

# 유효 매질 접근법과 분산 FDTD법을 이용한 LHM 해석

황세훈, 이정엽, 정현교  
서울대학교 전기 컴퓨터 공학부

## Using a Dispersive FDTD Method Effective Medium Analysis about Left Handed Material

Se-Hoon Hwang, Jung-Yub Lee and Hyun-Kyo Jung  
Seoul National University

**Abstract** - LHM (Left Handed Material)은 특정 주파수 범위에서 음의 유전율과 투자율을 가지는 물질이며 유효 유전율과 투자율은 분산 특성을 가지고 로렌츠(Lorentz) 물질과 비슷한 형태를 가진다. 본 논문에서는 FDTD (Finite Difference Time Domain) 법을 바탕으로 한 PLRC (Piecewise Linear Recursive Convolution) 법을 이용하여 LHM 내의 유효 전파특성을 모의한다. 모의실험 결과는 음의 유전율과 투자율을 가지는 주파수 범위를 보여준다.

### 1. 서 론

최근 Smith 등에 의해 LHM으로 불리는 새로운 물질이 발견되었고, Shelby 등에 의해 검증되었다. 이 물질은 특정 주파수 범위에서 음의 유전율과 투자율을 가지는 특성이 있어, 물질 내에서는 군속도와 위상속도의 방향이 반대가 된다. 이로 인해 스넬의 법칙이 거꾸로 일어나고 도플러 효과가 반대로 되는 등 일반 물질에서는 볼 수 없는 현상이 생겨난다. 이러한 현상들은 전기장과 자기장이 전파방향과 왼손법칙을 따라 정해진다는 점에서 Veselago는 'Left-Handness'라고 정의했다[1].

Pendry 등은 공진 주파수 근처에서 투자율이 음이 되는 SRR (Split-Ring Resonator) 배열을 제안하였다. 또한 금속 와이어의 배열이 플라즈마 주파수 아래에서 음의 유효 유전율을 가짐은 이미 알려져 있다. 따라서 SRR과 금속 와이어의 두 가지 구조를 결합함으로써 LHM을 만들 수 있다.

최근 논문들은 LHM에서 측정된 S 파라미터로부터 유효 유전율과 투자율을 얻는 방법에 대해서 논의하고 있다. 그러나 음의 유전율과 투자율을 가지는 유효 물질로부터 S 파라미터를 얻으려는 시도는 아직까지 없었다. 이러한 시도는 LHM의 분산 특성을 복잡한 배열 구조를 모델링 하지 않고도 모의 가능하므로 의미가 크다고 할 수 있다. 이 방법을 응용하면 LHM이 포함된 여러 구조에서 유효 물질 접근법을 통해 전파 특성을 쉽게 테스트 할 수 있다.

비선형, 분산 특성을 가지는 LHM에서의 전파 특성을 모의하기 위해서는 특수한 수치해석 기법이 필요하다. 일반 Yee FDTD 방법에서 분산 매질을 고려하기 위한 여러 가지 방법들이 제시되어 왔으며, PLRC (Piecewise Linear Recursive Convolution)법도 그 중의 하나이다 [2]. 본 논문에서는 로렌츠 매질의 이차 미분으로 고려될 수 있는 유효 투자율 식을 PLRC법을 이용하여 모의하였다. 유효 유전율 식은 간단한 형태이고 푸리에 역변환에 어려움이 있어 보조 변수를 이용하여 이산화 하였다.

### 2. 본 론

#### 2.1 PLRC법의 일반 정식화

PML내의 분산 매질의 맥스웰 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times H^{n+1/2} = (j\omega\epsilon_0\epsilon(w) + \sigma)\bar{s}E \quad (1)$$

여기서  $\bar{s}$  는

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이고  $s_x, s_y, s_z$  는

$$s_x = \kappa_x + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0}, s_y = \kappa_y + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0} \\ s_z = \kappa_z + \frac{\sigma_z}{j\omega\epsilon_0} \quad (3)$$

로 주어진다. 각 파라미터들,  $\kappa_i$  와  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$  는 다항 식으로 근사 된다.

