

기액 이상류를 전파하는 약한 충격파에 관한 이론해석적 연구

전구식[†]·백승철*·김희동**

A Theoretical Analysis of the Weak Shock Waves Propagating through a Bubbly Flow

Gu-Sik Jun, Seung-Cheol Baek and Heuy-Dong Kim

Key Words: Bubbly Flow(기포류), Void Fraction(기포율), Shock Wave(충격파), Unsteady Flow(비정상유동), Elastic Pipe(탄성관), KdV-Burgers Equation(KdV-Burgers 방정식)

Abstract

Two-phase flow of liquid and gas through pipe lines are frequently encountered in nuclear power plant or industrial facility. Pressure waves which can be generated by a valve operation or any other cause in pipe lines propagate through the two-phase flow, often leading to severe noise and vibration problems or fatigue failure of pipe line system. It is of practical importance to predict the propagation characteristics of the pressure waves for the safety design for the pipe line. In the present study, a theoretical analysis is performed to understand the propagation characteristics of a weak shock wave in a bubbly flow. A wave equation is developed using a small perturbation method to analyze the weak shock wave through a bubbly flow with comparably low void fractions. It is known that the elasticity of pipe and void fraction significantly affect the propagation speed of shock wave, but the frequency of relaxation oscillation which is generated behind the shock wave is not strongly influenced by the elasticity of pipe. The present analytical results are in close agreement with existing experimental data.

1. 서 론

원자력 발전소나 각종 플랜트 등에서 냉각수를 수송하기 위한 배관계의 유체역학적 문제들이 자주 발생하고 있다. 예를 들면, 관로 중에 설치한 밸브 등의 작동에 의하여, 약한 압력파가 발생하여 관로 내를 전파하게 되는 경우, 배관계의 피로 파괴 등의 바람직하지 못한 사고를 야기하게 된다.

원자력 발전소의 경우, 관로 내를 통하게 되는 냉각수의 온도는 상당히 높으며, 일반적으로 배관계 내부의 유동은 기액 이상류(two-phase flow of gas and liquid)의 상태로 된다. 이러한 기액 이상류에서 발생하는 압력파의 현상은 기체 혹은 액체의 단상 유동과는 매우 다르며, 종래에 수행된 연구결과들은 수중음향이나 수격현상, 임계유동현상 등과 관련하여 대부분 단상(single-phase) 유동에 대한 것들이었다.

일반적으로 기액 이상류를 전파하는 압력파의 특성은 이상류의 유동형태에 따라 상당히 달라지게 되며, 대개의 경우 이를 설명하기 위해서 기액 이상류의 기포율(void fraction)이나 건도(quality) 등을 주로 이용하였다. 그러나 동일한 기포율이나 건도일 경우에도 유동형태가 변하는 경우, 압력파의 전파 특성은 크게 달라진다.

예를 들면, 기액 이상류의 일종인 기포류내를

† 안동대학교 기계공학과 대학원

* LG전자 DAC 연구소

** 안동대학교 기계공학과

E-mail : kimhd@andong.ac.kr

TEL : (054)820-5622 FAX : (054)823-5459

전파하는 압력파의 전파속도는 기체만의 단상유동 혹은 액체만의 단상유동에 비하여, 현저하게 낮아지게 되며, 이러한 현상은 유동의 압력변화에 대한 기포의 체적변화 즉 압축성에 기인하는 것으로 판단된다. 기포의 체적변화에 수반하여 기포내 기체의 상태량은 변화하게 된다. 구체적으로 기포내 밀도는 기포 외부의 액체로 인하여, 단상의 기체의 밀도보다 커지게 된다. 반대로 액체의 체적탄성계수는 기포에 영향을 받게 되므로, 단상의 액체보다 작아지게 된다.

일반적으로 압력파의 전파속도는 매체의 체적탄성계수에 강하게 의존하며, 이것은 압력파의 전파속도가 기포류의 체적탄성계수 뿐만 아니라 관로의 체적탄성계수에도 의존하게 된다는 것을 의미한다.

과거 Campbell 등⁽¹⁾은 기포류내를 전파하는 약한 충격파의 속도를 측정하여, 기액이상류를 전파하는 충격파의 속도는 단상의 유체내를 전파하는 경우에 비하여 낮다는 것을 보고하였다.

Noordzij 등⁽²⁾은 충격파관을 이용하여, 충격파관의 저압부에 기포류를 발생시켜, 전파하는 충격파의 압력파형을 측정하였다. 그 결과 Fig.1에 도식적으로 나타낸 바와 같이 전파 초기에는 충격파에 의하여 압력은 급격하게 상승하며, 그후 압력의 상승과 하강을 반복하는 강한 압력변동이 발생하며, 이러한 압력변동을 완화진동(relaxation oscillation)으로 보고하였다.

