

철도계통 고조파 분석에 확률론적 방법 적용

송학선<sup>\*</sup>·이준경<sup>\*</sup>·이승혁<sup>\*</sup>·김진오<sup>\*</sup>·김형철<sup>\*\*</sup>  
<sup>\*</sup> 한양대학교 전기공학과 <sup>\*\*</sup> 한국철도기술연구원

Harmonics Analysis of Railroad Systems using Probabilistic Approach

Hak-Seon Song<sup>\*</sup>·Jun-Kyong Lee<sup>\*</sup>·Seung-Hyuk Lee<sup>\*</sup>·Jin-O Kim<sup>\*</sup>·Hyung-chul Kim<sup>\*\*</sup>  
<sup>\*</sup> Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University <sup>\*\*</sup> KRRI

**Abstract** - A magnitude of generated harmonic currents along with the operation of traction has nonlinear characteristics. The harmonic currents generated along with the operating speed of electrical railroad traction is to analyze very difficulty. This paper therefore presents probabilistic approach for the harmonic currents evaluation about the operating speed of the arbitrary single traction. To use probabilistic method for railroad system, probability density function(PDF) using measuring data based on the realistic harmonic currents per operating speed is calculated. Mean and variance of harmonic currents of single traction also are obtained the PDF of the operating speed and electrical railroad traction model. Uncertainty of harmonic currents expects to results through mean and variance with PDF.

The probability of harmonic currents generated with the operating of arbitrary many tractions is calculated by the convolution of functions. The harmonics of different number of tractions are systematically investigated. It is assessed by the total demand distortion(TDD) for the railroad system.

1. 서 론

일반적으로 송·배전 계통은 3상 평형부하인 반면에 전기철도 부하는 단상 대용량 집중부하로 이동과 정지가 빈번하고 부하변동이 극심한 전기적 특성을 갖고 있기 때문에 급전계통에 필연적으로 전압강하로 인한 전압변동 및 불평형 그리고 전력변환장치나 제어장치에 전력용 반도체 소자로 인한 고조파 등 많은 문제가 발생되고 있다. 전기철도 부하는 일반적인 부하특성과는 상이하게 물리적으로 부하위치가 빈번하게 변화하는 등 급전계통의 전기적 특성이 열차의 물리적 환경에 따라 변하기 때문에 특성을 고려하여야 하며 전철변전소 사고에 의한 연장급전이나 향후 교통량 증가에 의한 중대부하 운행 등에도 대처하지 않으면 안 된다. 본 논문에서는 철도차량 속도에 따른 고조파 전류의 분석을 기존의 결정론적인 방법이 아닌 확률론적 접근방법을 제시하는 바이다. 확률론적인 방법을 이용하기 위해서 운행 속도에 따른 전류의 고조파의 실측데이터를 기초로 속도에 대한 확률밀도 함수를 계산하였다. 확률밀도 함수를 바탕으로 평균과 분산을 통하여 고조파 전류의 불확실성을 예측하였다. 또한 이를 바탕으로 철도 차량 수가 증가되어 운행될 경우 변전소측에 유입되는 전류의 고조파 영향을 확률론적 고조파 벡터의 합을 통하여 해석할 수 있는 방법을 제시하였다.

2. 본 론

2. 임의 철도차량의 운행에 따른 전류의 확률밀도 함수

일반적인 DC 경전철의 경우 DC 급전선을 통하여 차량부하에 전력을 공급받아 스위칭 소자로 제어되는 인버터를 통하여 3상 유도전동기를 구동한다. 이러한 스위칭 소자의 사용은 고조파 발생의 원인이 된다. 또한 철도부하의 특성으로 인한 운행속도의 가감속으로 생성되는 고조파의 크기는 다를 것이다. 이러한 고조파는 식 (1)과 같이 실수부와 허수부로 표현된다.

$$I_h = \sum_{k=1}^{\infty} X_k + j \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \quad (1)$$

