주기적 예방보전의 최적정책에 관한 연구

나명환, 손영숙
전남대학교 통계학과

김문주
전남대학교 통계학과 대학원

Abstract

This paper introduces models for preventive maintenance policies and considers periodic preventive maintenance policy with minimal repair when the failure of system occurs. It is assumed that minimal repairs do not change the failure rate of the system. The failure rate under prevention maintenance received an effect by a previously prevention maintenance and the slope of failure rate increases the model where it considered. Also the start point of failure rate under prevention maintenance considers the degradation of system and that it increases quotient, it assumed. Per unit time it bought an expectation cost from under this prevention maintenance policy. We obtain the optimal period time and the number for the periodic preventive maintenance by using Nakagawa's Algorithm, which minimizes the expected cost rate per unit time. Finally, it suppose that the failure time of a system has a Weibull distribution as an example and we obtain an expected cost rate per unit time the optimal period time and the number when cost of replacement and cost of minimal repair change.

1. 서론

예방보전(Preventive Maintenance; PM)이란 시스템 혹은 컴포넌트의 고장 가능성 또는 열화(degradation) 고장을 줄이기 위해 미리 정해진 간격 또는 규정된 기준에 따라 수행되는 계획된 보전(Planned Maintenance)을 의미한다. 즉, 예방보전은 시스템이 작동하고 있는 동안에 요구 기능을 수행할 수 있도록 시스템에 행해지는 조치이다. 이러한 조치는 최소수리(minimal repair), 교체(replacement), 정비(overhaul), 검사(inspection) 등을 포함한다. 예방보전은 설비의 열화나 고장을 미연에 방지함으로써 수명을 계속 연장할 수 있도록 해준다. 그러므로 예방보전은 시스템의 고장을 예측해 전체적으로 신뢰성을 높여준다. 또한 고장의 발생을 미리 방지하여 생산의 지연 때문에 발생하는 사업 손실(loss)을 줄여주는 등의 장점을 가지고 있다.

욕조 고장률에서 초기고장(early failure)은 잠재적인 설계나 제조상의 결함으로 인하여 발생하게 된다. 이러한 결함은 출하검사에서는 정상적인 양품으로 판정되지만, 저장, 물류, 설치 및 소비자 사용에 이르는 과정에서 스트레스를 받아 결함이 드러나 고장이 발생한다. 또한 우발고장(random failure)기간은 설계나 제조상의 결함이 제거되어 품질 안정화가 이루어지면 일정한 고장률을 가지게 되는데, 이 기간을 의미한다. 마지막으로 마모고장(wearout failure)은 아이템 즉, 시스템이나 컴포넌트들을 어느 기간 이상 사용하면, 재료나 부품이 열화되어 고장률이 증가하는 것을 말한다.

PM후에는 욕조고장률에 비해 이전보다 더 수명이 늘어나 있는 것을 알 수 있다. 이처럼 예방보전을 수행하여 시스템의 고장률을 줄이고 수명을 연장시킬 수 있다. 이러한 예방보전에서 관심사항은 PM 사이의 최적 시간길이와 시스템이 교체될 때까지의 PM 횟수를 결정하는 것이다.

2. 예방 보전 정책

주기적이고 연속적인 예방보전 정책은 정비를 포함하는 모형이다. 이러한 정책은 Nakagawa(1986)에 의해 제안되었다. 이 모형은 다음과 같은 PM정책을 고려한다. PM은 주기적 시간 kx 혹은 일정한 구간 $x_k(k=1,2,3...N)$에서 행해진다. 시스템은 N번째 PM에서 새로운 시스템으로 교체된다. 시스템이 PM 사이에서 고장 나면 단지 최소수리만 수행한다. 그리고 시스템은 PM과 고장률 사이에서 서로 다른 분포를 가지며 고장률은 PM의 횟수에 따라 증가한다. Nakagawa는 다음의 k번째 PM의 주기에서 $r_k(t)$고장률과 $r_k(t)<r_{k+1}(t)$를 갖는 시스템을 고려한다. 고장률은 PM의 수에 따라 증가한다.

