2005년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2005. 7. 18 - 20

정적출력궤환 H_2 및 H_∞ 제어기 설계

김석주*, 이종무, 천종민, 권순만, 박민국
한국전기연구원

Design of H_2 and H_∞ static output feedback controllers

Seog-Joo Kim, Jong-Moo Lee, Jong-Min Cheon, Soonman Kwon, Min-Kook Park
Korea Electrotechnology Research Institute (KERI)

Abstract - This paper presents an iterative linear matrix inequality (LMI) method for H_2 and H_∞ optimal static output feedback (SOF) control, which is expressed in terms of LMIs subject to an additional rank condition. We propose a linear penalty function to penalize the rank constraint so that static H_2 and H_∞ synthesis results in solving a series of convex LMI optimization problems. Numerical experiments for various H_2 and H_∞ SOF synthesis were performed to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

1. 서 론

정적출력궤환(Static Output Feedback: SOF) 제어기는 간단하고 구현이 쉽지만 제어공학에서는 풀기 어려운 문제에 속한다[1]. SOF 문제를 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality: LMI)을 이용하여 표현하면 잘 알려진 바와 같이 2개의 Lyapunov 행렬이 서로 역행렬 관계가 있는 결합된 LMI로 표현된다[2]. 결합된 LMI는 계수조건(rank condition)으로 바꿀 수 있으며 이러한 비선형 대수조건이나 계수조건 때문에 SOF 제어기 설계 문제는 비볼록(nonconvex) 문제가 되고 풀기 어렵게 된다.

지난 10년간 결합된 LMI 문제를 풀기위한 많은 노력이 있었으며 여러 전역적 또는 지역적 방법이 제안되었다[3-7]. 특히 지역적 방법은 전역적 수렴을 보장할 수 없지만 효율적으로 해를 구할 수 있다는 점에서 많은 연구가 있었으며 그 중 CCL (Cone Complementarity Linearization)법이 간단하면서도 가장 성능이 좋은 것으로 보고되었다.

하지만 CCL 법은 최적해를 직접 구할 수 없고 해의 근처에서 지그재그 현상이 일어나면서 해를 찾는데 실패하는 경우가 있는 단점이 있다. 이에 대한 대안으로 Lagrangian 법을 이용하는 방법[8,9]이 제안되었지만 이 방법은 구배함수와 Hessian을 구해야 하기 때문에 구현이 쉽지 않다.

본 논문에서는 최적해를 직접 구할 수 있으면서도 구현이 쉬운 알고리즘을 제안하고자 한다. 계수조건을 페널티 함수로 표현하여 반복적으로 페널티화된 LMI 최적화 문제의 해를 구함으로써 SOF H_2 와 H_∞ 문제의 해를 구하고자 하며 선행연구와 결과를 비교하고자 한다.

2. 정적출력 H_2 및 H_∞ 제어기 설계

2.1 계수조건부 LMI로 표현되는 SOF 제어기

먼저 다음과 같이 일반화된 선형 시불변 시스템을 생각해 보기로 한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{1}$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$은 시스템의 상태 벡터이고, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ 는 각각 외부입력, 제어기 입력, 제어하고자하는 출력 그리고 측정된 출력이다.

이때 H_∞ SOF 제어 문제는 시스템 (1)을 안정화시키면서 폐루프 시스템의 H_∞ 놈을 최소화시키는 제어기 $u = Ky$를 설계하는 문제를 말한다. 이 문제는 잘 알려진 바와 같이 소거정리를 사용하면 다음을 만족하는 행렬 X, Y에 관한 최적화 문제로 다음과 같이 표현된다.

$$\min\ \gamma \ \text{ subject to}$$

$$\begin{bmatrix} C_2' \\ B_{21}' \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} A'X+XA & XB_1 & C_1' \\ B_1'X & -\gamma I & D_{11}' \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2' \\ D_{21}' \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp'} < 0 \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} AY+YA' & YC_1' & B_1 \\ C_1Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1' & D_{11}' & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp'} < 0 \tag{3}$$

$$X > 0,\ Y > 0,\ XY = I \tag{4}$$

여기서 (4)의 대수 제약조건은 다음과 같이 등가적으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0,\ \mathbf{rank}(\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}) = n \tag{5}$$

(2), (3), (5)를 만족하면서 γ를 최소화시키는 문제를 계수 제약조건이 있는 LMI 최적화 문제라고 부른다. 이때 (2), (3), (5)를 만족하는 행렬 X, Y가 구해지면 정적 이득 K는 수치적인 방법이나 혹은 해석적인 방법으로 쉽게 구할 수 있다.