또 Kuznetsov 등⁽³⁾은 이론해석을 수행하여, 약한 충격파의 압력비와 감쇠계수가 충격파의 전파특성에 중요한 영향을 미친다고 보고하였으며, Nigmatulin⁽⁴⁾과土方 등⁽⁵⁾은 Noordzij 등의 연구에서 무시하였던 기상과 액상간의 열이동효과를 고려하여, 압력파 전파특성에 미치는 기상과 액상간 속도차의 영향은 작다는 것으로 지적하였다.

Prosperetti⁽⁶⁾는 충격파 후미부에서 발생하는 완화진동에 주목하여 감쇠계수의 평가를 하였으며, Chapman 등⁽⁷⁾, Matumoto 등⁽⁸⁾은 기포 내부의 온도분포를 가정하여 충격파의 전파특성을 해석하였다.

Wijngaarden⁽⁹⁾은 충격파 통과후 기포 내부의 상태변화를 조사하기 위하여 KdV-Burgers 방정식을 이용하여 이론해석을 수행하였다. 그러나 기포류가 유동하는 관의 탄성효과를 고려하지 않았기 때문에 실험과 이론해석결과는 상당한 차이를 보

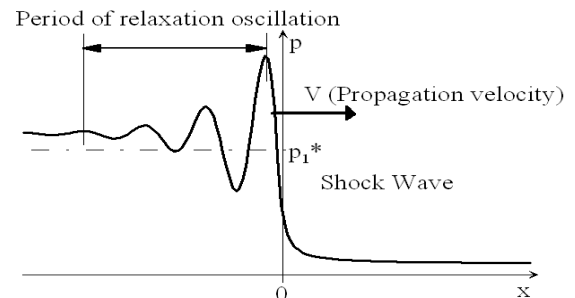


Fig 1. Schematic sketch of shock wave propagating through a bubbly flow

였다.

종래, 기포류를 전파하는 압력파에 대한 대부분의 연구는 기포율이 비교적 큰 기포류에 대하여 수행되었으며, 관로의 탄성을 무시하였다.^(1,2) 그러나 기포율이 작은 경우에는 관의 탄성의 영향이 커질 수 있으므로, 종래에 수행되었던 연구 결과들은 적합하지 못하다.

본 연구에서는 기포류내를 전파하는 약한 충격파의 특성을 조사하기 위하여 관로의 탄성을 고려한 이론해석을 수행하여 문헌(12) 및 (13)의 실험값과 비교하였다.

2. 탄성관내 기포류를 전파하는 약한 충격파의 이론해석

2.1 지배방정식의 도출

본 연구에서는 관내 기포류내를 전파하는 충격파의 전파속도와 기포류의 기포율의 관계를 조사하기 위하여 이론해석을 수행하였다.

이론해석에서는 단면적 A 인 관로를 통하는 기액이상류의 유동을 1차원 유동이라 가정하여, 질량보존식은 식(1)과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0 \quad (1)$$

유동의 점성을 무시하면 운동방정식은 식(2)로 쓰여진다.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

위의 식에서 ρ 는 밀도, u 는 유속, p 는 압력이다.

한편, 기포율 α_0 가 $\alpha_0 \ll 1$ 인 기포류인 경우, 기포류의 밀도는 식(3)으로 쓸 수 있다.

$$\rho = \rho_f(1 - \alpha_0) + \rho_g \alpha_0 \cong \rho_f(1 - \alpha_0) \quad (3)$$

위의 식에서 기포와 액체가 같은 속도로 유동한다고 가정하면, 기포류내의 단위 체적당 기상

과 액상의 질량비는 일정하게 보존된다.

$$\rho_g \alpha_0 / \{\rho_f (1 - \alpha_0)\} = const. \quad (4)$$

위의 식에서 ρ_f 는 액상의 밀도, ρ_g 는 기상의 밀도를 나타낸다.

