

## 2차원 지진해일 전파 수치모형의 분산보정 Dispersion-Correction of 2-D Numerical Model for Tsunami Propagation

윤성범<sup>1</sup>, 임채호<sup>2</sup>, 유정구<sup>3</sup>

Sung Bum Yoon<sup>1</sup>, Chae Ho Lim<sup>2</sup> and Jung Gu Yu<sup>3</sup>

### 1. 서 론

Imamura et al.(1988), Liu et al.(1995) 및 Cho(1995)는 선형 천수방정식의 leap-frog 유한차분기법에 대해 일정수심에서 수치적인 분산오차가 실제적인 분산효과를 대신하기 위해 수심, 격자간격 및 계산시간간격 간의 관계식을 유도하여 사용하였다. 일반적으로 지진해일은 수심이 수 km인 곳으로부터 발생되어 해안으로 전파되므로 분산효과를 정도 높게 고려하기 위해서는 수심이 연속적으로 감소함에 따라 격자간격도 연속적으로 작아져야 한다. 그러나 유한차분법의 특성상 2차원 전파의 경우 하나의 계산영역 내에서는 격자간격을 자유롭게 조절하지 못하므로 수심이 변하는 실제 지형에 대해서는 이러한 개념의 적용이 곤란하다. 이에 윤(1999), 윤 등(2002) 및 Yoon(2002)은 Imamura et al.(1988)의 유한차분모형을 개선하여 수심이 완만히 변하는 지역에 대해서도 균일격자상에서 분산을 고려할 수 있는 유한차분모형을 개발하고, 동해에서 발생했던 1983년 동해중부 지진해일에 적용하였다. 이 완변수심상 분산보정 유한차분 수치기법은 수치해석시 실제 격자상의 격자간격을 사용하지 않고 수치분산이 물리적인 분산을 대신하기 위한 가상의 격자간격을 사용하고, 천수방정식의 선유량과 수면변위를 가상 격자점에서의 값으로 환산하기 위해 3차 보간을 수행한다. 그러므로 매우 짧은 파에 대해서는 보간에 따른 추가적인 오차를 주는 경향이 있다. 또한 수심이 큰 곳에서는

큰 격자를 사용하므로 세밀한 지형의 변화를 놓칠 수 있다. 그러므로 간단한 파동방정식과 균일 격자를 사용하면서도 넓은 범위의 완변수심에 대해 모든 방향으로의 물리적 분산효과를 국부적으로 만족시키면서, 보간에 따른 오차를 최소화 할 수 있으며 지형변화를 좀 더 충실히 반영할 수 있는 지진해일 전파 유한차분모형의 분산보정기법을 개발한다면 정도 높은 수치계산이 가능할 것으로 판단된다.

본 연구에서는 Krenk(2001)가 제안한 파동방정식의 인위적인 분산항을 이용하여 수치기법이 복잡한 Boussinesq 방정식 대신 간단한 파동방정식을 이용하면서도 지진해일 전파시 요구되는 물리적인 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있는 새로운 분산보정기법과 대각선 방향에 대한 분산보정항을 제시하고, 수치해와 해석해의 비교를 통해 개발된 지진해일 전파 유한차분 수치모형의 정확성을 검토하고자 한다.

### 2. 지배방정식

지진해일파는 조석에 비하여 파장이 짧아 상대적으로 분산성이 강하므로 먼 거리를 전파하는 경우에는 분산성을 고려하여 해석하여야 한다. 또한 수심이 매우 작은 해안 인접해역을 제외하면 대부분의 해역에서 수심에 비해 수면변위가 매우 미소하므로 비선형성을 무시할 수 있다. 천수에서 약한 분산효과를 고려한 식으로는 2차원 선형 Boussinesq 방정식이 있다.

1 한양대학교 공학대학 토목·환경공학과 교수  
2 한양대학교 공학대학 토목·환경공학과 박사과정  
3 한양대학교 공학대학 토목·환경공학과 석사과정

지진해일 전파의 원래 지배방정식인 선형 Boussinesq 방정식을 수심이 상대적으로 작고 일정한 장파조건( $kh < \pi/10$ )하에서 합성하면 다음과 같은 2차원 약분산형 파동방정식(wave equation)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{C_o^2 h^2}{3} \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \quad (1) \\ & = O(k^6 h^6) \end{aligned}$$

여기서  $\zeta$ 는 정수면으로부터의 수면변위(m),  $C_o (= \sqrt{gh})$ 는 2차원 파동방정식의 전파속도(m/s)이고,  $g$ 는 중력가속도( $m/s^2$ ),  $h$ 는 정수면으로부터 바닥까지의 수심(m),  $k$ 는 파수(wave number)이며, 3번째항은 물리적인 분산항을 의미한다.

