

경사 하강법에 근거한 이득여유와 위상여유를 보상하는 PID 제어기 설계

박재훈, 조준호, 최정내, 이원혁, 황형수
원광대학교. 전기전자 및 정보공학부

Design of PID Controller to Compensate for Gain and Phase Margin
Base on Gradient Descent Method

Jaehoon Park, Joonho Cho, Jungnae Choi, Wonhyuk Lee, Hyungsoo Hwang
Division of Electrical Electronic and Information Engineering, Wonkwang University

Abstract - 제어기 설계에서 이득여유와 위상여유는 건실성 및 안정도 판별의 중요한 척도로 사용되며, 그 중 위상여유는 시스템의 성능지수와 관련된다. 이와 같은 이유로 이득여유와 위상여유의 안정도를 고려한 제어기의 설계방법이 연구되어지고 있다.

근래 Weng Khuen Ho와 Chang Chieh Hang이 제안한 설계방법은 복잡한 계산을 필요로 하는 arctan 함수를 1차 선형함수로 근사화 하여 복잡도를 감소시키면서도 원하는 이득여유와 위상여유를 만족시키는 제어기의 파라미터를 찾았다.

하지만 이 방법은 실제의 arctan 함수를 사용하는 것이 아니라 근사화된 수식을 사용함으로써 오차가 수반되어 원하는 설계조건을 만족 하지 못한다.

따라서 본 논문은 이러한 오차를 최소화하기 위해서 최적화 알고리즘을 이용한 이득여유와 위상여유를 보상하는 PID 제어기를 설계하였다.

1. 서 론

제어기 설계에서 위상여유와 이득여유는 건실성 및 안정도 판별에 중요한 척도로 사용되며, 위상여유는 시스템의 성능지수와 관련된다. 위상여유와 이득여유의 안정도를 고려한 다양한 제어기 설계 방법이 연구되고 있으며, 위상여유와 이득여유를 구하는 방법으로는 계산적인 방법, 검사에 의한 방법, Nyquist 선도와 보드 선도를 이용한 방법 등 많은 연구가 이루어지고 있다.[4]

그러나 이러한 방법은 적용제어나 자동동조에서 사용되기 어려운 단점이 있어 arctan함수의 근사화 방법에 의해 기존 방법의 단점들을 보완하기 위한 방법들이 연구되어지고 있다. 그 결과 특정한 위상여유와 이득여유의 값을 만족하는 제어 파라미터 값을 쉽게 구할 수 있는 방법이 제시되었다.[1][2][3]

비록 이 방법은 특정한 위상여유와 이득여유의 값을 만족하는 제어 파라미터 값을 쉽게 구할 수는 있지만, 원래의 arctan함수의 값과 보간된 1차 선형식에는 분명한 오차가 존재함으로 보간식에 의한 제어기의 설계시 오차를 수반하게 된다. 따라서 본 논문은 근사화에 의한 오차를 줄이면서, 설계하고자 하는 이득여유와 위상여유를 만족하기 위하여 경사 하강법을 적용하였다.

이는 arctan함수의 값을 근사화 한 이후에 제어기의 파라미터를 결정하는 위상교차 주파수 w_p 를 초기치로 하여, PI 제어기의 파라미터인 k_c 와 T_i 를 경사 하강법을 적용하여 특정한 이득여유와 위상여유를 만족하는 제어기의 파라미터를 결정 하였다.[6]

그 결과 실제의 arctan함수에 매우 근접한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 이 방법을 PI제어기에 적용하여 시뮬레이션 해본 결과, Wengr과 Cheng이 제안한 근사화에 의한 방법 보다 훨씬 오차가 개선된 동조 방법임을 확인하였다.

2. 본 론

2.1 PI 동조 알고리즘

제어공정의 전달함수를 $G_p(s)$ 라 하고, 이득여유를 A_m , 위상여유를 Φ_m 이라고 하면, 이득여유와 위상여유의 정의 식은 아래의 식 (1)~(4)로 표현된다.

$$\arg[G_c(jw_p)G_p(jw_p)] = -\pi \tag{1}$$

$$A_m = \frac{1}{|G_c(jw_p)G_p(jw_p)|} \tag{2}$$

$$|G_c(jw_g)G_p(jw_g)| = 1 \tag{3}$$

$$\Phi_m = \arg[G_c(jw_g)G_p(jw_g)] + \pi \tag{4}$$

여기서 이득여유에 관계된 식은 식 (1)과 식 (2)이며, 위상여유와 관계된 식은 식 (3)과 식 (4)이다. 또한 w_p 는 Nyquist 선도가 음의 실수축(-1, 0)과 만나는 점에서의 주파수, 즉 위상교차 주파수를 의미하며, w_g 는 Nyquist 선도가 진폭이 1인 점과 만날 때의 주파수, 즉 이득교차 주파수를 의미한다.

arctan함수의 근사화 방법에 의한 지연시간을 포함한 1차 공정의 PI 제어기의 동조방법을 살펴보자.

