위험보정 할인율을 이용한 실물옵션가치 결정

김규태 • 황학진 • 정수희
조선대학교 공과대학 산업공학과
광주광역시 동구 서석동 375 (501-759)

Abstract

Most of options pricing theory including Black and Scholes continuous model and Cox, Ross, and Rubinstein(CRR)'s binomial lattice model were developed based on the notion that continually revised risk-free hedges involving options and stock should earn the risk-free interest rate. This notion is valid with the assumption that the investor's attitude toward risk is neutral. In reality, this assumption may be frequently violated. Therefore, Hodder, Mello, and Sick proposed the way to value real options using the risk-adjusted interest rate. However, they did not show how to derive the mathematical expression for it. In this paper, we will clearly present how to obtain the mathematical expression for the risk-adjusted interest rate for real options and demonstrate two numerical examples to show its applicability.

***Key Words**: Real Options Value, Risk-Adjusted Discounting Rate, Risk-Neutral Probability*

1. 서론

투자프로젝트의 위험성과 수익률은 투자프로젝트를 분석하는 과정에 반드시 반영되어야 한다. 그러므로 투자프로젝트의 위험 가능성을 배제하고 수익률만을 고려하여 투자프로젝트의 경제적 타당성을 평가하는 관습은 바람직하지 않다. 일반적으로 투자프로젝트의 위험은 체계적 위험과 비체계적 위험으로 구분되고 있다. 그러나 자본시장에서는 비체계적 위험은 투자프로젝트의 다양성으로 인하여 완전히 제거되고, 오직 체계적 위험만이 존재하게 되어 투자분석과정에서 체계적 위험이 중요한 역할을 하고 있다.

이러한 위험과 수익률과의 관계에 관한 연구가 일찍이 1950년대 말 Modigliani와 Miller(MM모델)에 의하여 시작되었다. 그 후로는 Sharpe(1964)와 Lintner(1965)가 각각 투자자산가치결정모델에 관한 연구를 수행하여 그 결과를 발표하였으며, Black과 Scholes(1973)가 옵션가치이론에 관한 연구결과를 발표하였다.

Black-Scholes의 모델은 위의 MM개념을 좀더 포괄적으로 적용하여 금융옵션가치를 결정하는 모델로 투자프로젝트의 위험성과 수익률의 관계성을 연구한 모델이다. 이들의 연구결과인 금융옵션가치 이론에 의하여 자본시장에서 거래되고 있는 투자자산(예, 주식)과 옵션으로 완벽하게 투자의 위험성이 제거되는 투자포트폴리오의 구성이 가능하게 되었다.

즉, Black-Scholes의 모델을 이용하면 투자의 위험성이 완전히 제거된 헤지 포트폴리오의 구성이 가능해지고 무위험 거래차익을 얻을 수 있는 기회가 방지되기 때문에 투자프로젝트에 관하여 무위험 할인율이 보장되게 되었다. 이 옵션가치이론에서 보장되는 무위험 할인율은 위험중립형 확률이라는 유사확률개념을 탄생시키게 하였다.

그러므로 지금까지 금융옵션과 옵션의 가치를 결정하기 위해서 반드시 위험중립형 확률을 이용하여 기대현금흐름을 계산하고 이를 다시 무위험 할인율로 할인하는 과정을 밟았다. 그러나 현실적으로는 옵션이 금융시장에서 위험에 직접 노출되어 있음은 분명한 사실이기 때문에 이에 합당한 옵션의 위험보정할인율을 구할 수가 있을 것이다.

Hodder, Mello, Sick(2001) 등이 옵션의 위험보정할인율을 이용하여 옵션의 가치를 계산하는 과정을 보여주는 논문을 최근에 발표하였다. 그러나 이들은 옵션의 위험보정할인율에 관한 식이 유도되는 과정을 그들이 발표한 논문에서 명쾌하게 보여 주고 있지 않다. 단지 위험보정할인율로 계산한 옵션가치가 무위험할인율을 이용하여 계산한 옵션가치와 동일해야 한다는 조건이 만족되어야 한다는 사실을 토대로 옵션의 위험보정할인율을 구할 수 있다고 기술하고 있을 뿐이다.