같은 방법으로 H_2 최적제어기 문제를 생각해 보면 다음을 만족하는 행렬 X, Y에 관한 최적화 문제로 표현된다.

$$\min\ \gamma \ \text{ subject to}$$

$$tr(B_1'XB_1) < \gamma \tag{6}$$

$$C_2'^{\perp}(XA + A'X + C_1'C_1)C_2'^{\perp'} < 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} AY+YA' & YC_1' \\ C_1Y & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp'} < 0 \tag{8}$$

$$X > 0,\ Y > 0,\ XY = I \tag{9}$$

이제 다음 절에서 이와 같은 문제를 푸는 방법에 대해서 설명한다.

2.2 계수조건부 LMI 문제의 해법

먼저 계수 조건이 있는 일반적인 LMI 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &\min && c'x \\ &\text{subject to} && X(x) \geq 0,\ L(x) > 0 \\ & && \mathbf{rank}(X(x)) = r \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 x는 구하고자 하는 변수(decision vector)이고

$X(x)$, $L(x)$는 x에 관한 아핀(affine) 함수이다. 또한 r은 X의 전계수(full rank)보다 작다고 가정한다.

페널티 함수법은 $n\times n$ 양반한정 행렬의 $n-r$개의 고유치의 합을 페널티 함수로 정의하여 페널티 함수가 영이 되면 그 행렬의 계수는 r 이하가 된다는 것이 핵심이다. 이것은 다음의 보조정리로 알 수 있다.

[보조정리 1] 어떤 행렬 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $X\geq 0$에 대해서 다음은 등가이다.

(i) X의 계수가 r 이하이다.

(ii) 다음을 만족하는 행렬 $V\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$, $V'V=I_{n-r}$가 존재한다.

$$\mathbf{tr}(V'XV)=0 \tag{11}$$

이제 문제 (10)에서 페널티 함수를 고려한 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\varphi(x;\rho,\mu,V)=\rho c'x+\mathbf{tr}(X)+\mu p(x;V) \tag{12}$$

여기서 μ는 페널티 변수이고 페널티 함수 $p(x;V)$는

$$p(x;V)=\mathbf{tr}(V'XV) \tag{13}$$

이며 ρ는 최적화를 위한 하중값이다. 또한 $\mathbf{tr}(X)$는 다른 고유치에 대한 상대적인 하중을 주기 위해서 추가되었다. 만약 X의 고유치가 $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$ 이라고 하면 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varphi(x;\rho,\mu,V)=\rho c'x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\mu\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i \tag{14}$$

목적함수 (12)의 의미는 (14)로 보면 분명해진다. 즉, X의 작은 순서로 $n-r$개의 고유치를 최소화시키는 함수를 페널티 함수로 선택한 것이다.

(12)에서 페널티 변수를 변화시키면서 $p(x;V)=0$이 되는 x를 구하면 주어진 계수조건을 만족하는 해가 얻어지고 계속해서 하중값 ρ를 변화시키면 지역적으로 최적인 해를 얻을 수 있다. 따라서 계수조건이 있는 문제 (10)은 다음과 같이 계수조건이 없고 페널티 함수가 포함된 목적함수의 최적화 문제로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned}&\min && \varphi(x;\rho,\mu,V)\\ &\text{subject to} && x\in\Omega\end{aligned} \tag{15}$$

여기서

$$\Omega=\{x: X(x)\geq 0,\ L(x)>0\}$$

이다.

이제 최적화 문제 (15)를 다음과 같이 순차적으로 풀면 원하는 해를 얻게 된다.

$$x_k=\operatorname{argmin}\{\varphi(x;\rho_{k-1},\mu_{k-1},V_{k-1}): x\in\Omega\} \tag{16}$$

여기서 V_k 는 x_k로부터 고유치 분해를 이용하면 계산할 수 있다. 이때 최적화 문제의 수렴 특성은 문헌 [10]을 참조하기 바라며 주요한 특징은 다음과 같다.

- 고정된 ρ와 μ에 대해서 (16)의 목적함수 $\varphi(x_k;\rho,\mu,V_{k-1})$는 반드시 수렴하며 따라서 $\{x_k\}$도 수렴하게 된다.
- (16)에서 μ 를 증가시키면 X의 $n-r$개의 고유치 합은 작아지고 r개의 고유치 합과 $\rho c'x$은 커지게 된다. 이는 (14)에서 쉽게 확인된다.

페널티 함수를 이용하여 비볼록 LMI 최적화 문제의 해를 구하는 알고리즘을 서술하면 다음과 같다.

[알고리즘 1] 페널티 함수를 이용한 비볼록 LMI 문제의 해법 (Penalty Function Method : PFM)

(단계 1) 초기화. 페널티 변수 $\mu=0$, $\rho_0\gg 1$, $\rho_0\gg 1$으로 놓고 다음의 LMI 최적화 문제의 해를 구한 후

$$x_0=\operatorname{argmin}\ \{\rho c'x+\mathbf{tr}(X): x\in\Omega\}$$

$x_k=x_0$, $\mu_k=\mu_0$, $\rho_k=\rho_0$, $\alpha\in(0.1)$, $\tau<1$, $\xi>1$. $\epsilon_1\ll 1$, $\epsilon_2\ll 1$, $\beta\ll 1$ 로 놓는다.