시스템은 주기적 시간 kx에서 예방적으로 보전되며 N번째 PM에서 무한 시간 span에 대해

교체된다. 만약 PM에 대한 시간들 , 최소 수리와 교체가 무시될 수 있으면 기대 비용은 쉽게 아래와 같이 주어진다.

$$C_1(x,N)=\frac{c_1\sum_{k=1}^{N}\int_0^x r_k(t)dt+(N-1)c_2+c_3}{Nx}$$

c_1은 최소수리 비용이고 c_2는 PM비용, c_3는 교체비용이다. 관심사항은 기대 비용을 최소화 하는 최적 시간 x^*와 횟수 N^*를 찾아내는 것이다. 0보다 큰 어떤 x에 대하여

$$C_1(x,N+1)\geq C_1(x,N)\text{과 } C_1(x,N)<C_1(x,N-1)$$

을 만족하는 유한하고 유일한 N^*가 존재한다. 그리고 $r_k(t)$가 미분가능하고 무한대로 증가한다면 아래 식을 만족하는 유한하고 유일한 x^*가 존재한다.

$$\sum_{k=1}^{N}[xr_k(x)-\int_0^x r_k(t)dt]=[(N-1)c_2+c_3]/c_1$$

$C_1(x^*,N)$을 x에 관해 미분하고 그것을 0과 같다고 놓고 풀면 얻어진다. 결론적인 비용은 $C_1(x^*,N)=(c_1/N)\sum_{k=1}^{N}r_k(x^*)$이다. 그러므로 최적 x^*와 N^*가 Nakagawa의 알고리즘을 사용하여 얻어진다.

시스템은 일정한 구간 x_k에서 예방적으로 보전되며 N번째 PM에서 교체된다. 즉 PM은 성공적인 시간 $0<x_1<x_1+x_2<\ldots<x_1+x_2+\ldots+x_N$ 에서 행해지고 시스템은 $x_1+x_2+\ldots\ldots+x_N$ 에서 교체된다. 다른 가정은 주기적 PM과 동일하다. 따라서 기대비용은

$$C_1=(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)=\frac{c_1\sum_{k=1}^{N}\int_0^{x_k}r_k(t)dt+(N-1)c_2+c_3}{x_1+x_2+\ldots.+x_n}$$

이다. 연속적 $\{x_k\}$가 최소비용이 될 수 있는 필요한 조건은 각 k에 대한 $dC_2/dx_k=0$이다. 이렇게 해서 각 x_k에 대하여 $C_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$미분하고 그것을 0으로 놓으면 다음을 내포한다.

$$r_1(x_1)=r_2(x_2)=\ldots\ldots=r_N(x_N),\quad c_1r_k(x_k)=C_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\qquad(2)$$

단, k=1,2,3....N이다. 만약 우리가 $r_k(x_k)=A$ 로 둔다면 각 x_k는 고장률 $r_k(x_k)$ 이 연속적이고 무한대로 증가할 때 유일한 A의 함수에 의해 결정된다. 이렇게 해서 x_k를 (2)식에 대입하고 그 방정식이 A만의 함수로 되게 하면 그것은 아래와 같이 표현된다.

$$A(x_1+x_2+\ldots..+x_N)-\sum_{k=1}^{N}\int_0^{x_k}r_k(t)dt=[(N-1)C_2+C_3]/c_1\qquad(3)$$

각 x_k가 $r_k(x_k)$=A의 역함수에 의해 주어진 경우임. 만약 방정식 (3)의 A가 유일하게 존재하면 일련의 $\{x_k\}$는 $C_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$에 대해 최소값을 산출하며 $x_k\to\infty$에 따라 $C_2(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)\to\infty$이다.

또한 방정식 (1)과 (3)에 의해 $x_1,x_2,\ldots x_N$ 이 결정된다. 다음으로 방정식 (2)에 의해 결정된 비용율은 c_1A이며 그것은 N의 함수이다. 최적 PM을 완성하려면 우리는 A를 최소화 하는 최적 횟수 N을 구해야 할 것이다.

위의 논의로부터 우리는 최적 PM을 획득하기 위한 컴퓨터 계산 과정을 구체화 할 수 있다.