$\epsilon(\omega)$ 는 분산매질의 특성을 나타내고  $s$ 는 PML내에서의 비등방성 매질 내의 손실을 표현하는 텐서다. 두 성질을 각각 고려해 주기 위해서 단계별로 이산화 하는 과정이 필요하며 이를 위해 흡수 물질을 표현하는 텐서의 관계를 고려하기 위해 보조변수가 도입되어

$$\Psi = \bar{s}E \quad (4)$$

의 관계를 가지고, 분산매질을 고려하기 위한 관계식으로

$$D(t) = \epsilon_0\epsilon_\infty\Psi + \epsilon_0\int_0^t \Psi(n\Delta t - \tau)\xi(\tau) d\tau \quad (5)$$

이 도입된다. 여기서  $D^n = D(n\Delta t)$ ,  $E^n = E(n\Delta t)$ 라 할 때 (5)는 이산화 된 식으로 다음과 같이 표현된다.

$$D^n = \epsilon_0\epsilon_\infty\Psi^n + \epsilon_0\int_0^{n\Delta t} \Psi(n\Delta t - \tau)\xi(\tau) d\tau \quad (6)$$

여기서  $\epsilon_0$ 는 진공상태의 유전상수이고  $\epsilon_\infty$ 는 주파수가 무한대 일 때, 물질의 유전상수이다.

기존의 RC 정식화 예에서는 각 시간 간격에서 전기장을 상수로 가정하는데, 만약 전기장을 각 시간 간격에서 부분 선형 함수로 근사화 할 경우 정확도가 매우 높아지게 된다. 연속 시간 함수인  $E(t)$ 를 매 시간 간격  $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ 에서 부분 선형 근사하면 이산 시간 값인  $E^i$ 와  $E^{i+1}$ 의 항으로 표현된다.

$$E(t) = E^i + \frac{(E^{i+1} - E^i)}{\Delta t}(t - i\Delta t) \quad (7)$$

여기서 (7)을 (6)에 대입하여 정리하면,

$$D^n = \epsilon_0\epsilon_\infty E^n + \epsilon_0 \sum_{m=0}^{n-1} [E^{n-m}\chi^m + (E^{n-m-1} - E^{n-m})\xi^m] \quad (8)$$

이 되고, 여기서

$$\chi^m = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi(\tau) d\tau \\ \xi^m = \frac{1}{\Delta t} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} (\tau - m\Delta t)\xi(\tau) d\tau \quad (9)$$

으로 정의된다.

따라서, PLRC법에 의해 전기장의 FDTD 업데이트 식은

다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi^{n+1} &= \frac{\epsilon_x - \xi^0}{\epsilon_x + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} + \chi_0 - \xi_0} \psi^n \\ &+ \frac{\Delta t}{\epsilon_0 (\epsilon_x + \frac{\sigma \nabla H t}{\epsilon_0} + \chi^0 - \xi^0)} \nabla \times H^{n+1/2} \\ &+ \frac{1}{\epsilon_x + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} + \chi^0 - \xi^0} \\ &\times \sum_{m=0}^{n-1} [E^{n-m} \Delta \chi^m + (E^{n-m-1} - E^{n-m}) \Delta \xi^m] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta \chi^m &= \chi^m - \chi^{m+1} \\ \Delta \xi^m &= \xi^m - \xi^{m+1} \end{aligned} \quad (11)$$

로 정의된다. (10)에서 마지막 항의 합을 계산하는 부분은 재귀적인 방법을 통해 구해진다. 합을 변수  $\psi^n$  으로 정의하면

$$\psi^n = \sum_{m=0}^{n-1} [E^{n-m} \Delta \chi^m + (E^{n-m-1} - E^{n-m}) \Delta \xi^m] \quad (12)$$

이 되고

$$\psi^n = (\Delta \chi^0 - \Delta \xi^0) E^n + \Delta \xi^0 E^{n-1} + C_{rec} \psi^{n-1} \quad (13)$$

의 재귀적인 관계를 가지고 매 시간 단계에서 업데이트 된다. 여기서 상수  $\chi, \xi, C_{rec}$  은 적용할 물질의 감수율에 의해서 결정된다. 각 상수를 구하는 과정은 다음 단락에서 설명될 것이다.

