

## 확장형 Boussinesq 방정식의 유한요소모형 개발 II : 시간적분기법의 적용과 모형의 검증

### Development of Finite Element Method for the Extended Boussinesq Equations II : Implementation of Time Integration and Model validation

우승범<sup>1</sup>, 최병호<sup>2</sup>,

Seung Buhm Woo<sup>1</sup> and Byung Ho Choi<sup>2</sup>

#### 1. 서 론

표준형 Boussinesq 방정식에 대해서는 지난 10여년간 다수의 연구자들에 유한요소모형이 개발되었다. (Katopodes 와 Wu 1987; Antunes do Carmo 등 1993; Kawahara 와 Cheng 1994; Langtangen 와 Pedersen 1996; Antunes do Carmo 와 Seabra Santos 1996; Ambrosi 와 Quartapelle 1998). 이들 수치모형들은 시간적분방법과 보간함수를 사용한 방법에 따라 주된 차이를 보이고 있다. 표준형 Boussinesq 방정식의 최고차 공간 미분항은 단지 2차이므로 일반적으로 널리 알려진 선형 Galerkin 유한요소 방법과 경계조건을 적용시키는 것에 큰 어려움이 없다. 지금까지 알려진 표준형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형은 주로 선형 삼각형 요소나 선형 사각형요소를 사용했다.

본 연구의 주 목적은 Nwogu 의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 보다 효율적이고 정확한 유한요소모형을 개발하는 것이며, 또한 수치해석기법의 개발에 있어서 완전비선형 Boussinesq 방정식에의 확장이 용이해야 하는 것이다. 이를 위해 다양한 방법이 고려되었는데, 먼저 일차원 문제에서 개발되었던 Petrov-Galerkin 방법의 적용을 조사하였다. Petrov-Galerkin 방법을 이차원 문제로 확장하는 것은 이론적으로 큰 어려움이 없지만 이를 위해서는 2차원 요소의 경계에서 고차의 미분항이 연속이 되는 spline 요소를 사용할 수 있

어야 한다. 물론 구조형 가변 사변형 요소를 사용하는 것이 가능하나 (Gardner 와 Gardner, 1995), 이 방법은 격자가 구조적이어야만 하므로 비구조 격자를 사용하는 유한요소모형에의 적용은 불가능하다. 2차원 비구조 격자에서  $C^1$  형의 요소를 구성하고자 하는 노력은 최근에 시도되었으나 (Alfeld 등 1987; Sabin 1997), 아직까지 계산상의 비효율성을 개선하려면 많은 노력이 필요하며 또 복잡한 형상에서는 격자를 만드는 데에도 어느 정도 제약이 생길 수밖에 없다. 따라서 Petrov-Galerkin 방법을 2차원 문제에 직접적으로 적용시키는 것은 현실적으로 매우 어려운 과제이며 이러한 방향으로의 노력은 바람직하지 못하다는 판단을 하였다.

대신 일반적인 선형 Galerkin 방법을 사용하고 자 하였다. 이러한 방향으로 수치모형을 개발했을 경우, 선형 삼각형 및 사변형요소를 사용하는 것이 용이해진다. 지배방정식에 존재하는 고차 공간미분항의 차수를 줄이기 위해 추가변수의 도입이 불가피하지만, 추가변수와 시간적분방법의 선택이 적절할 경우 2차원 Petrov-Galerkin 방법보다 수치 계산의 수행이 보다 효율적이다. 추가변수는 계산의 효율성, 경계조건 처리 그리고 완전 비선형 Boussinesq 방정식에서의 확장 가능성 등을 염두에 두고 선택되었다.

유한요소모형의 추가변수와 경계조건에 대해 기술한 전편의 논문 (우와 최, 2004)에 이어 본 논문

1 인하대학교 해양학과 전임강사

2 성균관대학교 토목환경공학과 교수

에서는 Galerkin 방법에 기초한 공간근사와 시간적분방법, 그리고 수립된 모형의 검증결과를 기술하였고 기존에 제시된 다른 수치모형의 결과와 해석해 및 수리실험 자료와 비교하여 현 수치모형의 정확도와 안정성을 검증하였다. 부록에는 행렬계산에 사용된 자세한 행렬식과 벡터식을 기술하였다.

## 2. 행렬계산식의 수립

전편의 논문 (우와 최, 2004)에서 수립된 지배방정식과 추가변수에 대한 weak form 에서의 각 변수들은 보간함수 ( $\psi_j(x, y)$ ) 와 각 변수의 노드값과의 선형조합으로써 근사화 되며 다음과 같이 기술된다.

$$F(x, y, n\Delta t) \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{F\}_j^n \quad (1)$$

$$E(x, y, n\Delta t) \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{E\}_j^n \quad (2)$$

여기서  $F = \{\eta, u_a, v_a\}$ ,  $E = \{E_1, E_2\}$  이며 'ND' 는 영역에서의 총 노드의 개수, 그리고  $n=0, 1, 2, \dots$  는 time level 를 나타낸다. 마찬가지로 방법으로 수심과 수심의 경사도 각 노드의 수심값과 보간함수의 선형 조합으로써 근사화 된다. 본 수치해석 방법에서는 Galerkin 가중간차 방법을 사용하므로 가중함수 ( $W(x, y)$ ) 는 보간함수 ( $\psi(x, y)$ ) 와 동일한 함수를 사용하게 된다.

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^\eta]_{i,j} \{\eta\}_j^n = \{f^\eta\}_i^n + \{q^\eta\}_i^n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^u]_{i,j} \{u\}_j^n = \{f^u\}_i^n + \{q^u\}_i^n \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^v]_{i,j} \{v\}_j^n = \{f^v\}_i^n + \{q^v\}_i^n \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{E_1}]_{i,j} \{E_1\}_j^n = \{f^{E_1}\}_i^n + \{q^{E_1}\}_i^n \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{E_2}]_{i,j} \{E_2\}_j^n = \{f^{E_2}\}_i^n + \{q^{E_2}\}_i^n \quad (7)$$

여기서  $i=1, 2, \dots, ND$  이고  $F = \{\eta, u_a, v_a\}$  를 나타낸다. 이 행렬식의 자세한 식은 부록에 기술하였다.

### 2.1 요소와 보간함수

2차원 유한요소해석에서의 공간근사방법은 먼저 전체 계산영역 ( $\Omega$ ) 를 서로 겹치지 않는  $N$

개의 작은 영역으로 분할 한다. 작은 영역의 형태는 다양할 수 있으나 본 연구에서는 선형 삼각형 요소와 사변형 요소를 사용하였다. 삼각형 요소는 복잡한 경계를 잘 재현할 수 있고 원하는 계산영역에 자세한 격자를 구성하기에 용이하므로 유한요소해석에서 가장 일반적으로 사용되고 있다. 각 노드는 삼각형 요소의 각 꼭지점에 위치하며 다음과 같은 수학적 특성을 갖는 Lagrange 보간함수로써 정의된다.

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (8)$$

여기서  $\delta_{i,j}$  는 Dirac delta 함수이다. 각각의 삼각형 요소에는 ( $\Omega_e$ ) 선형함수일 경우 3개의 보간함수 ( $\psi_1^e, \psi_2^e, \psi_3^e$ ) 가 정의된다.