이 식을 이용한 수치모형은 수치분산오차를 줄이기 위해 매우 작은 격자를 사용해야 하므로 계산시간이 과도하게 증가된다. 이로 인해 지진해일 전파 수치모형은 일반적으로 Boussinesq 방정식 대신 수치해석이 비교적 단순한 방정식을 사용하고, 수치해석시 발생하는 수치분산오차를 이용하여 물리적인 분산효과를 얻고 있다.

한편 Krenk(2001)는 천수 파동방정식의 수치분산을 제거하기 위해 식 (2)와 같이 인위적인 분산항을 추가하였다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ & + \gamma C_o^2 \Delta x^2 \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

여기서  $\gamma$ 는 수치분산을 제거하기 위한 분산보정계수이다. 식 (2)에 포함된 4차 공간미분항을 시간에 대하여 2단계로 나누어 2차 공간미분항으로 줄이면 식 (3)과 (4)로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C_o^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - \gamma \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

여기서  $v$ 는 임시변수이다. 식 (4)를 시간에 대해 1차 미분하고, 식 (3)을 대입하여 정리하면 식

(2)를 얻을 수 있으므로 식 (3)과 (4)의 해는 식 (2)의 해와 같아지며, 식 (2)와는 달리 공간미분항이 2차이므로 비교적 쉽게 차별화할 수 있는 장점이 있다.

### 3. 파동방정식의 유한차분화

Liu et al.(1995) 및 Cho(1995)는 Abbott et al.(1981)의 방법을 도입하여 천수방정식의 유한차분식에 의한 수치분산이 모든 방향에 대해 같게 나타나도록 균일격자( $\Delta x = \Delta y$ )와 일정수심에 대해 격자 대각선 방향 분산보정항을 추가한 바 있으며, 본 연구에서도 비슷한 개념을 도입하여 다음과 같은 격자 대각선 방향 분산보정항을 식 (5)와 같이 추가하였다.

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j}^{n+1/2} - v_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} \\ & - C_o^2 \left[ (1-\alpha) \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\zeta_{i+1,j-1}^n - 2\zeta_{i,j-1}^n + \zeta_{i-1,j-1}^n}{\Delta x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta_{i+1,j+1}^n - 2\zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i-1,j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\zeta_{i-1,j+1}^n - 2\zeta_{i-1,j}^n + \zeta_{i-1,j-1}^n}{\Delta y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta_{i+1,j+1}^n - 2\zeta_{i+1,j}^n + \zeta_{i+1,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} - v_{i,j}^{n+1/2} \\ & + \gamma \Delta x^2 \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1/2} - 2v_{i,j}^{n+1/2} + v_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{v_{i,j+1}^{n+1/2} - 2v_{i,j}^{n+1/2} + v_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2} \right) = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

여기서  $\zeta$ 와  $v$ 는 시간단계가 엇갈려 배치되고,  $\alpha$ 는 대각선 방향 분산보정계수이다. 이 유한차분식은 수치분산에 의해 파동방정식에 추가된 인위적인 분산항 이외에도 없었던 분산이 발생하게 되며 그 분산효과는 다음과 같이 식 (5)와 (6)을 Taylor 급수 전개한 다음 합성하여 변형방

정식(modified equation)을 구함으로써 파악할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{1}{12} C_o^2 \Delta x^2 (1 - 12\gamma - C_o^2) \cdot \\ & \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \quad (7) \\ & - C_o^2 \Delta x^2 \left( \alpha - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & = O(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta t, \Delta x \Delta t^2, \Delta t^3) \end{aligned}$$

여기서  $C_r (= C_o \Delta t / \Delta x)$ 은 Courant number이다. 식 (5)와 (6)으로부터 식 (7)의 유도에는 수심  $h$ 가 일정하고, 격자간격  $\Delta x$ 와  $\Delta y$ 가 동일하다는 가정이 이용되었다. 식 (7)의 3번째항과 식 (1)의 3번째항이 같아지도록 분산보정계수  $\gamma$ 를 결정하고, 대각선 방향 보정계수  $\alpha$ 를 1/6로 놓아 대각선 방향에 대한 분산오차항을 제거하면 식 (7)은 선형 Boussinesq 방정식 (1)과 같아지게 되므로 모든 방향으로의 물리적인 분산효과를 고려할 수 있게 된다. 그러므로 분산보정계수  $\gamma$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\gamma = \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left( \frac{\Delta x_{Im}}{\Delta x} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