흡수 물질에 관한 텐서 식은

$$\psi_x = \frac{\sigma_y \epsilon_x}{s_x} E_x \quad (14)$$

을 두 단계로 나누어서 풀게 되며 새로운 보조변수  $P$  가 도입되어 첫 번째 단계에는

$$P_x = \frac{1}{s_y} \psi_x \quad (15)$$

을 풀고 두 번째 단계에서 나머지를 계산하게 된다. 첫 번째 단계를 정식화 하면

$$\Psi = (\kappa_y + \frac{\sigma_y}{j\omega \epsilon_0}) \cdot P_x \quad (16)$$

에 대해서 두 변수  $j\omega$  를 곱하고 시간 영역으로 변환하면,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_y P_x) + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} P_x \quad (17)$$

이 되고, 이를 이산화 하여  $P_x$  에 대해서 정리하면 다음의 업데이트 식이 나온다.

$$P_x^{n+1} = (\frac{2\epsilon_0 \kappa_y - \sigma_y \delta t}{2\epsilon_0 \kappa_y + \sigma_y \delta t}) P_x^n + \frac{2\epsilon_0}{2\epsilon_0 \kappa_y + \sigma_y \delta t} (\Psi_x^{n+1} - \Psi_x^n) \quad (18)$$

그리고 남은 최종식인

$$P_x = \frac{s_x}{s_z} E_x \quad (19)$$

은 기존의 APML 식과 동일한 과정으로 정식화 되어

$$(\kappa_x + \frac{\sigma_x}{j\omega \epsilon_0}) P_x = (\kappa_x + \frac{\sigma_x}{j\omega \epsilon_0}) E_x \quad (20)$$

에 대해 양변에  $j\omega$  를 곱하고 시간 영역으로 변환하면

$$\frac{\partial}{\partial t} (\kappa_x P_x) + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} P_x = \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_x E_x) + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} E_x \quad (21)$$

이 되고 이를 이산화 하여  $E_x$  에 대해 정리하면

$$\begin{aligned} E_x^{n+1} &= (\frac{2\epsilon_0 \kappa_x - \sigma_x \delta t}{2\epsilon_0 \kappa_x + \sigma_x \delta t}) E_x^n + \frac{1}{2\epsilon_0 \kappa_x + \sigma_x \delta t} \\ &\times [(2\epsilon_0 \kappa_x + \sigma_x \delta t) P_x^{n+1} - (2\epsilon_0 \kappa_x - \sigma_x \delta t) P_x^n] \end{aligned} \quad (22)$$

를 통해  $E_x$  를 구할 수 있게 된다. 나머지  $E_y, E_z$  도 같은 과정을 통해 계산될 수 있다.

따라서 FDTD에서 전기장에 관한 업데이트 식은 (10), (12), (18), (22)의 네 단계를 거쳐서 이루어지게 되며,

앞의 두 단계는 분산물질에 관한 식이며, 나머지 두 단계는 흡수 물질을 처리하기 위한 식들이 된다.

## 2.2 유효 매질의 정식화

### 2.2.1 SRR에 대한 유효 매질

PLRC 방법을 사용하기 위해서는  $\Delta \chi^n, \Delta \xi^n, C_{rec}$  등이 모두 정의 되어야 한다.

$$\chi_{mu}(u) = -\frac{F u^2}{u^2 - u_0^2 + i\delta u} = (ju)^2 \frac{-F}{u_0^2 + ju\delta - u^2} \quad (23)$$

이고 여기서  $F, u_0, \delta$  는 SRR의 구조에 따라 결정되는 값들이다.  $\chi_{mu}(u)$  의 역 푸리에 변환에 의해 얻어지는 시간 영역 감수율을 합수는

$$\chi_{mu}(t) = \frac{d^2}{dt^2} [-j\gamma m e^{(-\alpha + j\beta)t}] = -j\gamma m u (-\alpha + j\beta)^2 e^{(-\alpha + j\beta)t} \quad (24)$$

이고 여기서

$$\alpha = \delta, \beta = \sqrt{u_0^2 - \frac{\delta^2}{4}}, \gamma_{mu} = -\frac{F}{j} \quad (25)$$

이 된다. 이 식은 바로 로렌츠 매질의 식을 시간에 따라 두 번 미분한 것과 같다. 감수율의 분자의 2계 미분항은 일반적인 미분 이산화식을 사용할 경우 매우 복잡해질 수 있지만 PLRC법은 미분항을 감수율에 상수를 곱하는 것으로 해결하므로 응용에 적합하다고 할 수 있다.