PI 제어기를 $G_c(s)$, 제어공정을 $G_p(s)$ 라 하면

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) \tag{5}$$

$$G_p(s) = \frac{k_p}{1+sr} e^{-sL} \tag{6}$$

식 (5)와 식 (6)으로부터 루프 전달함수를 구한다.

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{k_c k_p (1+sT_i)}{sT_i(1+sr)} e^{-sL} \tag{7}$$

루프 전달함수 식 (7)을 식 (1)~(4)에 대입하여 정리하면 식 (8)~(11)과 같다.

$$-\frac{\pi}{2} + \arctan w_p T_i - \arctan w_p \tau - w_p L = 0 \tag{8}$$

$$A_m k_c k_p = w_p T_i \sqrt{\frac{w_p^2 \tau^2 + 1}{w_p^2 T_i^2 + 1}} \tag{9}$$

$$k_c k_p = w_g T_i \sqrt{\frac{w_g^2 \tau^2 + 1}{w_g^2 T_i^2 + 1}} \tag{10}$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} + \arctan w_g T_i - \arctan w_g \tau - w_g L \tag{11}$$

식 (8)~(11)을 보면 주어진 값은 제어공정의 값 (k_c , τ , L)과 이득여유와 위상여유 값 (A_m , Φ_m)이며, 구해야 할 값은 PI 제어 파라미터인 (k_c , T_i)와 교차 주파수인 (w_p , w_g)이다.

2.1.1 arctan함수 근사화에 의한 PI, PID 동조 알고리즘

$\arctan x$ 를 $\arctan(0)$, $\arctan(1)$ 인 2점의 값을 이용한 1차의 선형 보간식을 사용하였다.

$$\arctan x \approx \begin{cases} \frac{1}{4} \pi x & (|x| \leq 1), \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4x} & (|x| > 1), \end{cases} \quad (12)$$

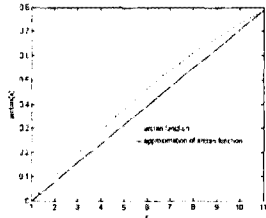


그림 1. 근사화한 arctan 함수

식 (10)과 식 (11)은 식 (13)과 식 (14)로 근사화 할 수 있다.

$$A_m k_c k_p = w_p \tau \quad (13)$$

$$k_c k_p = w_g \tau \quad (14)$$

식 (9)와 식 (12)에 근사화된 arctan함수 값을 대입하여 정리하면 식 (15)와 식 (16)과 같다.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4w_p T_i} + \frac{\pi}{4w_p \tau} + w_p L = 0 \quad (15)$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4w_g T_i} + \frac{\pi}{4w_g \tau} - w_g L \quad (16)$$

위의 식 (13)~(16)의 관계에서 위상교차 주파수 w_p 를 구하면 식 (17)과 같다.

$$w_p = \frac{A_m \Phi_m + \frac{1}{2} \pi A_m (A_m - 1)}{(A_m^2 - 1)L} \quad (17)$$

PI 제어 파라미터 값은 식 (13)~(15)에 의해 구할 수 있으며, 식 (18)과 식 (19)와 같다.

$$k_c = \frac{w_p \tau}{A_m k_p} \quad (18)$$

$$T_i = \left(2w_p - \frac{4w_p^2 L}{\pi} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \quad (19)$$

1차의 지연시간을 갖는 제어공정에 대해서는 PI 제어기만으로도 충분히 좋은 결과를 얻을 수 있지만, 교차의 지연시간을 갖는 제어공정에 대해서는 PID 제어를 사용해야 한다.[5]

따라서, 본 논문에서는 2차의 지연시간을 갖는 제어공정에 대하여 제안된 방법에 의해서, 확정된 이득여유와 위상여유를 만족하는 동조방법을 설명한다.

PID 제어기의 전달함수 $G_c(s)$ 는 식 (20), 제어공정의 전달함수 $G_p(s)$ 는 식 (21)와 같다.

$$G_c(s) = \frac{k_c(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i} \quad (20)$$

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(1+s\tau)(1+s\tau)} e^{-sL}, \quad \tau \geq \tau_i \quad (21)$$

식 (20)과 식 (21)로부터 루프 전달함수 $G_c(s)G_p(s)$ 는 식 (22)와 같다.