여기서  $\Delta x_{Im}$ 은 Imamura et al.(1988)의 선형 천수방정식 leap-frog 유한차분모형에서 수치분산을 이용하기 위한 격자간격으로 식 (9)와 같다.

$$\Delta x_{Im} = \sqrt{4h^2 + gh \Delta t^2} \quad (9)$$

격자간격  $\Delta x$ 를  $\Delta x_{Im}$ 과 같게 선정하면 Imamura et al.(1988) 및 Cho(1995)가 제시한 분산보정 조건과 같아지며  $\gamma$ 는 자동적으로 0.0이 되므로 분산보정항이 불필요하게 된다. 이와 같이 종래의 분산보정 유한차분 수치모형이 격자크기를 조정하여 분산효과를 얻고 있으나, 이 방법은 수심이 변하는 실제 지형에 대해서는  $\Delta x_{Im}$ 가 변하므로 적용이 불가능하다. 그러므로 본 연구에서 제안한 바와 같이 주어진 수심  $h$ , 시간간격  $\Delta t$  그리고 격자간격  $\Delta x$ 에 대한 분산보정계수  $\gamma$ 를 구하고, 대각선 방향 보정계수  $\alpha (=1/6)$

와 함께 지진해일 전파 수치모의에 적용한다면 균일한 격자간격과 계산시간간격을 사용하면서도 완만히 수심이 변하는 경우에 대해 모든 방향으로의 분산효과가 국부적으로 만족된다.

#### 4. 분산보정 수치모형의 검증

본 연구에서 개발된 분산오차 보정기법의 정확성을 검증하기 위하여 초기 수면변위가 Gauss 분포를 가진 가상진원에 의해 발생된 지진해일의 전파에 대하여 2차원 수치모의를 행하고, Carrier(1991)에 의한 선형 Boussinesq 방정식의 해석해와 비교하였다. 초기 수면변위로 주어진 Gauss 분포는 Fig. 1과 같다.

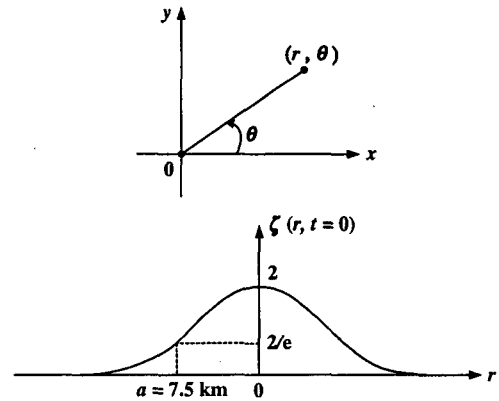


Fig. 1. Coordinate system and initial free surface profile to test the accuracy of present numerical scheme.

수치모의에 사용된 격자간격  $\Delta x$ 는 2086m이고, 시간간격  $\Delta t$ 는 6초이다. 수심  $h$ 는 500m, 1500m의 2가지 경우에 대해 수행하였다. Fig. 2와 Fig. 3은 본 연구에서 제안한 분산보정계수  $\gamma$ 와 대각선 방향 보정계수  $\alpha$ 의 적용 유무에 따른 수치모의 결과를 각각 해석해와 비교한 것으로, Gauss 분포의 초기 수면형상의 중심으로부터  $150 \Delta x (r=312,900m)$  떨어진 위치에서 도달 시간에 따른 수면변위를 나타낸 것이다.

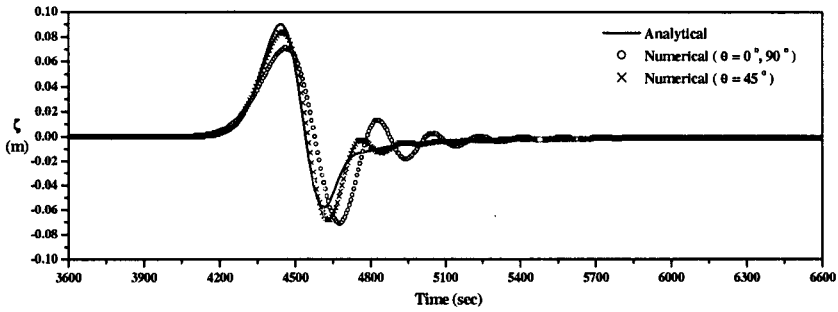
Fig. 2는 수심이 500m인 경우 Gauss 분포의 초기 수면형상에 대한 수치해와 해석해를 비교한 것으로 사용된 격자간격  $\Delta x (=2086m)$ 가 식 (9)에 의해 계산된  $\Delta x_{Im} (=1085m)$ 보다 커서 Fig. 2(a)에 나타낸 바와 같이 분산보정계수  $\gamma$ 와  $\alpha$ 를 적용