### 2.2 시간적분방법

시간적분기법의 정확도는 공간근사기법의 정확도만큼 확보되어야 수치오차에서 발생하는 물리적 근거가 없는 수치분산이나 수치 소산 현상을 줄일 수 있다. 이번 절에서는 식 (3) ~ (7)을 Adams-Bashforth-Mouton Predictor-Corrector 방법을 이용하여 시간적분하는 방법을 기술한다. 이 수치기법은 확장형 Boussinesq 수치모형에 비교적 널리 사용되는 방법으로써 그 기본적인 개념은 다음과 같다. 먼저 현 time step 에서의 값을 기초로 다음 step 에서의 값을 예측한다. (Predictor 단계) 이렇게 예측된 값은 지배방정식의 우변에 대입되어 좀더 개선된 (즉 "corrected") 값으로 변환된다. (Corrector 단계) 이렇게 개선된 수치해는 다시 지배방정식의 우변에 대입되어 또 다시 개선된 값을 구하게 되며 이 값과 이 전 단계에서 구했던 수정된 값과의 비교를 통해 그 비교 오차가 허용범위 안에 들어올 때까지 반복하게 된다. (Lapidus 와 Seinfeld 1971).

본 연구에서는 3차의 Adams-Bashforth 방법이 Predictor 단계에 사용되었다.

$$\begin{aligned} P[\eta]: [M^\eta]_{ij} & \left( \frac{\{\eta\}_{j0}^{n+1} - \{\eta\}_j^n}{\Delta t} \right) \\ & = \frac{1}{12} [23 \{f^\eta\}_i^n - 16 \{f^\eta\}_i^{n-1} + 5 \{f^\eta\}_i^{n-2}] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P[u_a]: [M^u]_{ij} & \left( \frac{\{u\}_{j0}^{n+1} - \{u\}_j^n}{\Delta t} \right) \\ & = \frac{1}{12} [23 \{f^u\}_i^n - 16 \{f^u\}_i^{n-1} + 5 \{f^u\}_i^{n-2}] \end{aligned} \quad (10)$$

$$P[v_s]: [M^n]_{ij} \left( \frac{(v)_{j(0)}^{n+1} - (v)_j^n}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{1}{12} [23 \{f^n\}_i^n - 16 \{f^n\}_i^{n-1} + 5 \{f^n\}_i^{n-2}] \quad (11)$$

여기서 우변의 벡터들,  $\{f^n\}$ ,  $\{f^n\}$  는 각각 유속의 시간미분항을 포함하며  $\{f^n\}$  에  $\{v\}$  이 존재하고  $\{f^n\}$  에  $\{u\}$  이 존재하고 있다는 점에 유의한다. Predictor 단계에서는 이 시간미분항들이 다음과 같은 방법에 의해 근사화 된다.

$$\{r\}_i^n = \frac{1}{2\Delta t} [3\{r\}_i^n - 4\{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (12)$$

$$\{r\}_i^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t} [\{r\}_i^n - \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (13)$$

$$\{r\}_i^{n-2} = -\frac{1}{2\Delta t} [3\{r\}_i^{n-2} - 4\{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^n] + O(\Delta t^2) \quad (14)$$

여기서  $\{r\}$  은  $\{u\}$  또는  $\{v\}$  를 나타낸다. 식 (9), (10)과 (11)을 풀고 나면 j 노드의 (n+1)

time step 에 대한  $\{\eta\}_{j(0)}^{n+1}$ ,  $\{u\}_{j(0)}^{n+1}$ ,  $\{v\}_{j(0)}^{n+1}$  의 첫 번째 Predictor 값을 얻게 된다. 이 값들을 이용하여 (n+1) time step 에서의 추가 변수의 값들이 식 (6)와 (7)을 이용하여 구해진다. 즉,

$$\{E_1\}_{j(0)}^{n+1} = [M^{E_1}]_{ij}^{-1} \{f^{E_1}\}_{j(0)}^{n+1} \quad (15)$$

$$\{E_2\}_{j(0)}^{n+1} = [M^{E_2}]_{ij}^{-1} \{f^{E_2}\}_{j(0)}^{n+1} \quad (16)$$

Corrector 단계에서 우변 벡터를 갱신하기 위해서는 우변 벡터에 포함되어 있는 시간 미분항들을 다음과 같은 수치 기법을 이용하여 근사화시키는 것이 필요하다.

$$\{r\}_{j(0)}^{n+1}$$

$$= \frac{1}{6\Delta t} [11\{r\}_{j(0)}^{n+1} - 18\{r\}_j^n + 9\{r\}_j^{n-1} - 2\{r\}_j^{n-2}] + O(\Delta t^2)$$

$$\{r\}_{j(0)}^n$$

$$= \frac{1}{6\Delta t} [2\{r\}_{j(0)}^{n+1} - 3\{r\}_j^n - 6\{r\}_j^{n-1} + \{r\}_j^{n-2}] + O(\Delta t^2)$$

$$\{r\}_{j(0)}^{n-1}$$

$$= \frac{1}{6\Delta t} [-\{r\}_{j(0)}^{n+1} + 6\{r\}_j^n - 3\{r\}_j^{n-1} - 2\{r\}_j^{n-2}] + O(\Delta t^2)$$

$$\{r\}_{j(0)}^{n-2}$$

$$= \frac{1}{6\Delta t} [2\{r\}_{j(0)}^{n+1} - 9\{r\}_j^n + 18\{r\}_j^{n-1} - 11\{r\}_j^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (17)$$

(n+1) time step 에서 우변의 벡터 즉,

$\{f^n\}_{j(0)}^{n+1}$ ,  $\{f^n\}_{j(0)}^{n+1}$ ,  $\{f^n\}_{j(0)}^{n+1}$  들이 갱신된 후에 corrected 된 해는 4차의 Adams-Moulton Corrector 기법 (Lapidus 와 Seinfeld, 1971)을 이용하여 구할 수 있다. 반복적인 일련의 단계는 다음과 같이 설명된다. 먼저 s (s=1,2,...)가 반복단계의 횟수를 표시한다고 할 때 s 번째의 수정된 값  $\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$  를 구하기 위해서 질량 보존 방정식은 다음과 같이 수치 적분된다.

$$C[\eta] : \{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$$

$$= \{\eta\}_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M^n]_{ij}^{-1} (9\{f^n\}_{j(s-1)}^{n+1} + 19\{f^n\}_i^n - 5\{f^n\}_i^{n-1} + \{f^n\}_i^{n-2}) \quad (18)$$

다음으로  $\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$ ,  $\{u\}_{j(s-1)}^{n+1}$ ,  $\{v\}_{j(s-1)}^{n+1}$  를 이용하여 우변 벡터  $\{f^n\}_{j(s-1)}^{n+1}$  를 갱신하고 u 에 대한 운동량 방정식을 다음과 같이 수치 적분한다.

$$C[u_s] : \{u\}_{j(s)}^{n+1}$$

$$= \{u\}_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M^u]_{ij}^{-1} (9\{f^u\}_{j(s-1)}^{n+1} + 19\{f^u\}_i^n - 5\{f^u\}_i^{n-1} + \{f^u\}_i^{n-2}) \quad (19)$$

마찬가지로  $\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$ ,  $\{u\}_{j(s)}^{n+1}$ ,  $\{v\}_{j(s-1)}^{n+1}$  를 이용하여 우변 벡터  $\{f^n\}_{j(s-1)}^{n+1}$  를 갱신하고 v 에 대한 운동량 방정식을 다음과 같이 수치 적분한다.

$$C[v_s] : \{v\}_{j(s)}^{n+1}$$

$$= \{v\}_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M^v]_{ij}^{-1} (9\{f^v\}_{j(s-1)}^{n+1} + 19\{f^v\}_i^n - 5\{f^v\}_i^{n-1} + \{f^v\}_i^{n-2}) \quad (20)$$

만약 다음 수정 단계가 필요하다면 각각  $\{u\}_{j(s)}^{n+1}$ ,  $\{v\}_{j(s)}^{n+1}$  를 이용하여 추가변수에 대한 우변 벡터  $\{f^{E_1}\}_{j(s)}^{n+1}$ ,  $\{f^{E_2}\}_{j(s)}^{n+1}$  를 갱신하고 식 (6)와 (7)을 풀어  $\{E_1\}_{j(s)}^{n+1}$  과  $\{E_2\}_{j(s)}^{n+1}$  을 구하게 된다.