여기서,  $h$  : 고조파 차수

$X, Y$  : 고조파 전류의 실수부와 허수부

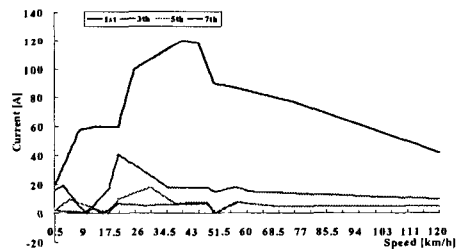


그림 1. 고조파전류의 크기

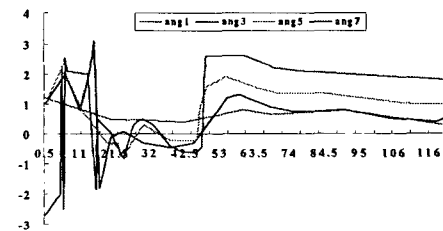


그림 2. 고조파전류의 위상

그림 1과 2는 각각 참고문헌 [1]의 데이터를 바탕으로 철도차량 운행에 따른 고조파 전류의 크기와 위상에 대한 데이터를 참조하여 나타낸 것이다.

2.1 속도의 확률밀도함수

고조파 전류는 열차의 운행속도에 따라 다르기 때문에 열차의 운행속도는 고조파의 확률론적 분석기법에서 확

률변수로 정의된다. 아래 그림 2는 열차의 운행속도의 확률분포곡선으로서 2주간의 측정데이터를 기반으로 산출하였다. 각 속도 구간은 km/h로 분리하였고 속도의 증분량( $\Delta v$ )은 1km/h이다. 임의의 속도  $v$ 에 따른 확률은 아래 식 (2)와 같이 정의된다.

$$P_{v_i} = (v_i < V < v_{i+1}) \quad (2)$$

따라서 이 값은 주어진 그림 3의 확률밀도함수로부터 계산될 수 있다.

$$P_{v_i} = \frac{(P_{v_i} + P_{v_{i+1}})}{2} \Delta v_i \quad (3)$$

여기서  $\Delta v_i$  : 임의의 구간에서의 속도의 증분량

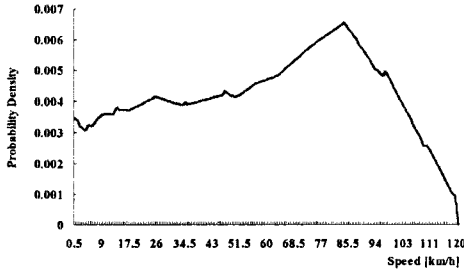


그림 3. 속도의 확률밀도함수

## 2.2 운행된 임의의 열차 1대에 대한 각 고조파 전류의 기대값 및 분산

총 흐르는 전류를 스펙트럼한 결과로 나타나는 각 고조파전류는 중심극한이론(Central Limit Theorem)에 의거하여 각 차수의 고조파전류는 정규분포를 따른다고 정의될 수 있으며 식 (4)와 같이 일반화 된다.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4)$$

따라서 위의 확률밀도 함수를 계산하기 위해서는 기대값( $\mu$ )과 표준편차( $\sigma$ )의 추정치를 먼저 계산하여야 한다. 이들의 각 확률변수는 다음과 같은 과정에 의해 계산될 수 있다.

[Step I] 우선 고조파 전류의 실수부의 기대값의 추정치와 실수부 표준편차의 추정치는 다음 식 (5)와 (6)을 이용하여 계산한다.

$$\widehat{\mu}_{X_n} = \int_0^{\max} X_n(v)P(v)dv = \sum_{v=0}^{\max} X_n(v)P_v \quad (5)$$

$$\widehat{\sigma}_{X_n} = \sqrt{\sum_{v=0}^{\max} X_n(v)^2 P_v - \widehat{\mu}_{X_n}^2} \quad (6)$$

[Step II] 마찬가지로 전력품질을 평가하기 위한 자료로 사용될 각 고조파 전류의 허수부의 기대값과 표준편차의 추정치는 식 (7)과 (8)로 정의된다.