하지 않은 경우( $\gamma=0.0$ ,  $\alpha=0.0$ )는 수치해가 해석해보다 분산이 과대평가 되었으며, 격자 대각선 방향에 대해서도 분산보정이 이루어지지 않아 대각선 방향이 주축 방향에 비해 분산이 작게 발생하였다. 반면 본 연구에서 제안한 분산보정 계수를 적용한 경우( $\gamma=0.061$ ,  $\alpha=1/6$ )는 Fig. 2(b)에 보인 바와 같이 모든 방향으로의 분산이 옹게 고려되어 해석해와 잘 일치하는 좋은 결과를 보인다.

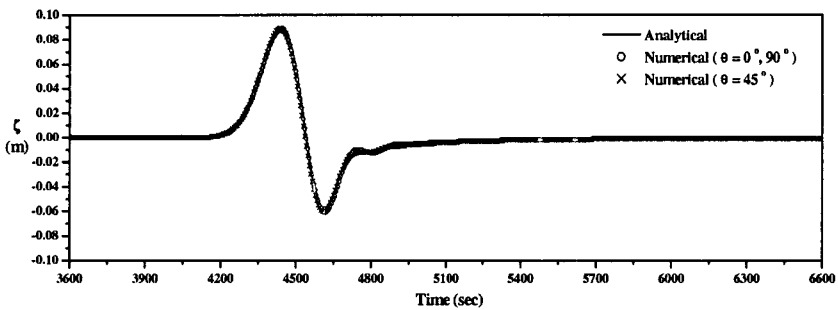
Fig. 3은 수심이 1500m인 경우로서 Fig. 2에 제시된 경우와 반대로 수치모의에 사용된 격자 간격  $\Delta x(=2086m)$ 가 식 (9)에 의한 격자간격  $\Delta x_{lm}(=3087m)$ 보다 작아 Fig. 3(a)에 나타난 바와 같이 모든 방향에 대해 분산보정을 무시한 경우 ( $\gamma=0.0$ ,  $\alpha=0.0$ )는 각 방향의 수치해가 해석해보

다 분산이 과소평가 되었으며, 대각선 방향의 분산이 주축 방향에 비해 작게 계산되었다. 그러나 본 연구의 수치모형( $\gamma=-0.099$ ,  $\alpha=1/6$ )에 의한 결과는 Fig. 3(b)에 나타난 바와 같이 방향에 상관없이 분산정도가 해석해와 매우 잘 일치하고 있다.

이상의 수치모의 결과를 종합해 보면 대각선 보정을 수행하지 않으면 즉  $\alpha$ 가 0.0인 경우는 대각선 방향으로의 분산효과가 주축 방향에 비해 과소하게 평가됨을 알 수 있다. 그러나 본 연구의 유한차분모형은 격자간격이 식 (9)를 만족시키지 않을 경우에도 모든 방향에 대해 분산관계를 만족시켜 정도 높은 수치모의를 가능케 해준다.

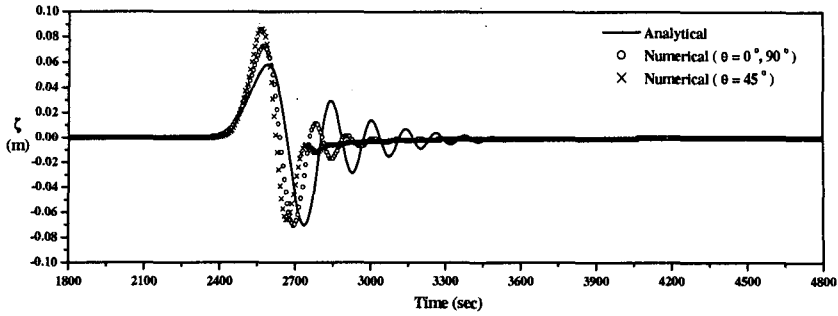


(a) Dispersion-correction neglected ( $\gamma=0.0$ ,  $\alpha=0.0$ )