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{k_c k_p (1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i (1+s\tau)(1+s\tau)} e^{-sL} \quad (22)$$

여기서 루프의 전달함수의 극점과 영점을 상쇄하면, 즉 $T_d = \tau_i$ 이면 동조 방법은 1차의 지연 시간을 갖는 공정과 같게 되므로 PID 동조 방법은 PI 동조 방법과 같은 간단한 방법으로 구해진다. 여기서 PID 파라미터 값을 구하면 식 (23)~(25)와 같다.

$$k_c = \frac{w_p \tau}{A_m k_p} \quad (23)$$

$$T_i = \left(2w_p - \frac{4w_p^2 L}{\pi} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \quad (24)$$

$$T_d = \tau_i \quad (25)$$

2.2 경사 하강법을 이용한 PI, PID 동조 방법

arctan함수의 근사화에 의한 PI 제어기 동조 방법은 1차선형 방정식으로 arctan함수를 근사화 하여 제어기의 파라미터를 동조했다. 그러나 이에 의한 결과는 근사화에 따른 오차가 존재한다.

이러한 오차는 원래의 함수가 아닌 근사화한 함수를 사용하였기에 나타나는 오차로서 필연적인 오차이다.

이에 본 논문에서는 근사화를 하지 않고 원래의 arctan함수를 사용함으로써, 이러한 오차를 줄여 특정한 이득여유와 위상여유를 만족함을 보인다. 즉, 식 (8)~(11)에서 제어기 파라미터를 직접적으로 동조함으로써 오차를 현저하게 줄일 수 있었다.

하지만 직접적인 arctan함수의 사용은 비선형 방정식 이기에 계산상의 어려움이 따른다. 또한, 하나의 수식으로 제어기의 파라미터와 교차주파수를 만족하는 값을 찾기에는 불가능하다.

식 (2)에서 알 수 있듯이 이득여유는 위상교차 주파수 w_p 에 의해 결정된다. 또한 식 (18)에서 w_p 는 제어기 파라미터인 k_c 값을 결정함을 알 수 있다. 하지만 위상교차 주파수 w_p 를 직접 구할 수는 없기에, arctan 함수를 근사화하여 식 (17)에서 얻어지는 위상교차 주파수를 초기값으로 정하였다. 또한 PI 제어기의 파라미터인 T_i 값도 식 (19)에서 결정 되어진 값을 사용하였다. 식 (26)을 이용하여 특정한 이득여유를 만족하는 정확한 제어기의 파라미터 값 k_c 를 결정할 수 있다.

$$A_m = \frac{w_p T_i \sqrt{\frac{w_p^2 \tau^2 + 1}{w_p^2 T_i^2 + 1}}}{k_c k_p} \quad (26)$$

본 연구에서는 경사 하강법을 사용하여 최적의 값을 결정하였다. 여기서 초기값은 식 (17)과 식 (19)에서 구한 값을 사용하였으며, 성능 평가함수는 식 (26)과 같이 특정한 이득여유 A_m 이 '0'인 점에서의 오차가 최소가

되도록 설정하였다. 경사 하강법에 대한 자세한 알고리즘은 본 논문에서는 생략한다.[6]

$$J = |A_m| - |A_m^*| \quad (27)$$

같은 방법으로 식 (11)을 사용하여 위상여유 Φ_m 을 만족하는 제어기 파라미터 T_i 를 결정 한다. 이때의 초기값은 식 (14), 식 (18), 식 (29)에서 결정되어진 값을 사용한다. 성능 평가함수는 식 (28)와 같이 특정한 위상여유 Φ_m 이 '0'인 점에서 오차가 최소가 되도록 설정하였다. 식 (23)은 위상여유를 만족하는 이득교차 주파수 w_g 를 결정하는 수식이다.

$$H = |\Phi_m| - |\Phi_m^*| \quad (28)$$

$$w_g = \frac{k_c k_p}{\tau} \quad (29)$$

특정한 이득여유를 정확히 만족하는 k_c 값과, 특정한 위상여유를 만족하는 T_i 값을 사용하여 오차가 거의 없는 결과를 얻었다.

2.2.1 경사 하강법을 이용한 PI 제어기의 시뮬레이션 결과

아래의 표 1. 은 지연시간을 갖는 1차 공정에 대하여 각각 다른 이득여유와 위상여유를 만족하는 제어기의 파라미터를 경사 하강법을 이용하여 구하였고, 그에 따른 결과를 보여준다. ' A_m^* '과 ' Φ_m^* '은 arctan함수 근사화에 의해 얻어진 이득여유와 위상여유이고, ' k_c ', ' T_i ', ' w_g ' 그리고 ' A_m^{**} ', ' Φ_m^{**} '는 경사하강법을 이용하여 구한 제어기 파라미터 및 이득교차 주파수 그리고 이득여유와 위상여유이다.[1]

표 1. 에서 우리는 arctan함수의 근사화를 사용한 제어기 동조 보다 경사 하강법을 사용한 제어기 설계가 오차율이 현저하게 줄어들고 거의 완벽한 결과를 얻을 수 있음을 확인 할 수 있다.