$$\widehat{\mu}_{Y_n} = \int_0^{\max} Y_n(v)P(v)dv = \sum_{v=0}^{\max} Y_n(v)P_v \quad (7)$$

$$\widehat{\sigma}_{Y_n} = \sqrt{\sum_{v=0}^{\max} Y_n(v)^2 P_v - \widehat{\mu}_{Y_n}^2} \quad (8)$$

## 2.3 Joint Probability Density Function(JPDF)

전류의 분배라는 물리적인 측면에서 철도 급전변전소

에서 공급되는 전류는  $n$ 개의 철도차량에 독립적으로 공급되며 이는 각 열차 운행에 독립적이다. 즉, 이러한 물리적 현상을 수학적으로 모델링하면 독립적인 확률변수  $x_i$ 가  $n$ 개 주어질 때 이들의 합은  $x_t$ 로 나타낼 수 있다. 또한 이것은  $n$ 개의 기대치의 합( $\mu_t$ )과 표준편차의 합( $\sigma_t$ )을 가진 확률밀도함수이다.  $X_t$ 와  $Y_t$ 가 공동으로 정규분포라는 것을 증명하기 위해 선형결합  $aX_t + bY_t$ 는 모두  $a$ 와  $b$ 에 대하여 정규분포라는 것을 증명하는 것으로 설명할 수 있다. 선형결합은 식 (9)와 같다.

$$aX_{t,h} + bY_{t,h} = \sum_{i=1}^N aX_{i,h} + \sum_{i=1}^N bY_{i,h} = \sum_{i=1}^N (aX_{i,h} + bY_{i,h}) \quad (9)$$

$X_{i,h}$ 와  $Y_{i,h}$ 의 성분은 물리적인 양이므로, 이들의 평균과 분산은 유한해야 한다. 따라서,  $n$ 이 충분히 크다면 중심극한정리에 의해  $aX_{t,h} + bY_{t,h}$ 가 정규분포를 따른다고 결론지을 수 있다. 두개의 확률분포를 하나의 확률분포 함수로 나타낼 수 있는 JPDF는 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{xy}(x_t, y_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_t}\sigma_{y_t}\sqrt{1-\rho_t^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_t^2)}(A)} \quad (10)$$

여기서,

$$A = \frac{(x_t - \mu_{x_t})^2}{\sigma_{x_t}^2} - \frac{2\rho_t(x_t - \mu_{x_t})(y_t - \mu_{y_t})}{\sigma_{x_t}\sigma_{y_t}} + \frac{(y_t - \mu_{y_t})^2}{\sigma_{y_t}^2}$$

각 변수  $\mu_{x_t}, \mu_{y_t}$ 는 실수부와 허수부 고조파의 평균의 합이고  $\sigma_{x_t}, \sigma_{y_t}$ 는 실수부와 허수부의 표준편차의 합을 그리고  $\rho_t$ 는 실수부와 허수부의 고조파의 상관계수의 합을 의미한다. 이 변수들은 다음 식 (11), (12)을 이용하여 계산한다.

$$\mu_{x_t} = \sum_{i=1}^n \mu_{x_{t,i}}, \mu_{y_t} = \sum_{i=1}^n \mu_{y_{t,i}}, \sigma_{x_t} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_{t,i}}^2}, \sigma_{y_t} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{y_{t,i}}^2} \quad (11)$$

$$\rho_t = \frac{C(X_t, Y_t)}{\sigma_{x_t}\sigma_{y_t}} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{x_{t,i}} \sigma_{y_{t,i}}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n \sigma_{x_{t,i}}^2)(\sum_{i=1}^n \sigma_{y_{t,i}}^2)}} \quad (12)$$

$$\text{여기서 } \rho_i = \frac{C_i}{\sigma_{x_{t,i}} \sigma_{y_{t,i}}} = \frac{E_i(X_t Y_t) - \mu_{x_{t,i}} \mu_{y_{t,i}}}{\sigma_{x_{t,i}} \sigma_{y_{t,i}}}$$