연이은 수정 단계에서의  $\eta$ ,  $u$ ,  $v$  에 대한 상대오차는 다음과 같이 각각 정의된다.

$$\Delta e_\eta = \max \left( \frac{\{\eta\}_{j(s)}^{n+1} - \{\eta\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}} \right)$$

$$\Delta e_u = \max \left( \frac{\{u\}_{j(s)}^{n+1} - \{u\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{u\}_{j(s)}^{n+1}} \right)$$

$$\Delta e_v = \max \left( \frac{\{v\}_{j(s)}^{n+1} - \{v\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{v\}_{j(s)}^{n+1}} \right) \quad (21)$$

이들 상대오차가  $10^{-4}$  보다 모두 작을 때

까지 Corrector 단계를 반복한다.

### 3. 수치모형의 검증

수립된 수치모형은 기존의 수리모형 실험 결과, 해석해, 그리고 다른 수치모형의 해와 비교함으로써 그 정확성을 검증하였다. 각각의 수치실험은 특정한 물리 현상에 대한 수치모형의 결과를 나타낸다.

#### 3.1 일정수심에서 고립파의 전파

먼저 본 모형의 비선형과 분산성과의 조화를 검토하기 위하여 일정수심에서 고립파의 전파에 대한 실험을 수행하였다. 경계조건으로 인한 복잡성을 피하기 위하여, 해석해로부터 구한 자유표면의 형상과 이에 따른 유속의 분포를 계산영역 내부에 초기조건으로써 적용하였다. 해석해는 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 고립파의 해석해를 (Wei 와 Kirby, 1995)를 이용하였다.

Fig. 1은 일정 수심 1 m 에서 파고 0.1 m 를 갖는 ( $\epsilon=0.1$ ) 고립파의 전파에 대한 모습을 나타내고 있다. 고립파의 파봉은 초기 조건에서  $x=0$  에 위치하였으며 따라서 그림 3.3.1(b)에서는 고립파가 약 수심의 500 배 정도를 전파한 후의 모습을 나타내고 있다. 파가 전파하는 x 방향으로는 약 1000 개의 요소가, y 방향으로는 4개의 요소가 사용되었으며 평균 격자의 크기는  $\Delta x = \Delta y = 0.5m$  이다. 고립파의 파장은 약 30.3 m 에 해당하므로 한 파장 내에 대략 60 개의 요소가 포함되어 있다. Fig 1(b)에 나와있는 바와 같이 수치결과와 해석해와 매우 유사하다.

파고를 증가시켜 0.3 m 로 하였을 경우 ( $\epsilon=0.3$ ) 고립파의 전파는 해석해와 약간의 위상차를 나타낸다. (Fig. 2). 계산된 파속은 해석해에 비해 약간 작고 계산된 파고는 해석해에 비해 약간 큰데 이러한 경향의 수치해석 결과는 기존에 제시된 다른 확장형 Boussinesq 수치모형에서도 동일하게 나타나고 있다. (Wei 와 Kirby 1995; Walkley 와 Berzins 1999; Li 등 1999)

#### 3.2 경사면에서 고립파의 천수현상

일정한 경사를 갖는 경사면에서 쇄파현상이 발생하지 않는 고립파의 천수현상에 대한 수치실험을 통하여 본 모형의 비선형성에 대한 정확도를 검토하였다. 수치실험결과는 Wei 등 (1995) 이 수행한 수리실험과 비교하였다.

계산 영역은  $20 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 0.3$  (m) 이고 y 축 방향으로의 수심변화는 없으며  $-20 \leq x < 0$  (m) 부분에서는 일정수심  $h_0 = 1m$  이고  $0 < x \leq 30$  (m) 에서는 1:35 의 일정경사의 수심을 갖는다. 고립파는  $x=0$  위치에 고립파의 파봉이 위치하는 초기조건으로써 주어진다.

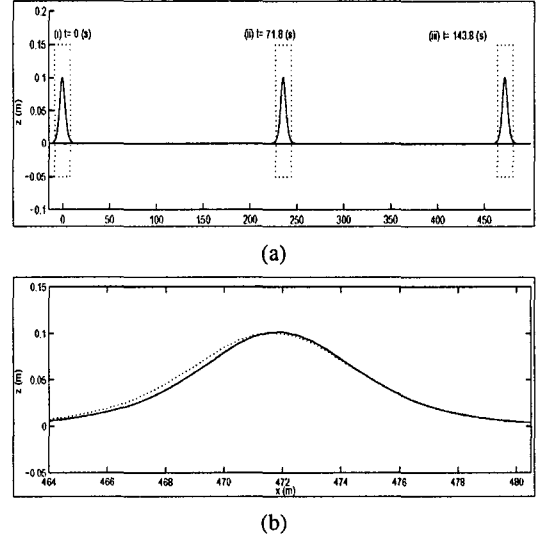


Fig. 1 일정 수심에서 고립파의 전파 ( $a/h = 0.1$ ): (a) 세 지점에서의 파고분포 (b)  $t=143.8$  (sec)에서 수치해 (실선)와 엄밀해 (점선)와 비교

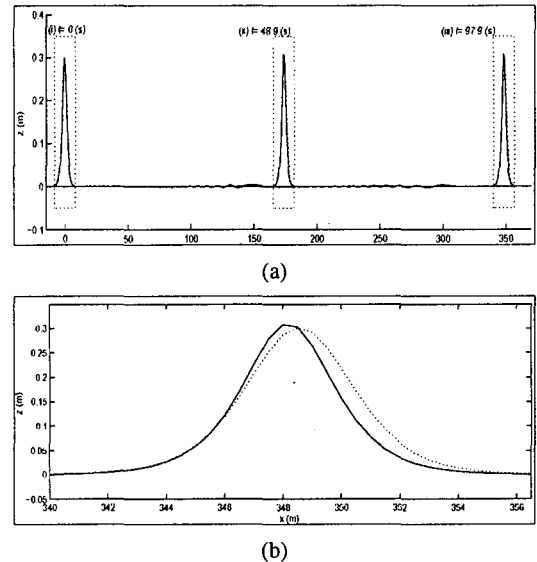


Fig. 2 일정 수심에서 고립파의 전파 ( $a/h = 0.3$ ): (a) 세 지점에서의 파고분포 (b)  $t=97.9$  (sec)에서 수치해 (실선)와 엄밀해 (점선)의 비교

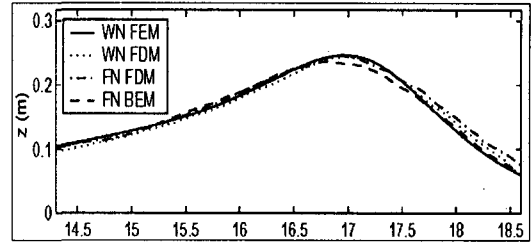
수심은  $x/h_o=10$  에서  $0.71\text{ m}$  이고  $x/h_o=28$  에서  $0.2\text{ m}$  이며 고립파의 파고는  $0.2\text{ m}$  이다. 수치계산에서 크기  $\Delta x=\Delta y=0.1\text{ m}$  를 갖는 삼각형요소를 사용하였고 x 축으로의 요소의 총 개수는 500 개, y 축으로는 3 이며 시간 간격은  $\Delta t=0.02\text{ sec}$  이다. Fig. 3에서 제시된 바와 같이 현 모형의 수치결과는 Nwogu (1993) 의 유한차분모형의 결과와 파고의 크기와 자유수면의 형태면에서 양호한 일치를 보인다.