(단계 2) 행렬 V 계산. $X(x_k)$로부터 고유치 분해를 이용하여 V_k행렬을 구한다.

(단계 3) 볼록 최적화 수행. 다음 LMI 최적화 문제를 풀어 x_{k+1}을 구한다.

$$x_{k+1}=\operatorname{argmin}\ \{\rho_k c'x+\mathbf{tr}(X)+\mu_k p(x;V_k): x\in\Omega\}$$

(단계 4) 가능해 여부 시험 (feasibility test). 만약 $p(x_{k+1};V_k)<\epsilon_1$ 이면 주어진 계수조건을 만족하는 가능해를 얻은 것으로 한다. 그렇지 않으면 단계 6으로 간다.

(단계 5) 최적해 여부 시험(optimality test). 만약 x_{k+1}이 가능해이고 $|c'x_{k+1}-c'x_k|<\epsilon_2$ 이면 지역적인 최적해를 얻은 것으로 보고 프로그램을 종료한다. 그렇지 않으면 단계 7로 간다.

(단계 6) 페널티 변수 갱신. 만약 x_{k+1} 이 가능해가 아니고 $p(x_{k+1};V_k)>\alpha p(x_k;V_{k-1})$ 이면 페널티 변수를 $\mu_{k+1}=\tau\mu_k$ 로 증가시킨다. 단계 8로 간다.

(단계 7) 최적화 하중변수 갱신. 만약 x_{k+1}이 가능해이고 $|c'x_{k+1}-c'x_k|<\beta$ 이면 최적화 하중변수 ρ를 $\rho_{k+1}=\xi\rho_k$ 로 증가시킨다.

(단계 8) 다음 스텝 수행. $k=k+1$ 로 놓고 단계 2 로 간다.

PFM 알고리즘은 고유치 분해 부분을 제외하면 CCL 법과 거의 비슷하다. 하지만 조정 변수인 페널티 변수에 의해서 CCL 법보다 좋은 성능을 가지게 된다.

3. 시뮬레이션

본 논문에서 제안하는 알고리즘을 시험하기 위해서 문헌 [8]과 같은 시스템에 대한 시뮬레이션을 하고 문헌과 CCL법과 결과를 비교하였다. 시험 시스템에 관해서는 참고문헌을 참조하기 바란다.

다음 표 1과 2는 H_∞와 H_2 제어기 설계에 관한 결과를 나타내고 있다. 표 1과 2에서 알 수 있는 바와 같이 PFM은 양호한 수치적 성능을 나타내고 있다. 표에서 CCL 법의 결과는 이분법(bisection method)을 이용해서 얻어진 결과이다. 즉, 처음에 매우 큰 γ에 대해서 이를 만족하는 해가 있는 지를 조사하고 γ를 계속 줄여가면서 LMI 해를 찾는 방법을 사용하였다. 이때 반복횟수는 500번으로 제한하였다. 반면에 PFM 법은 350번으로 제한하였다.

<u>여객기 시스템</u>

이 예제에서 얻어진 제어기는 다음과 같고

$$K_\infty=[0.6914\ -0.6400\ -0.8295\ 0.0991\ 1.5767]$$

그림 1은 비교를 위해서 CCL법과 $\|XY-I\|_F$를 비교한 것이다. 이때 PFM의 계산특성은 그림 2에 나타냈다. 그림에서 PFM으로 최적해를 효율적으로 구할 수 있다는 것을 알 수 있다.

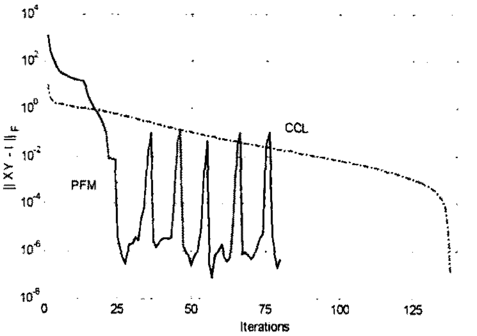

그림 1. PFM과 CCL 법의 비교

<u>VTOL 헬리콥터</u>

PFM으로 구한 H_∞ 및 H_2제어기는 다음과 같다.

$$K_\infty=\begin{bmatrix}21.6803\\367.5390\end{bmatrix},\ K_2=\begin{bmatrix}0.1270\\5.8961\end{bmatrix}$$