단,  $|C| \leq \sigma_x \sigma_y, |\rho| < 1$

위의 결과를 기초로 하여  $N$ 대의 차량이 운행될 경우로 확장할 수 있다. 하지만 이것은 차량 운행이 독립적으로 운행되는 경우를 전제로 하여 시행한다. 만일 두대의 차량이 독립적으로 운행된다면 이들의 JPDF는 식 (13)으로 표현된다. 여기서,  $f_1(s, w)$ 는 한대의 차량에 대한 JPDF( $f_{xy}(X_t, Y_t)$ )이다.

$$f(s, w) = f_1(s, w) * f_2(s, w) * \dots * f_n(s, w) \quad (13)$$

그림 4는 식 (10)을 이용하여 나타낸 그래프로써 2개의 확률 변수로 이루어진 고조파 전류의 확률밀도함수이다. 그림에서  $x$ 축과  $y$ 축은 실수부와 허수부의 고조파데이터를 의미하고  $z$ 축은  $f_{xy}(x_t, y_t)$ 를 의미한다.

JPDF는 두개의 실수와 허수의 고조파로 이루어진 함수로 정의된다. 이 함수를 전류의 크기에 대한 확률 밀도함수로 나타내기 위해서 전류의 크기  $Z$ 는 식 (14)와 같이 정의된다.

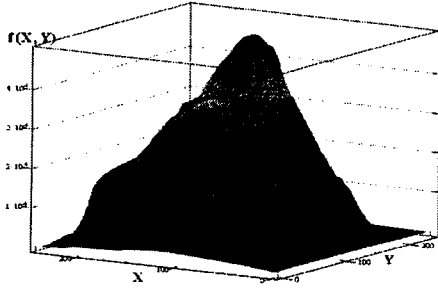


그림 4. 1대 차량이 운행될 때의 JPDF

$$Z = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} = q(x_i, y_i) \quad (14)$$

$X$ 와  $Y$ 는 JPDF  $f_{xy}(x_i, y_i)$ 의 확률변수이므로,  $X, Y$ 가  $Z$ 로 변환된 변수  $Z$ 역시  $f_z(z)$ 의 pdf에 의해 얻어진 확률변수가 된다. 고조파 전류의 실수부와 허수부는  $X = Z \cos \theta, Y = Z \sin \theta$ 로 표현되므로 고조파 전류의 크기  $Z$ 에 대한 JPDF는 식 (15)를 통하여 얻을 수 있다.

$$f_z(z) = \int_0^{2\pi} f_{XY}(z \cos \theta, z \sin \theta) z d\theta \quad (15)$$

그림 5는 식 (15)를 이용하여 전체 전류에 대한 확률 밀도함수를 나타내었다.

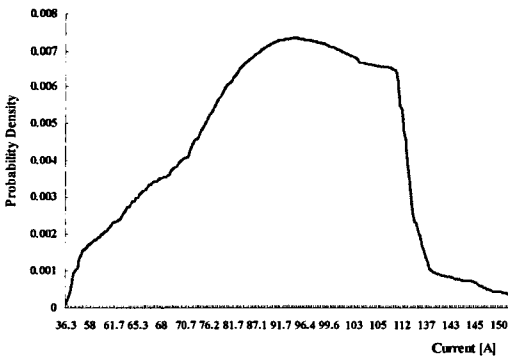


그림 5. 고조파 전류의 크기에 대한 JPDF

### 2.4 Total Demand Distortion(TDD)

TDD는 최대 부하전류의 고조파 전류 왜형률로써 본 논문에서는 확률론적 분석기법을 이용한 전력품질 평가 중 고조파 평가를 위해 IEEE 519-222 Std.를 이용하였다. 전력계통에 유입되는 전류의 왜형률은 다음 식 (16)을 이용하여 구할 수 있다.

$$TDD = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} I_h^2}}{I_L} \quad (16)$$

여기서  $h$  : 고조파 차수,  $I_h$  : 각 차수별 고조파 전류  
 $I_{sc}$  : 최대 단락전류,  $I_L$  : 최대 부하전류

그림 6은 차량이 한대 운전될 경우와 2대가 같이 운전될 경우의 TDD 계산결과를 나타낸 그래프이다. 분석 결과 단독으로 운전될 때 보다 두 대가 운전될 때 TDD의

값이 낮아지는 것을 확인할 수 있다.