(1) $r_k(x_k)$=A를 풀고 x_k를 A의 함수에 의해 표현한다.

(2) x_k를 (3)에 대입하고 그것을 각 A에 의해 푼다.

(3) A를 최소화 하는 N을 결정한다.

3. 예방보전 모형과 최적 정책

이제 PM에 의해 감소하는 고장률이 시간에 따라 증가하면서 고장률의 기울기가 PM의 횟수에 따라 증가하는 경우를 생각해 보자. 예방보전(PM)정책의 목적은 시스템이 작동되고 있는 동안에 시스템의 열화 과정을 늦추고 시스템의 수명을 늘이는 것이다. 예방보전(PM) 직후의 시스템의 상태가 이전에 수행되었던 예방보전(PM)직후의 시스템의 상태만큼 좋아지지는 않는 경우의 모형을 고려하자. 이 논문은 고장률의 기울기가 이전 PM 직후의 고장률의 기울기보다 큰 경우를 고려한

다. 각 PM 직후의 특정한 시점(x)에서 고장률의 기울기는 이전 PM 직후의 특정한 시점(u)에서의 고장률의 기울기보다 크다고 가정한다(u<x). 그러므로 각 PM 후의 특정한 시점에서 고장률의 기울기는 이전 PM직후의 특정한 시점에서 고장률의 기울기보다 α배 만큼 크다고 하자. x가 주기시점인 경우 (k+1) 주기에서의 고장률은 이전 주기의 고장률과 다음과 같은 관계를 가지게 된다.(2000, 방중혁).

$$h'[\mu+(k+1)x]=\alpha h'(\mu+kx),\ (\alpha>0,\ 0<\mu<x,\ k=0,1,2,...N)$$

시스템의 열화(degradation)비율은 시스템의 운영(operating)시간에 따라 증가하게 된다. 따라서 각각의 PM직후의 고장률의 시작점들이 지수형태(즉, $e^{\beta t}-1$)를 구성하는 경우를 고려하자. 이제 다음의 예방보전(PM) 정책 모형을 고려하자. 시스템은 주기적 시간 kx에서 예방적으로 보전되고 N번째 PM에서 새로운 시스템으로 교체된다. PM직후의 고장률은 지수적 으로 시간에 따라 증가하며 각 PM직후의 특정시점에서 고장률의 기울기는 이전 주기의 고장률보다 α배 만큼 크다. 그리면 위와 같은 시스템의 PM하에서 고장률 함수는 다음과 같다.

$$h_{pm}(t)=\alpha^k h(t-kx)+e^{\beta kx}-1,\ kx<t\leq(k+1)x\ ,k=0,1,2,...,N$$

단, 여기서 $h(t)$는 첫 번째 PM이 수행될 때까지의 고장률 함수이며 t=0일때는 $h_{pm}(0)=h(0)=0$ 이다. 또한 α>1, β>0으로 알려진 상수 값이다.

일정 시간 동안 시스템 보전하의 기대비용은 다음과 같이 생각해 볼 수 있다.

$$C(x,N)=\frac{1}{Nx}[C_m\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kx}^{(k+1)x}(\alpha^k h(t-kx)+e^{\beta kx}-1)dt+(N-1)C_p+C_r] \qquad (3.1)$$

여기서 C_m은 최소수리 비용이며, C_p는 PM의 비용, C_r은 교체비용이고 이들 비용 사이에는 다음과 같은 부등식 $C_r>C_p>C_m$ 이 성립한다. 기대비용 식 (3.1)을 간단히 정리하면 다음 식이 도출된다.

$$C(x,N)=C_m(\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}\int_0^x h(t)dt+x(\frac{e^{N\beta x}-1}{e^{\beta x}-1}-N))+(N-1)C_p+C_r/Nx \qquad (3.2)$$

시스템을 보전하는 경우에 가장 관심 있는 부분은 예방보전을 몇 번 할 것인가, 예방보전의 수행 시기는 어느 시점일 것인가의 결정이다. 이를 결정하는 방법은 교체하기 이전에 단위 시간당 기대비용을 최소화 하는 주기와 횟수를 결정하는 것이다. 이와 같이 결정된 주기와 횟수는 최적 주기와 최적 횟수가 된다.