그러므로 본 논문에서는 투자프로젝트의 위험보정 할인율, 위험중립형 확률, 객관적 확률 등의 관계성을 이용하여 옵션의 위험보정할인율이 결정되는 수리적 과정을 기술하고자 한다. 두 방법의 가정에 관하여 요약하면 Hodder, Mello, Sick의 위험보정할인율 모델은 확률론적 입장에서 출발하여 옵션의 위험보정할인율을 결정한 반면 본 논문에서 제안한 방법은 투자자산가치결정모델을 토대로 하여 옵션의 위험보정할인율을 결정하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절은 투자프로젝트의 위험보정할인율을 이용하여 옵션의 위험보정할인율이 유도되는 과정을 보여 주고 있다. 3절은 가상적인 예제를 통하여 앞 절에서 개발된 옵션의 위험보정할인율의 타당성과 응용성을 보

여주고 있다. 마지막 4절은 본 논문에 관한 전반적인 내용을 간략하게 요약하고, 본 연구의 결과에 대하여 토의하고 있으며, 앞으로 수행되어야 할 연구내용을 기술하고 있다.

2. 옵션의 위험보정할인율 개발

본 절에서는 투자자산가치결정모델을 토대로 옵션의 위험보정할인율을 결정하는 수리적 과정을 기술하고자 한다. 이를 위해 투자프로젝트의 위험보정할인율, 위험 중립형 확률, 객관적 확률 등의 관계성을 이용해야 한다. 이러한 내용을 보다 효과적으로 전개하기 위해 먼저 본 논문에 자주 인용되는 변수들에 관한 정의를 간략하게 기술하면 다음과 같다.

C: 콜옵션가치
u: 주가나 현금흐름의 상승비율
d: 주가나 현금흐름의 하락비율
p: 객관적 확률
q: 위험중립형 확률
r_m: 주식시장할인율
r_f: 무위험 할인율
k: 투자프로젝트의 위험보정할인율
r_j: 주식 "j" 할인율
r: 콜옵션의 위험보정할인율
S_0: 현주가 혹은 현금흐름의 현재가

본 논문에서는 아래와 같은 네 가지 공식을 토대로 옵션의 위험보정할인율을 개발하려고 한다.

$$k = r_f + \lambda Cov(r_j, r_m) \qquad (1)$$

단,

$$\lambda = \frac{[E(r_m) - r_f]}{\sigma_m^2} \qquad (2)$$

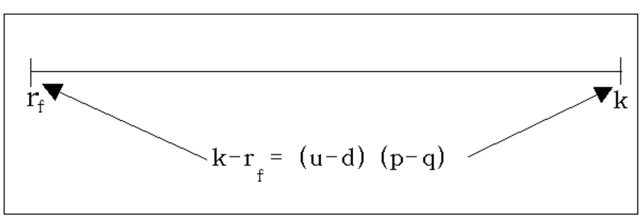
$$p = \frac{1 + k - d}{u - d} \qquad (3)$$

$$q = \frac{1 + r_f - d}{u - d} \qquad (4)$$

여기에서 객관적 확률(p)와 위험중립형 확률(q)는 주가나 현금흐름이 상승할 확률을 일컫고 있다. 즉, 이 확률들은 u가 발생할 확률을 말한다.

식 (3)과 (4)을 투자프로젝트의 위험보정할인율과 무위험할인율에 관하여 정리하여 그 차이를 구하여 식 (1)과 비교하면 위험보상액에 관한 아래와 같은 식 (5)을 얻게 된다.

$$k - r_f = (u - d)(p - q) = \lambda COV(r_j, r_m) \qquad (5)$$



<그림 2> 위험보상과 제 변수들과 관계성

<그림 2>는 투자프로젝트의 위험보정할인율, 무위험할인율, 현금흐름의 상승률과 하락률, 객관적 확률, 위험중립형 확률 등 상호간의 관계를 도식화한 그림이다.