### 2.2.2 wire에 대한 유효 매질

유효 유전율 함수에 대한 감수율은

$$\chi_{wp}(u) = -\frac{u_p^2}{u^2 + j\gamma u} \quad (26)$$

으로 주어지고 여기서  $u_p$  는 공진주파수,  $\gamma$  는 와이어 구조의 손실을 의미한다. (26)은 투자율에 대한 함수와 비교할 때 간단한 형태라고 할 수 있으므로 좀 더 쉽고 일반적인 미분 이산화 과정을 사용하기가 용이하고, 분모의 폴이 허수축에 존재하므로 PLRC법을 적용하기도 까다로운 점이 있다. 따라서 감수율을 고려하기 위해서는 ADE(Auxiliary Differential Equation)법이 사용되었다. 이는 일반적인 이산화 과정을 따르며 (26)이 간단한 형태이므로 정식화 과정 또한 간단하게 정리될 수 있다. 전기 분극  $P_L$  은

$$P_L(u) = \chi_{wp}(u) E(u) = \frac{u_p^2}{-j\gamma u - u^2} \quad (27)$$

으로 주어진다. (27)의 분모항을 양변에 곱하면

$$(ju)^2 P_L(u) - (ju) P_L(u) \gamma = u_p^2 E(u) \quad (28)$$

이 되고 (28)을 푸리에 역변환 하면

$$\frac{\partial^2 P_L(t)}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial P_L(t)}{\partial t} = u_p^2 E(t) \quad (29)$$

이 되며 이는 중앙 차분법을 통하여 이산화하면

$$\frac{1}{\Delta t^2} (P_L^{n+1} - 2P_L^n + P_L^{n-1}) - \gamma \frac{1}{2\Delta t} (P_L^{n+1} - P_L^{n-1}) = u_p^2 E^n \quad (30)$$

이 된다. 최종적으로 (30)을 정리하면

$$P_L^{n+1} = \frac{4}{2 - \gamma \Delta t} P_L^n - \frac{2 + \gamma \Delta t}{2 - \gamma \Delta t} P_L^{n-1} + \frac{2\Delta t^2 u_p^2}{2 - \gamma \Delta t} E^n \quad (31)$$

이 된다. 이 분극 항은 전기 밀도 함수에 다음의 업데이트 과정을 통해 더해진다.

$$D^{n+1} = \epsilon E^{n+1} + P_L^{n+1} \quad (32)$$

### 2.3 모의실험 및 결과

(23), (26)으로 특성 지어진 분산매질에서의 전파 특성이 위의 방법들을 통해 모의실험 되었다. 입력 TEM 파를 발생시키기 위해 두 완전 도체로 이루어진 평판을 대상으로 하였고 평판 도파관은 분산 매질로 채우고 실험한다. (23)의 투자율 함수와 (26)의 유전율 함수를 그림 2에서 주파수에 따라 그렸다. 전파 상수는 투자율과 유전율의 곱에 따라 결정된다. 둘 중의 하나만 음일 경우에 전파상수는 허수 값을 갖게 되고 이는 감쇄 항으

로 표현된다. 그러나 두 항이 모두 양이거나 음일 경우에는 전파상수가 실수 값을 갖게 되고 전파는 잘 이루어지지 않는다. 우리는 투자율과 유전율이 모두 음일 경우에 특히 LHM 또는 DNG (Double Negative) 물질로 부른다.

그림 3은 감수율이 (26)으로 주어진 유효 유전율 매질에서의 손실에 따른 전파특성을 보여준다. 그림에서 cut-off 주파수는 16GHz이다. Cut-off 주파수 이상에서는 전파가 이루어지는 반면 이하에서는 감쇄가 일어난다. 이 감쇄는 음의 유전율로 인해 전파 상수가 허수로 되었기 때문에 발생하는 것이다. 높은 손실 항을 추가 하였을 경우에는 cut-off 주파수 이하에서 감쇄가 약해지면서 특성이 약해진다. 따라서 좋은 음의 유전율 특성을 가지기 위해서는 저 손실 구조가 좋다고 할 수 있다.

감수율이 (23)으로 주어진 유효 투자율 함수의 경우에는 전파가 공진 주파수인 8.5GHz 근처에서 금지된다. 이 주파수 영역을 제외한 부분에서는 그림 4에서 볼 수 있듯이  $S_{21}$ 이 거의 1에 가깝다. 이 좁은 주파수 영역에서는 유효 투자율이 음이 되며 전파 상수가 허수 값을 갖게 된다. 음의 투자율 특성은 SRR의 공진 특성으로 인해 발생되며 이로 인해 금지 영역은 매우 좁아지는 특성을 보인다.