표 1. $G_p(s) = \frac{1}{1+s} e^{-0.1s}$, 경사 하강법을 이용한 PI 제어기 파라미터

A_m	Φ_m	k_c	T_i	w_g	A_m^*	Φ_m^*	A_m^{**}	Φ_m^{**}
3	45	4.83	0.38	4.38	2.91	41.6	3.00	45.24
5	45	2.90	0.32	2.90	4.83	46.6	4.98	45.10
3	60	5.24	1.00	5.24	3.00	60.0	3.00	60.00
5	60	3.04	0.55	3.04	4.94	58.5	5.00	60.04

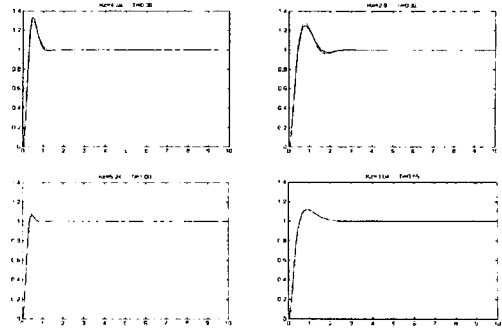
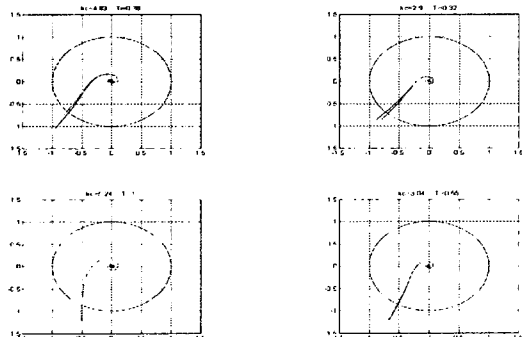


그림 2. $G_p(s) = \frac{1}{1+s} e^{-0.1s}$, Step 응답곡선

표 2.에서는 지연시간을 갖는 2차의 다른 공정에 대한 시뮬레이션 결과를 나타낸다.

표 2. 다른 공정의 PID 제어파라미터 ($A_m=3, \Phi_m=60^\circ$)

Process Model	k_c	T_i	T_d	w_g	A_m^*	Φ_m^*
$\frac{e^{-0.5s}}{(1+s)(1+0.5s)}$	1.05	1.00	0.50	1.05	3.00	60.00
$\frac{e^{-1.0s}}{(1+s)(1+0.5s)}$	0.52	1.00	0.50	0.52	5.00	60.00

3. 결 론

본 논문에서는 특정한 이득여유와 위상여유를 보장하는 제어기를 경사 하강법을 이용하여 설계하였다. 이 설계 방법을 Matlab을 이용하여 시뮬레이션 하였고, 시뮬레이션 결과 arctan함수의 근사화에 의한 제어기 설계 시 필연적인 오차를 거의 '0'에 근접하게 줄임으로써, Wheng Khuen HO와 Chang Chieh Hang이 제안한 arctan함수 근사화에 의한 제어기 설계 방법보다 우수한 방법임을 확인하였다. 본 논문에서는 특정한 이득여유와 위상여유를 만족하는 PID 동조 방법에 대한 연구를 수행하여 제시하였다. PID 제어기의 파라미터 동조시 초기값을 arctan함수의 근사화에서 찾았다. arctan함수를 근사화하지 않고 원래의 루프 전달함수에서 직접적인 w_g 를 찾아서, 초기값으로 이용하는 방법에 대하여 계속 연구하고자 한다.

[참 고 문 헌]

[1] W. K. Ho, C. C. Hang, L. S. Cao, "Tuning of PID Controllers Based on Gain and Phase Margin Specifications", Automatica, Vol. 31, No. 3, pp497-502, 1995

[2] W. K. Ho, O. P. Gan, E. B. Tay, E. I. Ang, "Performance and Gain and Phase Margins of Well-Known PID Tuning Formulas", IEEE, Vol. 4, No. 473-477, 1996

[3] W. K. Ho, T. H. Lee, H. P. Han, Y. Hong, "Self-Tuning IMC-PID Control with Interval Gain and Phase Margins Assignment", IEEE, Vol. 9, No. 3, pp535-541, 2001

[4] Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice Hall, Fourth Edition, pp489-648, 2003

[5] Astrom, K. J. and C. C. Hang, "Automatic Tuning of PID controller", Instrument Society of America, 1988

[6] 최경내, "새로운 모델 축소 방법을 이용한 최적화 적용형 PID 제어구조 설계", 원광대학교 대학원, pp19-41, 2003