#### 4. 다양한 경계조건의 적용

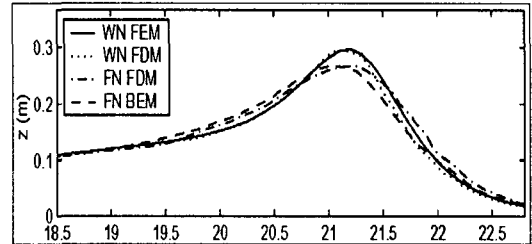
단순한 형태의 수치 수조에서 입사파 경계조건과 완전 반사 경계 조건 그리고 스폰지 층을 테스트하였다. 먼저 완전 반사 경계조건을 검토하기 위해서 Fig. 4에 제시된 바와 같이 양 쪽이 모두 완전 반사 경계조건으로 막혀있는 수로에서 초기 조건으로 주어진 고립파가 자유 전파하도록 하였다. 적용된 완전 반사 경계 조건이 정확하다면 아무리 많은 반사가 발생하더라도 고립파의 파고와 형태에는 변화가 없어야 한다. 계산에 사용된 고립파는  $a/h_o=0.1$  로서 (수심  $h_o=0.45\text{ m}$ )  $t=0$  에서 파봉은  $x=10\text{ m}$  에 위치한다. 계산 영역은  $0\leq x\leq 20, 0\leq y\leq 2\text{ (m)}$  이고 비구조형 삼각형요소를 사용하였다. 계산 영역에서 가장 큰 경계 요소의 크기는 약  $0.25\text{ m}$  이고 총 2240의 요소와 1209의 노드수를 포함한다. 계산 수행시간 동안 ( $0\leq t\leq 95.2\text{ sec}$ ) 고립파는 두 벽 사이를 5번 왕복한다. 그림 3.3.5는 계산 결과를 측면에서 바라본 측면도이며 첨자 (i) 의 위치에서는 초기조건과 5번 왕복 후의 파형을 겹친 그림이다. 여러 번의 반사에도 불구하고 Fig. 5에 제시된 바와 같이 고립파의 파고와 자유수면의 형태는 거의 변하지 않았다. 이로써 완전 반사 경계 조건의 정확성을 확인 수 있다.

Fig. 6은 수로의 왼편에 입사파 조건이 그리고 수로의 오른편에 스폰지 층이 적용된 경우를 나타내고 있다. 계산 영역은  $-10\leq x\leq 30, 0\leq y\leq 0.5\text{ (m)}$  이고 스폰지 층은  $20\leq x\leq 30\text{ (m)}$  에 위치한다. 수심  $0.45\text{ m}$  에서 파고  $0.023\text{ m}$ , 주기  $1\text{ sec}$ , 파장  $0.95\text{ m}$  의 정현파가 입사파 경계조건에서 생성되며 이 파랑에 해당하는  $kh=2.97$  이고  $ka=0.15$  이다.  $\Delta x=\Delta y=0.1\text{ m}$  의 사변형 요소가 사용되었고 시간 간격  $\Delta t=0.02\text{ sec}$  이다. x 축으로 400의 요소가, y 축으로 5개의 요소가 사용되었고 스폰지

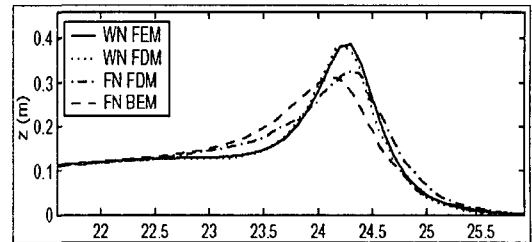
층의 길이는  $10\text{ m}$  이며 사용된 에너지 소산 계수는  $G_1^f=0.25, G_1^{nl}=10, G_1^{l2}=0.5$



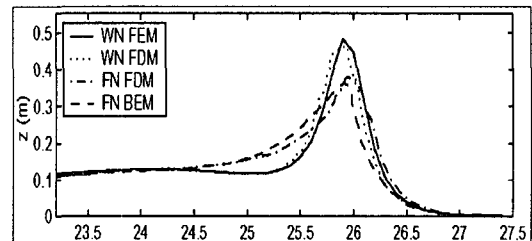
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 3 1:35의 경사면에서 고립파의 천수현상에 대한 기준수치모형과의 비교 (WN FEM: 이번 연구에서 수립된 약비선형 FEM, WN FDM: Nwogu(1993)의 약비선형 FDM, FN FDM: Wei 등(1999)의 강비선형 FDM, FN BEM: Grilli 등의 강비선형 BEM)

$G_2^f = G_2^{nl} = G_2^{l2} = 2$  이다. 이 수치실험은 수조의 왼편에서 정현파가 생성되고 오른편의 스폰지 층에서 파랑이 감쇄된다. 입사파 경계조건과 스폰

지 층 경계 조건이 정확하다면 충분한 시간이 지난 뒤에 수조에는 일정한 크기의 정현파형을 볼 수 있어야 한다.

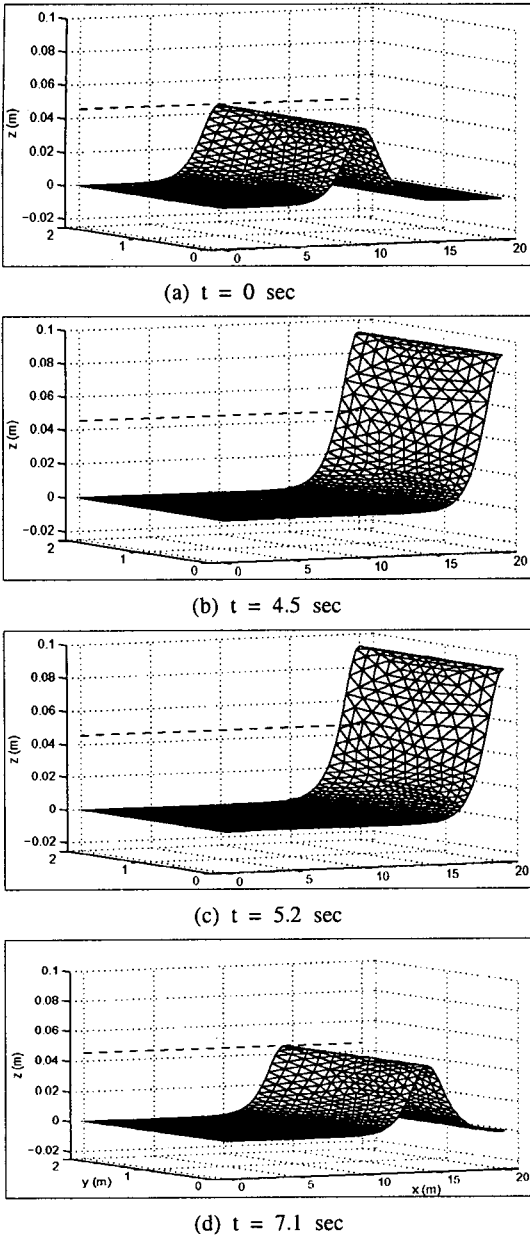


Fig. 4 두 벽면사이에서의 고립파의 거동 (조감도)

수치계산의 처음 1/4 파 주기 동안, 입사파형은 초기의 급작스런 자유수면의 변위를 피하기 위해 수면변위는 지수적으로 매우 부드럽게 증가시켰으며 수면변위에 해당하는 유속을 선형 파랑 이론에서 구해서 경계조건에 적용시켰다. 이 초기 1/4

주기 동안 입사파 경계 주위에서  $2\lambda$ 의 수치적 진동이 발생하였으며, 수치실험시 어떠한 에너지 감쇄 항도 포함시키지 않았었기 때문에 일단 발생된 이 진동은 소멸되지 않고 주 파랑과 함께 전파하다 스폰지 층에서 소멸되었다. 이러한 일련의 과정이 Fig. 6에 잘 재현되어있다.