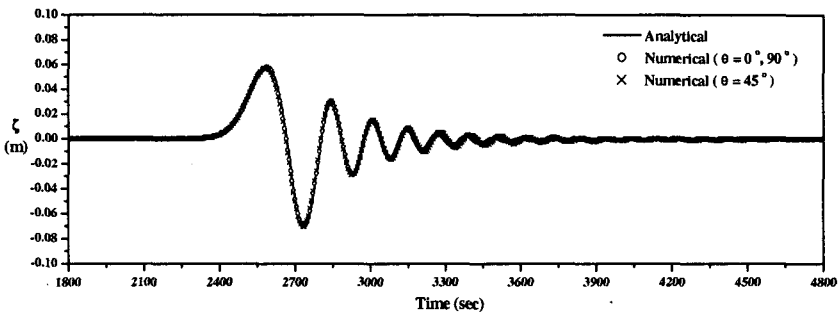


(b) Dispersion-correction in all directions included ( $\gamma=0.061$ ,  $\alpha=1/6$ )

Fig. 2. Comparison of calculated and analytical free surface displacements for the case of  $h=500m$  ( $\Delta x_{lm}=1085m$ ,  $\Delta x=2086m$ ).



(a) Dispersion-correction neglected ( $\gamma=0.0$ ,  $\alpha=0.0$ )



(c) Dispersion-correction in all directions included ( $\gamma=-0.099$ ,  $\alpha=1/6$ )

Fig. 3. Comparison of calculated and analytical free surface displacements for the case of  $h=1500\text{m}$  ( $\Delta x_{lm}=3087\text{m}$ ,  $\Delta x=2086\text{m}$ ).

## 5. 결 론

수심이 완만하지만 상당히 변하는 해역을 전파하는 지진해일을 정도 높게 수치모의하기 위해 선형 천수 파동방정식과 균일격자를 이용하면서도 Boussinesq 방정식에서와 같은 물리적 분산효과를 얻을 수 있는 새로운 2차원 유한차분 수치모형이 개발되었다. 본 연구에서 개발된 새로운 수치모형은 보간에 따른 오차를 최소화할 수 있고 지형변화를 좀 더 충실히 반영하면서도 수심이 변하는 경우에도 국부적으로 모든 방향에 대해 물리적 분산효과를 옳게 고려할 수 있다. 그러므로 격자간격을 자유롭게 조절할 수 있는 유한요소모형과 같은 정도의 수치모의가 가능하며, 계산이 유한요소모형에 비해 상대적으로 간단하므로 전산기억용량 및 계산시간 면에서 매우 경제적이다. Gauss 분포의 초기 수면형상에

대한 2차원 전파과정을 본 연구에서 개발된 수치모형을 이용하여 수치모의한 결과를 해석해와 비교한 결과 격자간격과 시간간격이 고정되었음에도 불구하고 다양한 수심에 대해 해석해와 거의 일치하는 좋은 결과를 보였다.

## 감사의 글

본 연구는 기상청 기상연구소의 특정사업 '지진 예지 및 지진해일 예측기술 개발'의 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

윤성범 (1999). 완변수심상 지진해일 전파 2차원 유한차분모형의 분산보정. 대한토목학회논문집, 19(II-6), 695-703.

- 윤성범, 임채호, 조용식, 최철순 (2002). 지진해일 전 파 분산보정 유한차분모형의 정밀도 평가. 한국 해안해양공학회지, 14(2), 116-127.
- Abbott, M.B., McCowan, A.D. and Warren, I.R. (1981). Numerical modeling of free-surface flows that are two-dimensional in plan. in *Transport Models for Inland and Coastal Waters*, edited by H.B. Fisher, Academic Press, 222-283.
- Carrier, G.F. (1991). Tsunami propagation from a finite source. Proc. of 2nd UJNR Tsunami Workshop, NGDC, Hawaii, 101-115.
- Cho, Y.-S. (1995). Numerical Simulations of Tsunami Propagation and Run-up. Ph.D. Thesis, School of Civil and Env. Engrg., Cornell University, Ithaca, NY.
- Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C. (1988). Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis. Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan, 265-271.
- Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C. (1988). Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis. Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan, 265-271.
- Krenk, S. (2001). Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191, 975-987.
- Liu, P.L-F., Cho, Y.-S., Yoon, S.B. and Seo, S.N. (1995). Numerical simulations of the 1960 Chilean tsunami propagation and inundation at Hilo, Hawaii. *Tsunami : Progress in Prediction, Disaster Prevention and Warning*, edited by Tsuchiya and Shuto, Kluwer Academic Publishers, 99-115.
- Yoon, S.B. (2002). Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography. *J. Geophys. Res.*, 107(C10), 4(1)-4(11).