$x>0$이면 식(3.2)의 $C(x,N)$을 최소화 하는 최적 PM 횟수 N^*는 다음 두 부등식을 만족한다.

$$C(x,N+1)\geq C(x,N) \text{ 와 } C(x,N)<C(x,N-1)$$

위 첫 번째 부등식을 정리하면

$C(x,N+1)-C(x,N)\geq 0$ 이고 이를 계산하면 좌변은

$$\frac{N(\alpha^{N+1}-1)-(N+1)(\alpha^N-1)}{\alpha-1}\int_0^x h(t)dt+x\frac{Ne^{(N+1)\beta x}-(N+1)e^{N\beta x}+1}{e^{\beta x}-1}$$

와 같고 우변은 $(C_r-C_p)/C_m$ 이 된다.

좌변의 식들을 다시 정리하면 첫 번째 부등식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$(N\alpha^N-\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1})\int_0^x h(t)dt+x\frac{Ne^{(N+1)\beta x}-(N+1)e^{N\beta x}+1}{e^{\beta x}-1}\geq\frac{C_r-C_p}{C_m}$$

두 번째 부등식을 정리하면 $C(x,N)-C(x,N-1)<0$ 이고 이를 계산하면 좌변은

$$\frac{(N-1)(\alpha^N-1)-N(\alpha^{N-1}-1)}{\alpha-1}\int_0^x h(t)dt+x\frac{(N-1)e^{N\beta x}-Ne^{(N-1)\beta x}+1}{e^{\beta x}-1}$$

와 같고 우변은 $(C_r-C_p)/C_m$ 이 된다. 위에서와 마찬가지로 좌변의 식들을 다시 정리하면 첫 번째 부등식은 아래와 같이 쓸 수 있다. 이 부등식을 최종적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$L(x,N)\geq(C_r-C_p)/C_m,\quad L(x,N-1)<(C_r-C_p)/C_m \qquad (3.3)$$

$L(x,N)$은 아래와 같은 함수이다.

$$L(x,N)=\begin{cases}(N\alpha^N-\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1})\int_0^x h(t)dt+x\frac{Ne^{(N+1)\beta x}-(N+1)e^{N\beta x}+1}{e^{\beta x}-1} & ,N=1,2\,.... \\ 0\ ,N=0 & \end{cases}$$

Theorem3.1 어떤 주어진 $x(>0)$에 대하여 식(3.3)을 만족하는 유한하고 유일한 N^*가 존재한다.

Proof α>1, β>0, $x>0$이므로

$$L(x,N)-L(x,N-1)=\{N\alpha^{N-1}(\alpha-1)\int_0^x h(t)dt+Nxe^{(N-1)\beta x}(e^{\beta x}-1)>0$$

따라서 $L(x,N)$은 N에 관한 함수이므로 $N\rightarrow\infty$갈수록 무한대로 증가한다. 그러므로 부등식 (3.3)을 만족하는 유한하고 유일한 N^* 가 존재한다. □

$C(x,N)$을 x에 대해 미분하여 0으로 놓으면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}(xh(x)-\int_0^x h(t)dt)+x^2\beta e^{\beta x}\frac{(N-1)e^{N\beta x}-Ne^{(N-1)\beta x}+1}{(e^{\beta x}-1)^2}=\frac{(N-1)C_p+C_r}{C_m} \quad (3.4)$$

Theorem3.2 고장률 함수 $h(t)$가 미분가능하고 무한대로 증가하면, 주어진 정수 N에 대해 (3.4)을 만족하는 유한하고 유일한 x^*가 존재한다.