투자프로젝트의 위험보정할인율과 옵션의 위험보정할인율의 관계를 Cox와 Rubinstein (1985)은 식 (6)과 같이 나타내고 있다.

$$r = r_f + \Omega(k - r_f) \qquad (6)$$

$$단,.\ \Omega = \frac{S}{C}\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)C} \qquad (7)$$

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \qquad (8)$$

식 (6)의 Ω을 Cox와 Rubinstein은 옵션의 탄력성이라 부르고 있다. 식 (5)부터 (8)까지를 이용하여 콜옵션의 보정할인율에 관하여 정리하면 식 (9)를 얻게 된다. 그러나 식 (9)는 본 논문에서 구하고자 하는 콜옵션가치에 관한 변수 "C"를 포함하고 있으므로 이 변수를 제거해야 본 논문에서 구하고자 하는 콜옵션의 위험보정할인율을 구할 수가 있게 된다. 그렇지 않으면 이 문제는 풀리지 않는 과제로 남게 되어 Jarrow와 Rudd (1983)는 콜옵션의 위험보정할인율응 구하는 것이 불가능하다고 그들의 저서에 기술하고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 콜옵션의 가치를 식 (10)과 같이 표현할 필요가 있다.

$$r = r_f + \frac{(C_u - C_d)(p - q)}{C} \qquad (9)$$

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1 + r} \qquad (10)$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 콜옵션의 위험보정할인율에 관한 식 (11) 혹은 (12)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} r &= r_f + \frac{(C_u - C_d)(p - q)}{\{pC_u + (1-p)C_d\}/(1+r)} \\ &= r_f \frac{pC_u + (1-p)C_d}{qC_u + (1-q)C_d} + \frac{(C_u - C_d)(p-q)}{qC_u + (1-q)C_d} \\ &= r_f + \frac{(C_u - C_d)(p-q)}{qC_u + (1-q)C_d}(1 + r_f) \qquad (11) \\ &= r_f + (k - r_f)\frac{(C_u - C_d)/(u-d)}{qC_u + (1-q)C_d}(1 + r_f) \qquad (12) \end{aligned}$$

식 (11)은 투자프로젝트의 위험보정할인율 k을 알 수 없을 경우 콜옵션의 위험보정할인율을 구하기 위해 사용될 수가 있다. 반면 식 (12)는 투자프로젝트의 위험보정할인율을 알고 있을 경우 콜옵션의 위험보정 할인율을 구하기 위해 사용할 수가 있다.

식 (13)은 Hodder, Mello, Sick 등이 제시한 콜옵션의 위험보정할인율 공식이다. 그러나 앞에서 지적하였듯이 이들은 이 식이 유도된 과정을 전혀 그들의 논문에서 보여 주고 있지를 않다.

$$r = r_f + \left(\frac{1 + r_f \Delta T}{\Delta T}\right)\left(\frac{pC_u + (1-p)C_d}{qC_u + (1-q)C_d} - 1\right) \qquad (13)$$

단, ΔT : 기간

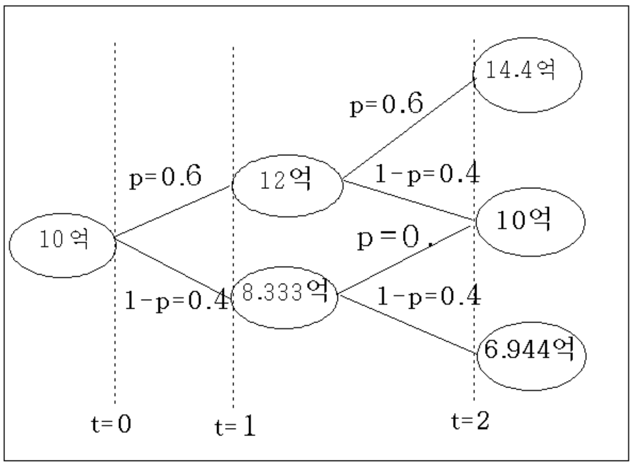
식 (12)와 (13을 이용하면 동일한 콜옵션의 위험보정할인율을 구할 수 있다는 사실을 증명하기 위해서 식 (5)을 식 (13)에 대입하여 정리하면 식 (14)을 얻게 되는 데 이 식에서 무위험 할인율 r_f가 단위당 시간으로 표시되면 ΔT값은 "1"이 되어 식 (13)이 식 (12)와 같아짐을 알 수가 있다.

$$r = r_f + \left(\frac{1 + r_f \Delta T}{\Delta T}\right)\left(\frac{(p-q)(C_u - C_d)}{qC_u + (1-q)C_d}\right)$$

$$= r_f + (k - r_f)\left(\frac{1 + r_f \Delta T}{\Delta T}\right)\left(\frac{(C_u - C_d)/(u-d)}{qC_u + (1-q)C_d}\right) \quad (14)$$

3. 수리적 예제

본 예제는 Copeland와 Antikarov(2001)의 저서에 기술된 것이다. <그림 3>은 이항격자 모델에서 위험보정할인율을 이용하여 콜옵션가치를 결정하기 위한 투자프로젝트의 현금흐름을 보여주고 있다.