유효 와이어 매질과 유효 SRR 매질을 결합한 합성 매질은 그림 5에서 볼 수 있듯이 cut-off 이하에서 좁은 통과 영역을 보인다. 이 좁은 통과 영역은 SRR 매질의 금지 영역과 일치한다. 통과 영역은 유전율과 투자율이 영역 내에서 모두 음이기 때문에 전파 상수가 실수 값을 가지게 되어 발생하는 것이다. 이상적인 경우에 배열 구조에서 손실이 없다면 통과 영역의  $S_{21}$ 은 1의 값을 갖게 된다. 그러나 SRR은 가는 금속막으로 만들어지며 따라서 손실을 포함하고 있다. 이러한 손실은 (23)에서  $\delta$ 로 표현된다. 손실이 전파에 미치는 효과는  $\delta$ 를 변화시키면서 실험한 그림 5에서 확인할 수 있다. 손실이 커짐에 따라 전파 특성은 크게 떨어지게 된다. 따라서 모의실험 시에는 적절한 값의 손실 항을 고려해 주는 것이 필요하다.

### 3. 결 론

와이어와 SRR 배열의 유효 유전율과 투자율 함수는 PLRC법과 FDTD법을 이용하여 모의 실험되었다. 음의 유전율과 음의 투자율은 두 경우에 각각 잘 모의실험 되었으며 두 매질을 합친 매질은 금지 영역 내에서 좁은 통과 영역은 가지는 특성을 보이며 이 통과 영역은 유전율과 투자율이 모두 음인 LHM 특성을 보여준다.

### [참 고 문 헌]

- [1] Veselago, V. G., "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ," Soviet Physics, Vol. 10, No. 4, January 1968.
- [2] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-14, pp. 302-307, May 1966.
- [3] S. W. Lee, "A study on the characteristics of a double negative material," M.S. Thesis, Seoul National University, Oct. 1994.

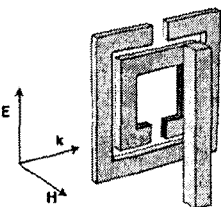


그림 1. SRR과 wire의 단위 구조, 입력파의 전기장과 자기장의 방향이 나타나 있다.

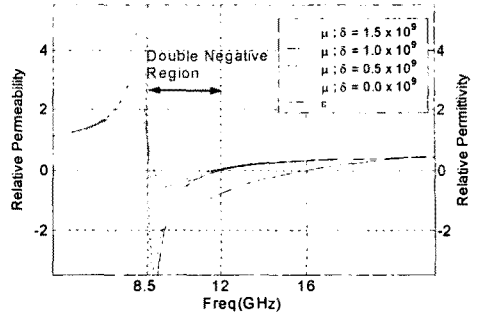


그림 2. 유효 SRR 매질의 투자율과 유효 wire 매질의 유전율, 투자율은 손실에 따른 특성이 나타나 있다.

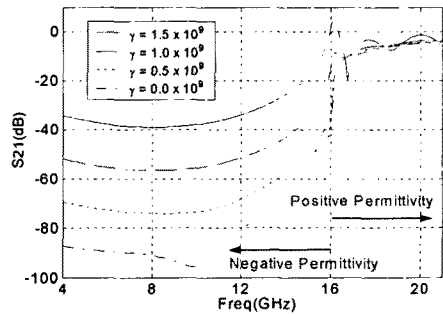


그림 3. 유효 wire 매질에 대한 손실에 따른  $S_{21}$  특성

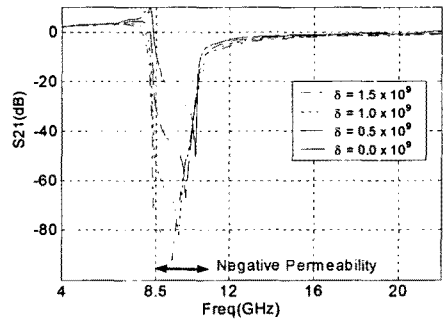


그림 4. 유효 SRR 매질의 손실에 따른  $S_{21}$  특성

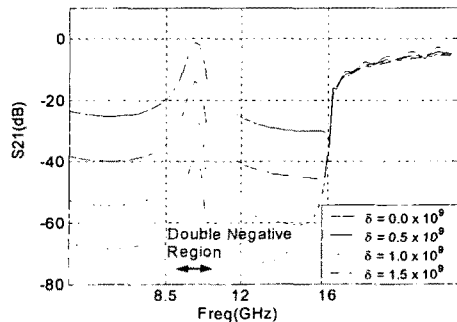


그림 5. 유효 SRR 매질과 유효 wire 매질을 합친 합성 매질의 전파 특성 LHM 특성을 나타내는 주파수 영역이 발생한다.