일반적으로 기상에 비하여 액상의 열용량이 훨씬 크므로, 기포내 상태변화를 등온변화로 가정하고, 기포내 압력을 p_g , 기포반경을 R 이라고 하면, 다음과 같은 등온변화의 상태식을 얻을 수 있다.

$$p_g R^3 = const. \quad (5)$$

또 ν_f 를 액상의 동점성계수라 하면, 액체중의 단일 기포 팽창 및 수축의 운동방정식은 다음으로 주어진다.⁽⁹⁾

$$p_g - p = \left\{ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_f}{R} \frac{dR}{dt} \right\} \quad (6)$$

또, 관의 직경을 D , 두께를 h , 관의 탄성을 E 라 하면, 유로단면적과 압력 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.⁽¹⁰⁾

$$\frac{dA}{dp} = \frac{\pi D^3}{4hE} \quad (7)$$

한편 충격파 상류의 기포류 압력을 p_0 라 하고, 충격파 배후의 압력 p_g 를 구하기 위하여 미소섭동법을 이용할 수 있다.

$$p_g/p_0 = 1 + \epsilon \xi \quad (8)$$

위의 식에서 ϵ 은 미소량이며 ξ 는 무차원 압력이다. 여기에서 기포류의 유속 u 를 ϵ 과 c_0 , 그리고 α_0 로 무차원화한 값을 ω 로 정의한다.

$$\omega = u / (\epsilon c_0 \alpha_0) \quad (9)$$

또, 거리 x 를 D 로, 시간 t 를 D/c_0 로 각각 무차원화하면, 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$x' = x/D \quad (10), \quad \omega' = \omega / \sqrt{1+F} \quad (11)$$

$$\sigma \equiv \frac{3c_0^2}{\omega_B^2 D^2} \quad (12), \quad \omega_B \equiv \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3p_0}{\rho_f}} \quad (13)$$

위의 식(13)에서 ω_B 는 등온변화하는 단일기포의 팽창 및 수축운동의 주파수를 의미하며, 기포류의 특성(p_0/α_0)과 관의 특성(D/hE)을 나타내는 F 를 식(14)로 정의한다.

$$\left(\frac{p_0}{\alpha_0} \right) \left(\frac{D}{hE} \right) \equiv F \quad (14), \quad \tilde{\mu} = \frac{2\nu_f c_0}{D \omega_B^2 R_0^2} \quad (15)$$

$$t' = t/(D/c_0) \quad (16), \quad t'' = \frac{1}{\sqrt{1+F}} t' \quad (17)$$

위의 식(3)~(17)을 이용해서 식(1)과 (2)를 변형시키면 각각 식(18), (19)와 같이 된다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t''} + \frac{\partial \omega'}{\partial x'} + \frac{2F}{1+F} \epsilon \xi \frac{\partial \xi}{\partial t''} + 2\epsilon \xi \frac{\partial \omega'}{\partial x'} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t''} + \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\sigma}{3(1+F)} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x' \partial t''^2} + \frac{2\tilde{\mu}}{\sqrt{1+F}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial t''} = 0 \quad (19)$$

또, 본 연구에서 적용된 기포율은 $\alpha_0 \ll 1$ 이므로, 다음 두 식과 Broer의 방법⁽¹¹⁾을 이용하여 위 식(18) 및 (19)를 변형시켜 식(20)을 구한다.

$$\xi - \omega = O(\epsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = O(\epsilon) \quad (\epsilon : \text{미소량})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t''} + \left(1 + \frac{1}{1+F} \epsilon \xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\sigma}{6(1+F)} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x'^3} - \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+F}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x'^2} = 0 \quad (20)$$

식(20)은 기포류내를 전파하는 약한 충격파의 파동방정식이며, 충격파의 강도가 약한 경우에 적용된다. 또, 위의 식을 다음의 관계를 이용하여 변형하면,

$$\epsilon \xi \equiv P \quad (21)$$

다음의 식(22)를 얻을 수 있다.

$$\sqrt{1+F} \frac{\partial P}{\partial t'} + \frac{\partial P}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1+F}} P \frac{\partial P}{\partial x'} + \frac{\sigma}{6(1+F)} \frac{\partial^3 P}{\partial x'^3} - \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+F}} \frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} = 0 \quad (22)$$

2.2. 정상해의 도출

c'' 을 정상해의 위상속도로, P 를 $P = P(\eta)$, $\eta = x' - c''t''$ 이라고 가정해서, 식(22)에 대입하면,

$$-c'' \frac{\partial P}{\partial \eta} + \left(1 + \frac{1}{1+F} P \right) \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\sigma}{6(1+F)} \frac{\partial^3 P}{\partial \eta^3} + \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+F}} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} = 0 \quad (23)$$

위의 식에서 $x' \rightarrow \infty$ 일 때 다음 조건이 성립한다.

$$P = \partial P / \partial \eta = \partial^2 P / \partial \eta^2 = 0$$

위 조건을 식(23)에 적용하여, 적분을 수행한 후 $U(P)$ 를 정의한다.