<그림 3> 투자프로젝트의 현금흐름

위 그림에서 알 수 있듯이, 이 투자프로젝트의 투자분석기간은 2년으로 한정되어 있고 투자프로젝트의 현재가치는 10억으로 추정되어 있다. 그리고 이 투자프로젝트의 현금흐름의 가치 상승률은 20%이며 하락률은 16.67%로 추정되고, 이에 상응하는 각각의 객관적 확률은 60%와 40%라고 한다. 그리고 투자프로젝트의 위험보정할인율(k)은 년 5.33%이고 무위험 할인율은 3%라고 하며 초기투자자본은 9.5억원이라고 한다.

이 투자프로젝트의 현재가치가 10억이 되는 과정은 다음의 두 방법에 의하여 계산된다. 첫 번째 방법은 객관적 확률과 투자프로젝트의 위험보정할인율을 사용하여 이 투자프로젝트의 현재가치를 계산하는 것이고, 두 번째 방법은 위험중립형 확률을 계산하고 이를 무위험 할인율과 함께 사용하여 이 투자프로젝트의 현재가치를 계산하는 것이다.

I) 투자프로젝트의 위험보정할인율과 객관적 확률을 이용한 프로젝트의 현재가치 계산

현금흐름이 상승할 객관적 확률은 60%이고 이에 상응하는 투자프로젝트의 위험보정할인율은 5.33%이다. 그러므로 구하고자 하는 투자프로젝트의 현재가치는 투자 프로젝트의 위험 보정할인율 5.33%을 사용하여 다음과 같이 구할 수가 있다.

$$PV(5.33\%) = \frac{(0.6)^2 14.4 + 2(0.6)(0.4)10}{(1+0.0533)^2} + \frac{(0.4)^2(6.944)}{(1+0.0533)^2} = 10$$

II) 무위험 할인율과 위험 중립형 확률을 이용한 프로젝트의 현재가치 계산

식 (4)를 이용하여 먼저 위험 중립형 확률을 다음과 같이 계산한다.

$$q = \frac{(1+0.03) - 0.833}{1.2 - 0.8333} = 0.537$$

위에서 구한 위험 중립형 확률과 이에 상응하는 무위험 할인율 3%를 이용하여 투자프로젝트의 현재가치를 구하면 다음과 같다.

$$PV(5.37\%) = \frac{(0.537)^2 14.4 + 2(0.537)(0.463)10}{(1+0.03)^2} + \frac{(0.463)6.944}{(1+0.03)^2} = 10$$

앞에서 객관적 확률과 투자프로젝트의 위험보정 할인율을 이용하여 구한 프로젝트의 현재가치와 위험중립형 확률과 무위험 할인율을 이용하여 구한 프로젝트의 현재가치가 동일함을 알 수가 있다. 이렇게 구한 투자프로젝트의 현재가치는 금융옵션에서 이미 알고 있는 주식의 현재가치와 같은 것이다.