Proof 식 (3.4)의 좌변을 다시 미분하면

$$[\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}xh'(x)+2x\sum_{k=0}^{N-2}(k+1)e^{k\beta x}+x^2\sum_{k=0}^{N-2}\beta k(k+1)e^{k\beta x}>0$$

이다. 따라서 어떤 정수 N에 대하여 식(3.4)를 만족하는 유한하고 유일한 x^*가 존재하게 된다. □

이제 x와 N이 고정되어 있지 않은 경우 $C(x,N)$을 최소화 시키는 최적 주기 x^*와 PM의 최적 횟수 N^*를 찾는 방법을 고려해 보자. 먼저 식(3.4)을 만족하는 x_N을 구하면 단위 시간당 기대비용은 x_N과 N의 함수로 표현된다.

$$C(x_N,N)=\frac{1}{Nx_N}C_m(\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}\int_o^{x_N}h(t)dt+x_N(\frac{e^{N\beta x_N}-1}{e^{\beta x_N}-1}-N)+(N-1)C_p+C_r \quad (3.5)$$

식 (3.5)이 오로지 N에 관한 함수이므로 다음 식을 만족하는

$$N^*=\min{}_N C(x_N,N),\ N=1,2,.. \quad (3.6)$$

N^*를 구할 수 있다. 주어진 정수 N에 대하여 식(3.4)을 만족하는 유한하고 유일한 x_N이 존재한다. 이렇게 해서 정리3.2의 결과에 의해 계산된 식 (3.5)을 만족하는 N^*의 값과 $x*$는 최적 PM 횟수와 식(3.2)에서 $C(x,N)$을 최소화하는 최적 주기이다.

직접 x^*와 N^*를 찾아내는 것은 어렵다. 그래서 Nakagawa의 알고리즘이 x^*와 N^*를 찾는데 사용되고 있다. 식 (3.3)과 (3.4)을 만족하는 최적 x^*와 N^*는 계산될 수 있다.

Nakagawa 알고리즘(1986)

단계1. $N=1$을 집어넣고 식(3.4)을 만족하는 x_1을 계산한다.
단계2. $x=x_1$을 집어넣고 식(3.3)을 만족하는 N_1을 계산한다.
단계3. $N=N_1$을 집어넣고 식(3.4)을 만족하는 x_2를 계산한다.
단계4. $N_j=N_{j+1}\,(j=0,1,2,\ldots)$일 때까지 계속하라. 단, $N_0=1$
그러면 $N^*=N_j$이고 x^*는 정리3.2에 의해 얻어진다.

4. 예제

시스템의 수명이 와이블 분포를 따른다고 하자. 그러면 이 분포의 고장률은 $h(t)=\frac{m}{\eta}\,(\frac{t}{\eta})^{m-1}$,단 $t\geq0$ and $m>1$이다. m 은 형상모수, η 는 척도모수이다. 그럼 가장 간단한 경우로 $m=2$인 경우에 대해 생각해 보자. 그러면 고장률은 $h(t)=\frac{2}{\eta^2}t$ 이므로 예방보전하의 고장률 함수는 아래와 같다. 또한 고장률 함수를 식 (3.3)과 (3.4)에 대입하면 단위시간당 기대비용을 x에 대해 미분한 식(4.1)과 부등식(4.2)를 구할 수 있다.

$$h_{pm}(t)=\alpha^k h(t-kx)+e^{\beta kx}-1=\alpha^k\frac{2}{\eta^2}(t-kx)^2+e^{\beta k}-1,\ kx<t\leqq(k+1)x\ ,k=0,1,2,..,N$$

$$\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}(x^2-\frac{x^2}{\eta^2})+x^2\beta e^{\beta x}\sum_{k=0}^{N-2}(k+1)e^{k\beta x}=\frac{(N-1)C_p+C_r}{C_m} \quad (4.1)$$

$$L(x,N)\geq(C_r-C_p)/C_m \text{ 과 } L(x,N-1)<(C_r-C_p)/C_m \quad (4.2)$$

부등식 (4.2)에서 $L(x,N)$은 다음과 같이 얻어진다.

$$L(x,N) = \begin{cases} (N\alpha^N - \dfrac{\alpha^N-1}{\alpha-1})\dfrac{x^2}{\eta^2} + x\dfrac{Ne^{(N+1)\beta x} - (N+1)e^{N\beta x}+1}{e^{\beta x}-1}, & N=1,2\ldots \\ 0, & N=0 \end{cases}$$

또한 단위시간당 기대비용은 식(4.3)과 같다.

$$C(x,N) = [C_m(\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}\cdot\frac{x^2}{\eta^2} + x(\frac{e^{N\beta x}-1}{e^{\beta x}-1} - N) + (N-1)C_p + C_r]/Nx \qquad (4.3)$$

Nakagawa(1986)의 알고리즘을 사용하여 최적의 x^*와 N^*를 구한다. [표3.2]는 고장률이 $h(t)=t$ 일 때 찾아낸 최적 횟수와 주기 값들을 보여준다. 또한 최적 주기와 횟수를 이용하여 단위시간당 기대비용도 구했다.