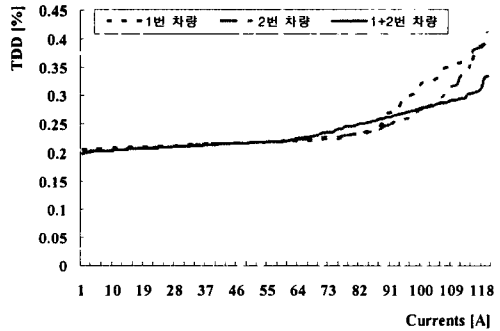


그림 6. 차량 운행수에 따른 TDD

### 3. 결 론

본 논문에서는 결정론적인 방법인 측정에 의한 분석이 아닌 확률론적인 방법을 이용하여 각각의 차량의 운행이력에 관한 데이터를 이용하여 각각의 차량에 대한 고조파의 JPDF를 계산하였고, 이를 바탕으로 N대의 차량으로 확장되었을 경우 변전소측에 미치는 고조파 전류 분석의 틀을 마련하였고, 이러한 결과를 통하여 다수의 차량이 운행 될 경우 왜란이나 전류 및 전압의 불평형, 왜곡 등 전력품질을 저하시키는 고조파를 분석할 수 있는 확률론적 기법을 제시하였다. 단일 특정 차량수의 운행에 대한 고조파 전류를 분석할 경우 기존의 방법에서는 직접 특정 차량수를 직접 운행 시켜야만 했지만 본 논문에서 제시한 확률론적 분석방법을 하면 각각의 차량에 고조파 이력데이터가 존재하는 경우 N대의 차량이 운행했을 경우의 고조파를 분석할 수 있다.

단일 운전시의 TDD와 다수 차량의 운전시에 TDD를 계산하여 비교해 본 결과 두 대가 운행될 때의 TDD가 높을 것이라는 예상과는 다르게 단일 차량으로 운행될 때보다 다수의 차량이 운전할 경우 전체 TDD는 단일 차량으로 운전될 경우와 큰 차이가 없고 오히려 낮아지는 경우도 발생함을 확인할 수 있었다. 그 이유는 고조파 전류는 크기와 위상을 갖는 벡터로 표현되므로, 따라서 벡터적인 합성으로 인하여 TDD가 감소한 이유를 설명할 수 있다.

### 감사의 글

이 논문의 연구는 산업자원부 지정 전력신뢰도/품질 연구센터에서의 재정적인 지원을 받아 진행되었습니다. 본 센터에는 정상대, 서울대, 숭실대, 전북대, 한양대의 교수님들과 대학원생들이 연구원으로 참여하고 있습니다

### [참 고 문 헌]

- [1] Y.E Zhongming, PONG M.H. and YUEN K. H., "Harmonic Evaluation of Traction System by Monte Carlo Simulation", Power Electronics Specialists Conference, Vol. 1, pp. 424-429, 1999
- [2] W. E. Kazibwe, T. H. Ortmeier, M. S. and A. A. Hammam, "Summation of Probabilistic Harmonic Vector", IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 4, No. 1, pp. 621-628, 1989.
- [3] A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1991
- [4] Seung-Hyuk Lee, Jin-O Kim and Hyun-Soo Jung, "Analysis of Catenary Voltage of AT-Fed AC HSR System", IEEE Transaction on Vehicular Technology, Vol. 53, No. 6, pp.1856-1862, 2004. 2.