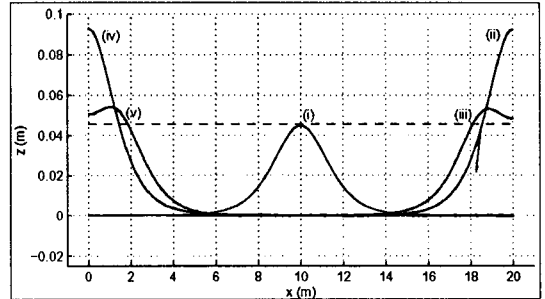
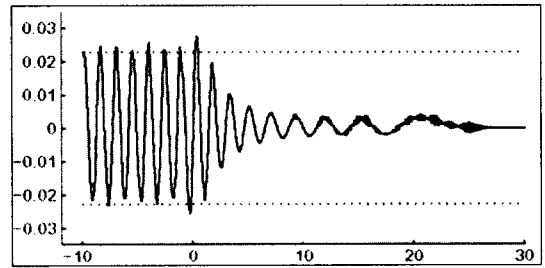
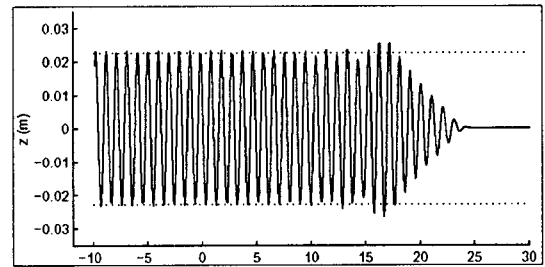


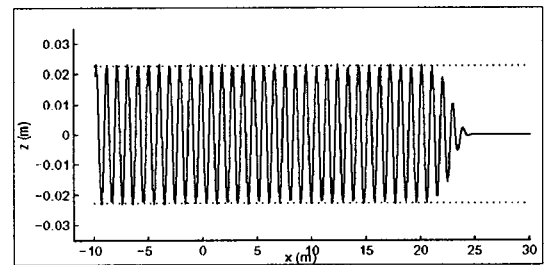
Fig. 5 두 벽면사이에서의 고립파의 거동 (측면도) (i: t=0 과 95.2, ii: t=4.5, iii: t=5.2, iv: t= 13.7, v: t= 14.3) (sec)



(a) t = 24.4 sec



(b) t = 48.8 sec



(c) t = 73.3 sec

Fig. 6 정현파에 대한 입사파와 스폰지 층의 적용

## 5. 정방형 수조에서의 파의 변형

2차원 수치모형에는 1차원 모형에서는 존재하지 않는  $x, y$  축에 대한 mixed spatial derivative (혼성 공간 미분?)이 있으므로 이 항들에 대한 처리가 정확하게 되었는지 검토해야 한다. 이와 더불어 2차원 문제에 대한 완전 반사조건 처리의 정확도와 그에 따른 수치모형의 안정성을 조사하기 위해서 직벽으로 둘러싸인 정방형의 수치 수조에서 초기 조건으로 수면변위를 주고 시간이 경과함에 따른 수면의 자유 거동을 계산하여 이를 해석해와 비교하였다. 계산 영역은 가로 세로 모두 6 m 의 완전 반사 경계로 둘러싸인 정방형 수조이다. 요소의 선택에 따른 수치해의 변화를 살펴보기 위해서 두 가지의 다른 유한 요소, 즉 사변형 요소와 삼각형 요소로 구성된 두개의 계산 영역에서 수치실험을 실시하여 수치해의 정확도를 상호 비교하였다. 사각형 요소를 사용한 경우 격자 크기는  $\Delta x = \Delta y = 0.2m$  이고 총 노드의 개수는 2025개이고, 삼각형 요소를 사용한 경우 총 노드 수는 1950 개이다.  $x=y=3.0m$  의 지점에 파봉이 오는 Gaussian 타입의 수면변위를 초기조건으로서 주었다. 일정 수심은 0.45 m 이고 파고는 0.045 m 이며 초기 조건의 식은 다음과 같이 기술된다.

$$\eta_0 = 0.045e^{-2[(x-3.0)^2 + (y-3.0)^2]} \quad (3.3.1)$$

초기 조건에서 유속은 모두 0이다. 초기의 파형은 시간이 경과함에 따라 중심으로부터 방사형으로 퍼져나가고 경계에 부딪힌 후 계산 영역으로 재 파급되는 등 복잡한 수면 변위 과정을 거친다. 시간의 변화에 따른 수면 변위의 모습이 Fig. 7에 제시되어 있다. 그림에서 보이는 바와 같이 완전 반사 경계에 수직으로 입사하는 파뿐만 아니라 경사지게 입사하는 파에 대해서도 경계조건이 잘 적용되고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8에는 시간 변화에 따른 수면변위의 계산 결과를 해석해와 비교하였으며 삼각형 요소 및 사각형 요소에 의한 차이도 같이 비교하였다. 해석해의 결과는 선형파랑 이론을 근거로 구하였다. 계산 결과는 파고와 위상 면에서 모두 해석해와 매우 유사한 결과를 보인다. 다른 요소를 사용한 것에 대한 결과의 차이도 크지 않으며 구조형 사

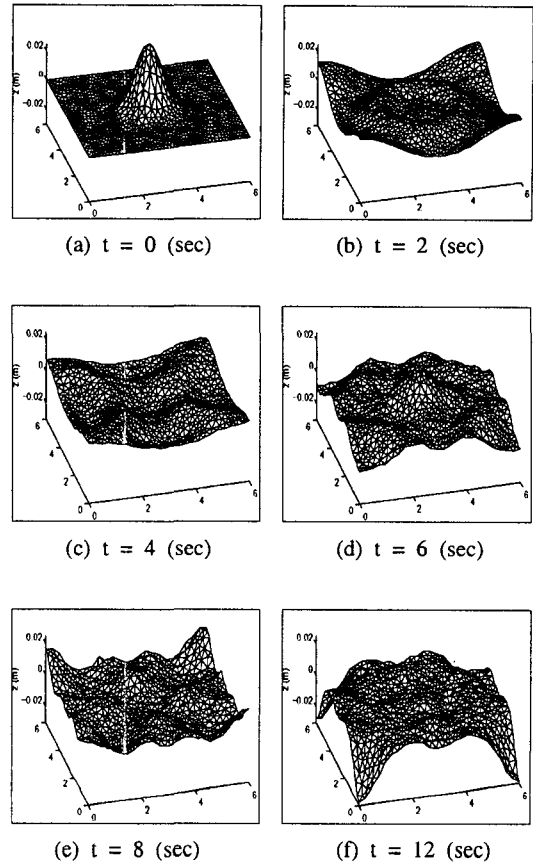
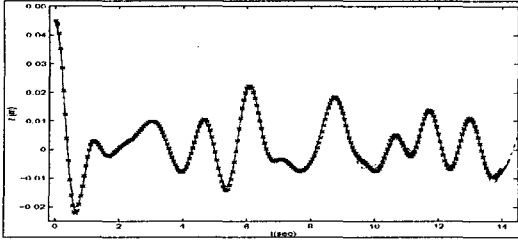


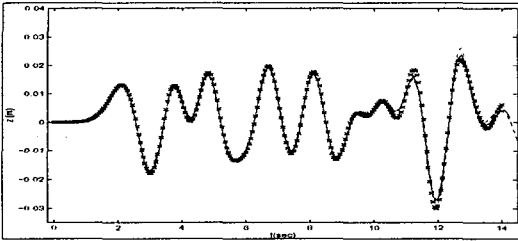
Fig. 7 정방형 수조에서 시간의 경과에 따른 자유수면거동

변형 요소를 사용한 수치계산이 비구조형 삼각형 요소를 사용한 것에 비해 약간 정확도가 높았다.