5. 결론

이 논문은 수리 가능한 시스템에 대하여 주기적 예방보전(PM) 정책을 다루었다. 주기적 예방보전 모형 중 시스템의 고장률이 이전 PM에 영향을 받고 각 PM후 고장률의 시작점들이 지수적으로 증가하는 경우의 예방보전 모형을 제안하였다. Nakagawa 알고리즘(1986)을 사용하여 기대비용 $C(x,N)$을 최소화 하는 최적값 x^*와 N^*를 구하였다. 논문의 그래프와 알고리즘 계산은 MATLAB 6.5 (The MathWorks Inc. 1998)를 사용하였다.

[표 3.2] $\alpha=1.1$, $\beta=0.1$, $h(t)=t$ 일때

	Cp=1				Cp=2		
Cr	N*	x*	C	Cr	N*	x*	C
5	2	1.1717	4.8293	5	2	1.3659	4.3490
10	2	1.4797	6.1475	10	2	1.6339	6.0585
15	2	1.7280	7.5870	15	2	1.8589	7.4620
20	3	1.3647	9.7166	20	2	2.0558	8.6788
25	3	1.4928	10.7862	25	3	1.5867	10.8025
30	3	1.6092	11.7276	30	3	1.6956	11.7482
35	3	1.7164	12.6162	35	3	1.7967	12.6276
40	3	2.5990	10.0962	40	3	1.8914	13.4535
45	3	2.7342	10.6592	45	3	2.8114	10.7533
50	3	2.8614	11.1952	50	3	2.9344	11.2842

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지역혁신인력양성사업의 연구결과로 수행되었음

참고문헌

[1] 박동호, 염준근, 정기문(1998), Optimal Policy for Periodic Preventive Maintenance, 한국통계학회,1998년 춘계학술발 표회 논문집, 177-182.

[2] 방중혁 (2000). 수리 가능한 시스템의 최적예방보전 및 교체정책 , 서울대학교 대학원 통계학과 석사학위 논문.

[3] 정기문(1998).A Study on Optimal Periodic Preventive Maintenance Policy of a Repairable System, 동국대학교 대학원 통계학과 박사학위논문.

[4] 정종태 (2000). 증가수리비용을 가지는 경우의 최적 예방보전정책, 서울대학교 대학원 통계학과

석사학위 논문.
[5] 정해성, 박동호, 김재주 (2000). 신뢰성 분석과 응용, 영지문화사.
[6] 차지환, 정종태, 김재주 (2001). 수리가능한 시스템에서의 최적 예방 보전정책. 품질경영학회지 제 29권 제2호 ,46-47.
[7] Barlow,R.E. and Hunter,L.C.(1960), Optimum Preventive Maintenance Policies Operations Research, vol 9, 90-100.
[8] Canfield R. V.(1986). Cost Optimization of Periodic Preventive Maintenance, IEEE Transactions on Reliability, 35, 78-81.
[9] Elsayed A. Elsayed (1996). Reliability Engineering.
[10] Lam, Y. (1988). A Note on the Optimal Replacement Policy, Advanced Applied Probability 20, 479-482.
[11] Lie, C. H. and Chun, Y. H. (1986). An Algorithm for Preventive Maintenance Policy, IEEE Transactions on Reliability, 35, 71-75.
[12] Nakagawa, T.(1986). Periodic and Sequential Preventive Maintenance Policies, Journal of Applied Probability, vol 23, 536-542 .
[13] Zhang,F. and Jardine, A.K.S(1998), Optimal Maintenance Models with Minimal Repair, Periodic Overhaul and Complete Renewal,IEE Transactions on Reliability, vol 30, 1109-1119.