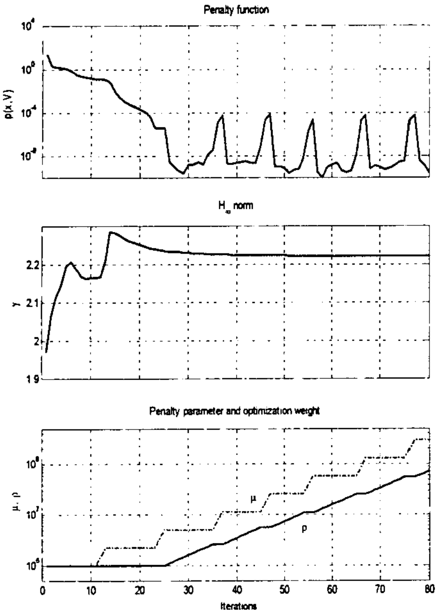

그림 2. 여객기의 H_∞ 제어기 설계에 대한 PFM의 계산 특성

화학로

여기서는 H_∞ 및 H_2제어기를 설계하였으며 결과는 다음과 같다.

$$K_\infty = \begin{bmatrix} -71.2842 & -266.8186 \\ -218.7625 & -841.2660 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.3572 & -2.6237 \\ 2.5816 & 0.7767 \end{bmatrix}$$

압전 구동기

PFM으로 구한 H_∞ 및 H_2제어기는 다음과 같다.

$$K_\infty = [-5.1683 \ -292.3914 \ -10825.0]$$
$$K_2 = [-418.9740 \ -4378.9 \ -249810.0]$$

동적시스템 (1차)

이 예는 시스템 첨가기법을 이용하였으며 PFM으로 구한 H_∞ 제어기는 다음과 같다.

$$K_\infty = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49.1973 & -41.3360 \\ 50.2010 & 43.1044 \end{bmatrix}$$

동적시스템 (2차)

이 시스템은 앞의 시스템에 2차 제어기를 설계하였으며 설계된 제어기는 다음과 같다.

$$K_\infty = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.2253 & 17.2338 & -20.9827 \\ 11.2012 & -19.1540 & 21.9359 \\ 11.3553 & -17.0713 & 21.5279 \end{bmatrix}$$

4. 결 론

본 논문에서는 반복적 페널티 법을 이용하여 정적출력 궤환 H_2와 H_∞ 제어기를 설계하는 방법에 대해서 연구하였다. 제안하고 있는 방법과 기존의 연구와 비교한 결과 충분히 효용성이 입증되었다.

표 1. 시험 시스템에 대한 H_∞ 제어기 계산 결과

Problem	$\|T_{zw}\|_\infty$		
	QSDP	CCL	PFM
Transport Airline	2.22	2.223	2.223
VTOL helicopter	0.157	0.1572	0.1540
Chemical reactor	1.202	1.1691	1.1690
Piezoelectric actuator	3.055×10^{-3}	3.34×10^{-4}	5.05×10^{-4}
Dynamic 1st-order	60.98	60.97	60.97
Dynamic 2nd-order	21.60	21.60	21.53

표 2. 시험 시스템에 대한 H_2 제어기 계산 결과

Problem	$\|T_{zw}\|_2$		
	QSDP	CCL	PFM
VTOL helicopter	9.541×10^{-2}	9.541×10^{-2}	9.541×10^{-2}
Chemical reactor	1.937	1.937	1.937
Piezoelectric actuator	3.646×10^{-2}	5.61×10^{-2}	8.96×10^{-3}

[참 고 문 헌]

[1] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis, "Static output feedback - a survey", Automatica, 33(2):125-137, 1997.

[2] R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis, "A Unified Approach to Linear Control Design", Taylor and Francis, 1997.

[3] K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos, "A global optimization approach for the BMI problem", In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 2009-2114, 1994.

[4] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, "LMI numerical solution for output feedback stabilization", In Proc. of the American Control Conference, pp. 40-44, 1994.

[5] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "The XY-centering algorithm for the dual LMI problem : a new approach to fixed order control design", International Journal of Control, Vol. 62, No. 6, pp. 1257-1272, 1995.

[6] K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Low order control design for LMI problems using alternating projection methods", Automatica, Vol. 32, No. 8, pp. 1117-1125, 1996.

[7] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 42, No. 8, 1171-1176, 1997.

[8] P. Apkarian, D. Noll and H. D. Tuan, "Fixed-order H_∞ control design via a partially augmented Lagrangian method", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 13, pp. 1137-1148, 2003.

[9] D. Noll, M. Torki and P. Apkarian, "Partially augmented Lagrangian method for matrix inequalities constraints", Preprint, Available from http://www-ext.cert.fr/dcsd/cdin/apkarian.

[10] 김석주,이종무,권순만,문영현, "고정 구조를 가지는 H_∞ 전력계통 안정화 장치 설계", 전기학회논문지, 53권 12호, pp. 655-660, 2004.