이 실험을 통해서 완전반사경계 조건과 함께 수립된 수치모형의 안정성도 검토할 수 있었다. 시간이 경과하면서 higher harmonic ?의 파랑이 발생하고 수면은 매우 복잡한 형상을 보이는데  $x, y$  축을 중심으로 대칭인 현상은 계속 되었으며 36000 time step (? 시간 단계) 에 해당하는 약 30 분의 simulation time? 에도 수치모형은 안정하였다. 각 time step (? 시간단계)에서 최대 반복횟수는 약 5회였다. 또한 본 계산 결과에서 질량의 변화를 관찰하였는데 계산과정에서 질량의 손실이나 발생은 없었다.



(a)  $(x,y) = (3.3)$



(b)  $(x,y) = (0,0)$

Fig. 8 정방형 수조에서 자유수면거동에 대한 수치해와 엄밀해와의 비교  
( - - : 구조형 사변형 요소, - - - : 비구조형 삼각형 요소, ××× : 엄밀해 )

## 6. 수중천퇴를 통과하는 파랑의 변형

굴절 및 회절 현상에 대한 검토를 하기 위하여 본 연구에서 수립된 모형을 Birkhoff 등 (1982)의 수중 천퇴에서의 파랑 전파에 대한 실험에 적용하고 수치실험 결과와 비교하였다. 수심은 타원형 천퇴와  $y$  축과 20도의 각을 이루는 1:50의 일정 경사의 수심과의 조합으로 구성되어 있다.

계산 영역은  $-10 \leq x \leq 10$ ,  $-15 \leq y \leq 23$  (m) 이고 입사파 경계조건이  $y = -15$ m 위치하고  $x = -10$ m 과  $10$ m 에는 직벽경계조건 그리고  $17 \leq y \leq 23$  (m) 에는 스폰지 층이 존재한다. 주기 1sec, 파고 2.32cm의 정현파가 입사파 경계에서 생성되고 파장은 1.485m 이다. 계산 영역은  $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m 의 사변형 요소로 구성되었으며 한 파장에 약 15개의 요소가 포함된다. 수치실험은  $0 \leq t \leq 50$ sec 동안 수행되었으며 그림 3.3.13에  $t = 19.8$ sec 에서의 수면변위에 대한 snap shot (?)을 제시하였으며 그림에서 수심의 등고선은 점선으로 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 수립된 수치모형은 파랑의 굴절, 회절 및 천퇴 후면에서의 파랑 에너지의 집중현상을 잘 재현하고 있다. Berkhoff 등 (1982) 의 실험결과는 8개의 단면

을 따라 비교하였으며 그 결과를 그림 3.3.14에 제시하였다. 계산 결과는 수치실험의  $48 \leq t \leq 50$  (sec) 에 해당하는 두 주기의 파랑을 평균한 파고이며 준 정상상태는 약  $t = 30$ sec 에서 도달하였다. 계산 결과는 실험결과와 매우 양호한 일치율을 보이며 특히, 단면 7에서 파랑의 비선형성으로 인해 굴절 효과가 감소한 현상을 잘 재현하고 있다.

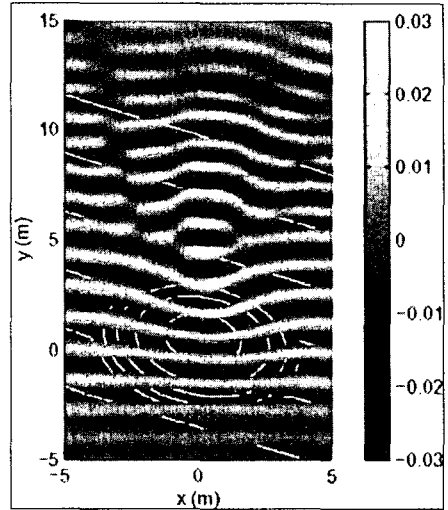


Fig. 9 수중 천퇴를 통과하는 파랑의 변형에 대한 수치 계산 결과 ( $t = 19.8$  sec)

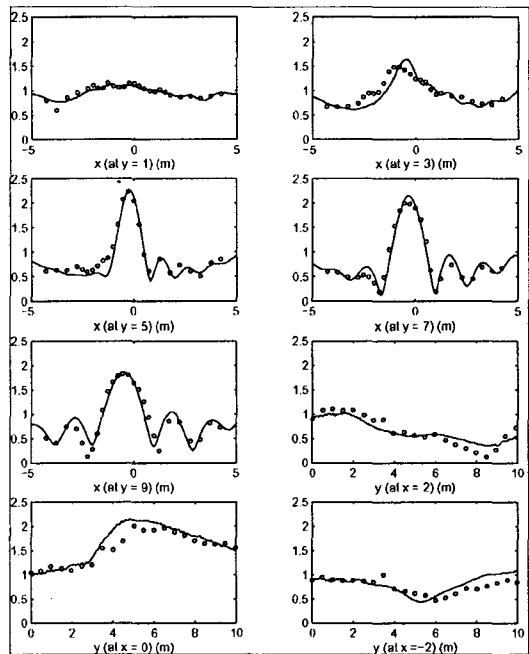
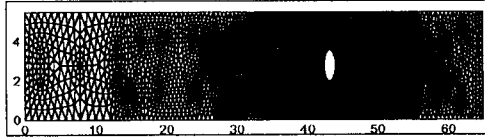


Fig. 10 수중 천퇴를 통과하는 파랑의 변형에 대한 수치 계산 결과와 수치 실험 결과의 비교

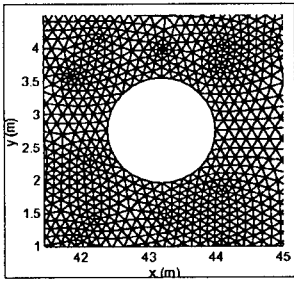


## 7. 실린더 주위를 통과하는 고립파의 변형

복잡한 경계를 잘 재현하는 삼각형 요소의 특성을 살펴보기 위해서 원형 실린더를 통과하여 변형되는 고립파의 수치실험을 수행하고 그 결과를 Antunes do Carmo 등 (1993)이 수행한 수치실험결과와 비교하였다.



(a) 전체 계산 영역



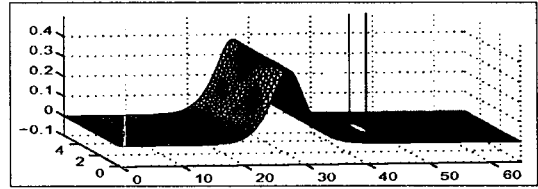
(b) 실린더 주위의 격자배치

Fig. 11 계산 영역에 대한 격자망도

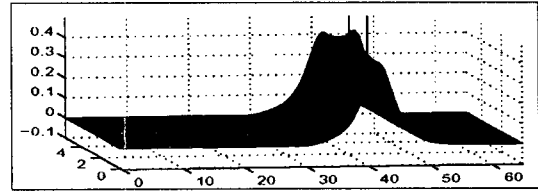
계산 영역은  $0 \leq x \leq 65$ ,  $0 \leq y \leq 5.5$  (m) 이고 비구조형 삼각형 요소로 구성되었으며 총 요소수 10512개, 노드 수 5446 개이다. Fig. 11에 제시된 것과 같이 실린더 주위의 원형 경계는 삼각형 요소로 잘 재현되었으며 실린더 주위에는 fine element (크기가 작은 요소)를 사용하고 실린더에서 바깥으로 가면서 점차 큰 요소를 사용하였다.