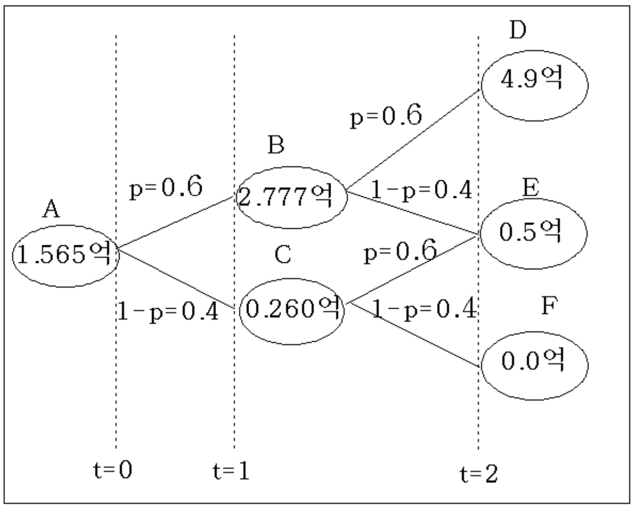
이 투자프로젝트는 콜옵션 형태의 투자프로젝트로 콜옵션의 실행가격은 이 투자프로젝트의 초기투자자본인 9.5억원이 된다. 위험 중립형 확률 방법을 사용하여 이 투자프로젝트의 콜옵션의 가치를 각 분기점마다 구하면 그림 <4>에 나타난 바와 같다.

본 논문에서 제시한 콜옵션의 위험보정할인율을 이용하여 B 분기점의 콜옵션의 위험보정할인율을 구하여 콜옵션의 가치를 구하면 다음과 같다.

$$r = 0.03 + (0.0533 - 0.03)(1 + 0.03) \cdot \left\{\frac{(4.9 - 0.5)/(1.2 - 0.833)}{(0.537)(4.9) + (0.463)(0.5)}\right\} = 13.05\%$$

위에서 구한 콜옵션의 위험보정할인율 13.05%를 이용하여 B분기점의 콜옵션의 가치를 구하면 전통적인 위험중립형 확률방법을 이용하여 구한 콜옵션의 가치와 같이 2.778억원이 됨을 알 수가 있다.

$$ROV = \frac{(4.9)(0.6) + (0.5)(0.4)}{(1+0.1305)} = 2.778$$



<그림 4> 투자프로젝트의 콜옵션 가치

4. 결론

본 논문의 주요 목적은 Hodder, Mello, Sick 등이 이미 개발한 콜옵션의 위험보정할인율을 구하는 식을 구체적으로 유도하는 수리적 전개과정을 보여 주는 것이었다. 이들의 논문을 정확하게 이해하면 이들이 제시한 식을 쉽게 이해할 수는 있으나 본 논문에서 그 수리적 전개과정을 구체적으로 보여주는 이유는 옵션에 관한 독자들의 이해를 돕고자 함에 있다. 또한 금융옵션이론을 실물옵션이론으로 응용하여 사용하고자 할 경우 투자프로젝트의 시장위험성(market risk)뿐만 아니라 고유위험성(private risk)을 고려하여 실물옵션의 가치가 결정되어야 한다. 이러한 측면에서 본 논문에서 보여준 수리적 전개과정에 관한 이해가 투자프로젝트의 고유위험에 상응하는 옵션의 할인율을 결정하기 위한 이론적 근거가 될 것이라고 믿는다. 그러므로 투자프로젝트의 고유위험성을 고려한 일반적 실물옵션의 위험보정할인율을 계산할 수 있는 수리적 모델의 개발이 앞으로 연구되어야 할 과제이다.

후기

본연구는 과학기술부 목적기초연구(R05-2004-000-10586-0) 지원으로 수행되었음

참고문헌

Black, F. and Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy, 81(3), 637-659.
Copeland, T. and Antikarov, V.(2001), Real Options: A Practitioner's Guide, Texere, NY, NY.
Cox, J. C. and Rubinstein, M. (1985), Options Markets, Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, NJ.
Hodder, J. E., Mello, A.S., and Sick, G. (2001), "Valuing Real Options: Can Risk-Adjusted Discounting Be Made To Work," Journal of Applied Corporation Finance, Summer, 14(2), 90-101.
Horn, J. C. (2001), Financial Management Policy, 12th Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ
Jarrow, R. A. and Rudd (1983), A., Option Pricing, Homewood III, Irwin.
Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets," Review of Economic and Statistics, 47, 13-37.
Modigliani, F. and Miller, M.H. (1958), "The Cost of Capital, Corporation Finance and The Theory of Investment," The American Economic Review, XLVIII(3), 262-297.
Myers, S. C.(1977), "Determinants of Corporate Borrowing," Journal of Financial Economics, 5.,147-175.
Sharpe, W. F.(1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," Journal of Finance, 19, 425-442.