14)

여기서,

$$T_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\pi n} U_{nj} & : i = \text{홀수} \\ \frac{1}{\pi n} V_{nj} & : i = \text{짝수} \end{cases}$$

2.3 경계 적분의 결합

식 (4)의 경계 적분항을 1차함수로 가정한 형상함수를 도입하여 정리하면 식 (15)와 같이 된다.

$$B_j = \sum_{n=1}^{N_t} (U_{nj} C_n + V_{nj} S_n) + J_j \quad (15)$$

식 (15)는 다시 식 (13)처럼 계수 C_n , S_n 의 $\{A_3\}$ 로 표현할 수 있다.

$$\{B\} = [K] \{A_3\} + \{J\} \quad (16)$$

여기서,

$$K_{ij} = \begin{cases} U_{nj} & : i = \text{홀수} , n = (j+1)/2 \\ V_{nj} & : i = \text{짝수} , n = j/2 \end{cases}$$

최종적으로 식 (13)와 (16)를 식 (3)대입하여 정리하면 식 (17)의 행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - KT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M - J \end{bmatrix} \quad (17)$$

2.4 사례 연구

본 연구의 타당성을 검증하기 위하여 그림 2과 같이 공기 중에 비투자율 $\mu_r = 1,000$ 인 자성체가 존재하고, 전류 $I = 1[A]$ 가 흐르는 모델을 설정하여 기존의 유한요소법과 제안한 방법으로 해를 구하였다. 해석영역의 크기는 가로, 세로가 $1[m]$ 인 영역에 해석해를 적용하고자 하는 영역을 각각 $a_1 = 0.1[m]$ 와 $a_2 = 0.49[m]$ 의 두 가지 경우로 하여 결과를 비교하였다.

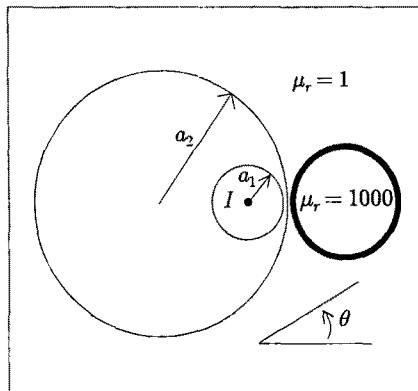


그림 2. 예제 모델

그림 3은 해석적인 영역의 반지름을 a_2 로 설정하여 해석한 결과의 자속분포를 나타내고 있다. 반지름을 a_1 및 a_2 로 설정한 경우 같은 형태의 요소 분할을 통하여 해석하였으며, 결합 경계를 $\rho = a_2$ 로 한 경우 유한요소법과 비교하여 미지수를 60% 정도로 줄일 수 있다.

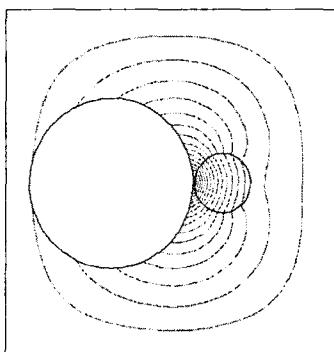


그림 3. 자기력선 분포($\rho = a_2$, $N_h = 20$)

그림4, 5는 기존이 FEM과 제안한 방법의 두가지 경계 설정에 대하여 결과를 나타내었다. 소스(전류)로부터 가까운 영역의 변화가 심하므로 자기벡터포텐셜의 분포 중 $170 \leq \theta \leq 190$ 인 곳을 확대 도시하였다. 고조파 차수 가 20항인 경우 $\rho = a_2$ 인 영역을 경계로 설정하였을 경우 유한요소법과 다소의 차이가 있으나, 고조파 차수를 40으로 한 경우 결합 경계를 넓게 설정하여도 기존의 방법과 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

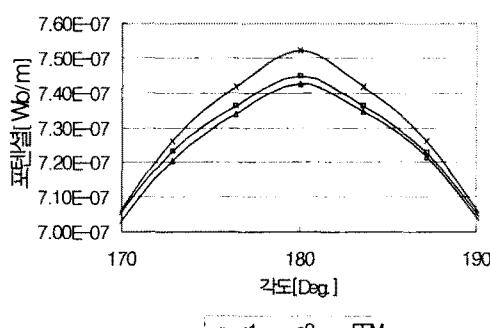


그림 4. 자성체 주변의 포텐셜($N_h = 20$)

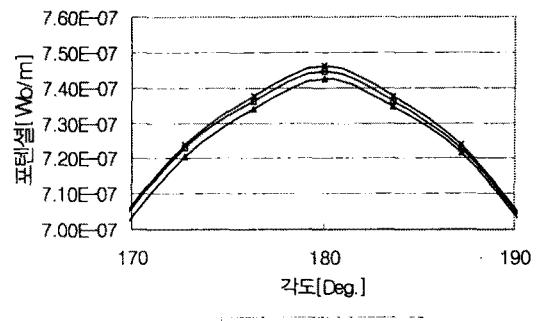


그림 5. 자성체 주변의 포텐셜($N_h = 40$)

3. 결 론

본 논문에서는 전기철도의 가공 전차선이나 송배전선로와 같이 소스가 선전류이고 관심 영역이 선전류원으로부터 멀리 떨어져 있는 경우, 선전류를 하나의 점으로 보아 일정한 영역까지는 해석해를 적용하고, 그 외는 유한요소법을 적용하여 이를 경계에서 결합하는 방법을 제시하였다.

본 방법은 소스가 존재하는 내부 영역의 요소분할을 수행하지 않고, 경계에서 자기벡터포텐셜과 자계강도의 접선성분의 연속성을 이용하여 1차 함수로 근사된 자기벡터 포텐셜을 푸리에 급수로 대치하여 해석해와 결합하였다. 그러므로 기존의 유한요소법에 비해 내부 영역의 요소수에 해당하는 만큼의 계산 시간 및 기억 용량을 감축시켰다. 또한, 기존의 유한요소법은 소스 부분이 관심 영역에 비해 작으면 선전류를 하나의 점으로 처리하기 힘든 반면 제안한 방법은 이를 해결하여 해석영역의 공간 활용도를 높였다.

제안한 알고리즘의 검증을 위하여 자성체가 존재하는 모델을 채택하여 기존의 유한요소법과 제안한 방법의 해를 비교하였다. 그리고 해석 영역에서 임의의 경로에 대하여 해석해 영역의 범위를 확장하여 자기벡터포텐셜 값을 비교한 결과 고조파 차수를 증가시킴에 따라 이 둘의 해가 근사함을 검토하였다. 향후 다중 선전류이거나, 소스가 교류인 경우의 문제에 적용하여 연구하는 것이 필요하다고 사료된다.

[참 고 문 헌]

- [1] 민석원, “송전선 인근의 생체 및 물체 표면 전계 분포 해석”, 순천향산업기술연구소논문집, 제 2권 1호, pp.39~48, 1996.
- [2] Young-Sun Kim, Ki-Sik Lee, Moon-Nam Lee, “Application of Infinite Boundary Condition to Finite Element Analysis”, Proceeding of ICEE, VOL. 3, pp.1768~1772, July 2001.
- [3] Sheppard J. Salmon, Finite Element Analysis of Electrical machine, Kluwer Academic Publishers, pp.197~207, 1995.