고립파는 초기조건으로서 주어지며 파봉은  $x=20.25m$  에 위치하고 파고는  $A=0.375m$ , 일정 수심은  $h=1.5m$  이다. 실린더 직경은  $D=1.6m$  로서 중심은  $x=43.2m$  에 위치하며 계산영역을 둘러싸고 있는 모든 경계는 완전 반사 경계로 처리하였다. 이 계산영역의 구성은 Antunes do Carmo 등 (1993)의 실험과 1:10의 스케일 비를 이루는데 이는 격자가 작아짐으로 인해서 발생하는 round-off 오차를 줄이기 위함이다. 수치실험과의 비교를 위해  $t\sqrt{gh/l_0}$  로 정의되는 무차원 시간 ( $t$ ) 을 도입하며 여기서  $l_0$  는 95%의 체적을 포함하는 고립파의 파장을 나타낸다. Fig. 12은 고립파가 실린더를 통과할 때의 자

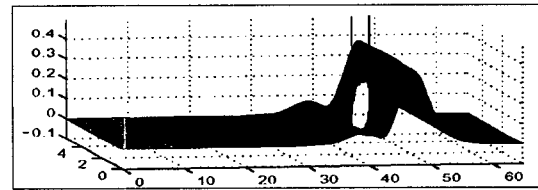
유수면의 변위를 나타낸다.  $t=1.58$  일 때 그림 3.3.15(b), 파는 실린더에 부딪히고 실린더의 전면에서 쳐올림이 발생하며 파랑의 반사는 뚜렷이 관찰되지 않는다.



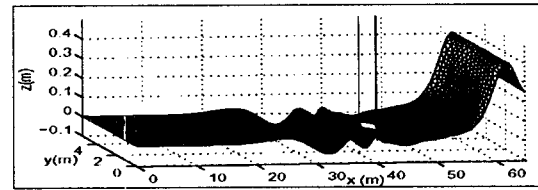
(a)  $t = 0.5$



(b)  $t = 1.58$



(c)  $t = 2.0$



(d)  $t = 3.0$

Fig. 12 실린더를 통과하는 고립파의 수치실험 결과

$t=2.0$  일 때 Fig. 12(c), 실린더에 의한 고립파의 산란과 반사 현상이 분명히 관찰된다. 고립파가 실린더를 통과하면서 특별한 수치진동이나 불안정은 보이지 않았으며 이는 실린더 경계를 따라 접선 방향의 유속이 잘 산정되었음을 의미한다.  $t=3.0$  에서 Fig. 12(d) 수면 변위는 보다 복잡한 형상을 나타내지만 두 가지의 특징을 알 수 있는데 첫 번째는 실린더 전면에서는 파고가 다른 몇 개의 반사파가 입사파의 반대 방향으로 진행되는 점이고 두 번째는 실린더 후면에서는 실린더를 통과한 고립파가 실린더로부터 멀어지면서

점차 초기 파형을 되찾아가고 있다는 점이다. 특히 두 번째의 특징은 고립파의 변형 특성을 나타내며 기존의 문헌에서의 관찰과 일치한다. (Ambrosi 와 Quartapelle 1998) Fig. 12(d) 에서는 고립파가 후면의 반사로 인해 파고가 약간 증가하였다.

계산 결과와 수리실험과의 비교는 Fig. 13에 도시하였다. 수리 실험에서 6개의 파고를 관측하였는데 그 관측 위치는 각각 Gauge 1 = (42.2, 2.75), Gauge 2 = (43.2, 1.7), Gauge 3 = (43.2, 0.45), Gauge 4 = (44.2, 2.75), Gauge 5 = (47.95, 2.75), Gauge 6 = (51.95, 2.75) (단위 m) 이다. 수면변위는 초기 고립파의 파고로서 무차원화 되었다. 수리 실험과의 비교는 수치모형의 결과가 최대 파고, 위상, 그리고 전체적으로 파랑의 출렁이는 패턴으로 볼 때 수리실험 결과와 양호한 일치를 보임을 알 수 있다.

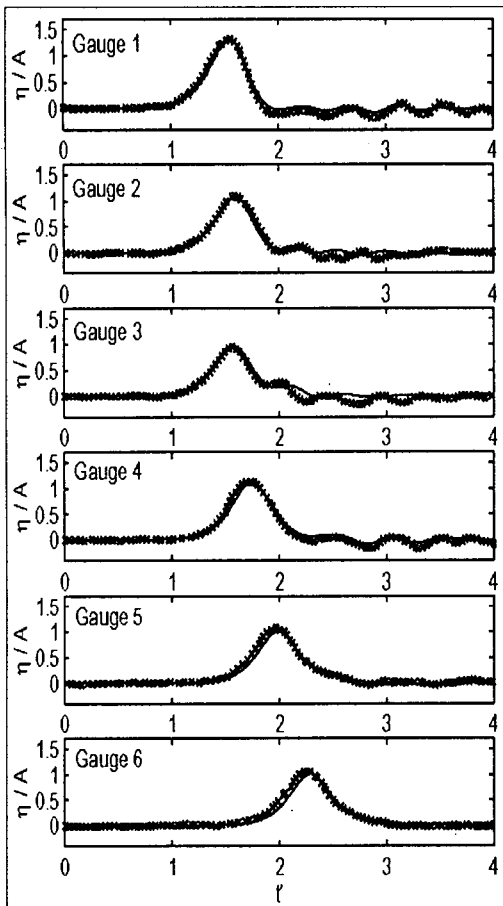


Fig. 13 실린더를 통과하는 고립파의 계산 결과와 수리실험 결과와의 비교

## 참고문헌

- Alfeld, P., Piper, B., and Schumaker, L. L. (1987). An explicit basis for C1 quartic bivariate splines, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(4), 891-911.
- Ambrosi, D. and Quartapelle, L. (1998). A Taylor-Galerkin method for simulating nonlinear dispersive water waves, *J. Comput. Phys.*, 146, 546-569.
- Antunes do Carmo, J. S., Seabra Santos, F. J., and Barthelemy, E. (1993). Surface waves propagation in shallow water: A finite element model, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16, 447-459.
- Antunes do Carmo, J. S., Seabra Santos, F. J. (1996). On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: a 2DH finite element model, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 22, 429-444.
- Beji, S. and Nadaoka, K. (1996). A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth, *Ocean Engng.*, 23(8), 691-704.
- Berkhoff, J. C. W., Booy, N. and Radder, A.C., (1982). Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coastal Engng.* 6, 255-279
- Chen, Y. and Liu, P. L.-F. (1995). Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 288, 351-381.
- Chen, Q., Madsen, P. A., Schaffer, H. A. d Basco, D. R. (1998). Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach, *Coastal Engng.*, 33, 11-39.
- Engelman, M. S., Sani, J. L. and Gresho, P. M. (1982). The implementation of normal and/or tangential boundary condition in finite element codes for incompressible fluid flow, *Int. J. Numer. Methods fluids*, 2, 225-238.
- Elgar, S. and Guza, R. T. (1985). Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model, *J. Fluid Mech.*, 158, 47-70.
- Goring, D. G. (1979). Tsunamis - the propagation of long waves onto a shelf, Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A. (1995). A two dimensional bi-cubic B-spline finite element: used in a study of MHD-duct flow, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 124, 365-375.

## 부 록

$$\begin{aligned}
 [M^u]_{ij} &= [M^u_1]_{ij} + \mu^2 [M^u_2]_{ij} \\
 [M^v]_{ij} &= [M^v_1]_{ij} + \mu^2 [M^v_2]_{ij} \\
 [M^\eta]_{ij} &= [M^\eta_1]_{ij} = [M^\eta_2]_{ij} = [M^P]_{ij} = \langle \Psi_i \Psi_j \rangle \\
 [M^u_2]_{ij} &= -C_4 \langle \Psi_i \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(1)l} \rangle \\
 & \quad (\{h\}_k)^2 - \beta \langle \Psi_i \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(1)l} \Psi_j \rangle \{h\}_k \{h\}_l \\
 & \quad - C_5 \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \Psi^1_{(1)j} \rangle (\{h\}_k)^2 \\
 & \quad - \frac{\beta}{2} \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi^1_{(1)k} \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \\
 [M^v_2]_{ij} &= -C_4 \langle \Psi_i \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle \\
 & \quad (\{h\}_k)^2 - \beta \langle \Psi_i \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(2)l} \Psi_j \rangle \{h\}_k \{h\}_l \\
 & \quad - C_5 \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \Psi^1_{(2)j} \rangle (\{h\}_k)^2 \\
 & \quad - \frac{\beta}{2} \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(2)k} \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \\
 \{f^n\}_i &= \{f^n_1\}_i + \varepsilon \{f^n_2\}_i + \mu^2 \{f^n_3\}_i \\
 \{f^u\}_i &= \{f^u_1\}_i + \varepsilon \{f^u_2\}_i + \mu^2 \{f^u_3\}_i \\
 \{f^v\}_i &= \{f^v_1\}_i + \varepsilon \{f^v_2\}_i + \mu^2 \{f^v_3\}_i \\
 \{f^1\} &= \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \rangle \{h\}_k \{u\}_k + \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \rangle \{h\}_k \{v\}_k \\
 \{f^2\} &= \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \rangle \{\eta\}_k \{u\}_k + \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \rangle \{\eta\}_k \{v\}_k \\
 \{f^3\}_i &= C_6 \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \rangle (\{h\}_k) (\{h\}_k)^3 \{E_1\}_k \\
 & \quad + C_3 \left[ \frac{2}{3} \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(1)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{u\}_l \right. \\
 & \quad \quad + \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{u\}_l \{R_1\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{v\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{v\}_l \{R_3\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{v\}_l \\
 & \quad \quad + C_6 \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \rangle (\{h\}_k)^3 \{E_2\}_k \\
 & \quad \quad + C_3 \left[ \frac{1}{3} \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{u\}_l \right. \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{u\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{u\}_l \{R_3\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{2}{3} \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{v\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{v\}_l \{R_2\}_l \\
 & \quad \quad \left. + \frac{1}{3} \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(1)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{u\}_l \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{f^1\}_i &= \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \rangle \{\eta\}_k \\
 \{f^2\}_i &= \frac{1}{2} \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \rangle (\{u\}_k)^2 + (\{v\}_k)^2 \\
 & \quad \{f^3\}_i \\
 &= \{ \langle \Psi_i \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle + \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi_k \Psi^1_{(2)l} \rangle \} \\
 & \quad (C_2 (\{h\}_k)^2 \{v\}_l + \beta \{h\}_k \{h\}_l \{v\}_l) \\
 \{f^1\}_i &= \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \rangle \{\eta\}_k \\
 \{f^2\}_i &= \frac{1}{2} \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \rangle (\{u\}_k)^2 + (\{v\}_k)^2 \\
 & \quad \{f^3\}_i \\
 &= \{ \langle \Psi_i \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(1)l} \rangle + \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi_k \Psi^1_{(1)l} \rangle \} \\
 & \quad (C_2 (\{h\}_k)^2 \{u\}_l + \beta \{h\}_k \{h\}_l \{u\}_l) \\
 \{f^{E_1}\}_i &= -\langle \Psi^1_{(1)i} \Psi^1_{(1)k} \rangle \{u\}_k - \langle \Psi^1_{(1)i} \Psi^1_{(2)k} \rangle \{v\}_k \\
 \{f^{E_2}\}_i &= -\langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(1)k} \rangle \{u\}_k - \langle \Psi^1_{(2)i} \Psi^1_{(2)k} \rangle \{v\}_k \\
 \{q^n\}_i &= -\int_{\Gamma} n_x [ \langle \Psi_i \Psi_k \rangle (\{h\}_k + \{\eta\}_k) \{u\}_k \\
 & \quad + \mu^2 (C_1 \langle \Psi_i \Psi_k \Psi^1_{(1)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{P\}_l \\
 & \quad \quad C_3 \{ \langle \Psi_i \Psi_k \Psi^1_{(1)l} \rangle (\{h\}_k)^2 \{h\}_l \{P\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi_i \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(1)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{u\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi_i \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{u\}_l \{R_1\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi_i \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(1)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{v\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi_i \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{v\}_l \{R_3\}_l ] \\
 & \quad + n_y [ \langle \Psi_i \Psi_k \rangle (\{h\}_k + \{\eta\}_k) \{v\}_k \\
 & \quad + \mu^2 (C_1 \langle \Psi_i \Psi_k \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{P\}_l \\
 & \quad \quad C_3 \{ \langle \Psi_i \Psi_k \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^2 \{h\}_l \{P\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi_i \Psi^1_{(1)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{u\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi_i \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{u\}_l \{R_3\}_l \\
 & \quad \quad + \frac{1}{3} \langle \Psi_i \Psi^1_{(2)k} \Psi^1_{(2)l} \rangle (\{h\}_k)^3 \{v\}_l \\
 & \quad \quad + \langle \Psi_i \Psi_k \Psi_j \rangle (\{h\}_k)^2 \{v\}_l \{R_2\}_l ] ] d\Gamma \\
 \{q^n\}_i &= -\int_{\Gamma} n_x [ \langle \Psi_i \Psi_k \rangle \{\eta\}_k + \varepsilon \frac{1}{2} \langle \Psi_i \Psi_k \rangle (\{u\}_k)^2 + (\{v\}_k)^2 \\
 & \quad + \mu^2 \langle \Psi_i \Psi_k \Psi^1_{(1)l} \rangle (C_2 (\{h\}_k)^2 \{u\}_l + \beta \{h\}_k \{h\}_l \{u\}_l \\
 & \quad + \mu^2 \langle \Psi_i \Psi_k \Psi^1_{(2)l} \rangle (C_2 (\{h\}_k)^2 \{v\}_l + \beta \{h\}_k \{h\}_l \{v\}_l) ] d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{q^v\}_i^n \\
&= - \int_r^n \left[ (\Psi_i \Psi_k) \{\eta\}_k^n + \varepsilon \frac{1}{2} (\Psi_i \Psi_k) (\{u\}_k^n)^2 + (\{v\}_k^n)^2 \right. \\
&+ \mu^2 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)}) (C_2 (\{h\}_k)^2 \{u\}_i^n + \beta \{h\}_k \{h\}_i \{u\}_i^n \\
&+ \mu^2 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(2)}) (C_2 (\{h\}_k)^2 \{v\}_i^n + \beta \{h\}_k \{h\}_i \{v\}_i^n) \left. \right] d\Gamma
\end{aligned}$$