$$\frac{\sigma}{6(1+F)} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+F}} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{dU(P)}{dP} = 0 \quad (24)$$

$$U(P) = \frac{1}{1+F} \frac{P^3}{6} - (c''-1) \frac{P^2}{2} \quad (25)$$

식(25)에서 $U(P)$ 가 $P = 2(c''-1)(1+F)$ 일 때 극소값을 가지고, 입자는 최대속도(퍼텐셜 최소)가 된다. 즉, $\eta \rightarrow \infty (t \rightarrow -\infty)$ 일 때 $P = 0$ 근방, $\eta \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty)$ 일 때 $P = P_1$ 면 다음과 같다.

$$c'' = 1 + P_1 / \{2(1+F)\} \quad (26)$$

다음으로 식(24)의 해가 monotonic waves를 가지는지 혹은 oscillatory waves를 가지는지 조건을 구한다. $\eta \rightarrow \infty$ 일 때, $P = P_1 + f(\eta)$, $f \ll 1$ 에 있어서 식(24)에 대입하고, 2차 이상의 미소량을 무시하면,

$$\frac{\sigma}{6(1+F)} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+F}} \frac{\partial f}{\partial \eta} + (c''-1)f = 0 \quad (27)$$

위 식(27)의 특성방정식의 해는 다음과 같다.

$$X = \frac{3(1+F)}{\sigma} \tilde{\mu} \pm \sqrt{\frac{9(1+F)\tilde{\mu}^2}{\sigma^2} - \frac{6(c''-1)(1+F)}{\sigma}} \quad (28)$$

식(28)이 중근을 가질 때를 기준으로 monotonic waves와 oscillatory waves가 구별된다. 이때의 $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_{cr}$ 이라 하면, $\tilde{\mu}_{cr}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{\mu}_{cr} = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma(c''-1)} = \sqrt{\frac{\sigma}{3} \frac{P_1}{(1+F)}} \quad (29)$$

$\tilde{\mu} < \tilde{\mu}_{cr}$ 일 경우에, $P = P_1 + f(\eta)$ 를 고려해서 정상해는 식(30)으로 도출된다.

$$P = P_1 + const. \exp\left(\frac{3\sqrt{1+F}}{\sigma} \mu \eta\right) \cos\left(\eta \sqrt{\frac{3}{\sigma} P_1}\right) \quad (30)$$

2.3 전파속도 및 완화진동의 주파수

$\eta = x' - c''t''$ 로부터 전파속도 c 는 c'' 를 유차원화하여 구한다.

$$c = \frac{c''c_0}{\sqrt{1+F}} = \frac{1 + \frac{1}{1+F} \frac{P_1}{2}}{\sqrt{1+F}} \times c_0 \quad (31)$$

식(30)의 주기성분에 대해 다음이 성립한다.

$$\eta \sqrt{3P_1/\sigma} = -2\pi$$

여기서, $\eta = x' - c''t''$ 로 치환하고, $x' = 0$ 을 가정하면, 다음 식이 얻어진다.

$$c''t'' \sqrt{\frac{3}{\sigma} P_1} = c'' \frac{1}{\sqrt{1+F}} \cdot \frac{c_0}{D} t \sqrt{\frac{3}{\sigma} P_1} = 2\pi$$

이것은 시간 t 가 충격파 완화진동의 주기와 일

치함을 만족시킨다.

$$P_1 = \Delta p_1 / p_0 \quad (32)$$

식(32)로부터 충격파 완화진동주기 T 및 주파수 f 는 다음과 같이 얻어진다.

$$T = 2\pi \sqrt{1+F} \frac{R_0}{c''} \sqrt{\frac{\rho_f}{3\Delta p_1}} \quad (33)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1+F}} \frac{c''}{R_0} \sqrt{\frac{3\Delta p_1}{\rho_f}} \quad (34)$$

2.4 관탄성의 영향

식(22)에서 $F=0$ 으로 하면, 관의 탄성을 무시한 파동방정식이 된다.

$$\frac{\partial P}{\partial t'} + \frac{\partial P}{\partial x'} + P \frac{\partial P}{\partial x'} + \frac{\sigma}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial x'^3} - \tilde{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x'^2} = 0 \quad (35)$$

관탄성을 고려한 충격파 전파속도와 완화진동의 주기, 주파수는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$c = \frac{1 + \frac{1}{2(1+F)} \frac{\Delta p_1}{p_0}}{\sqrt{1+F}} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_f \alpha_0}} \quad (36)$$

$$T = \frac{2\pi \sqrt{1+F} R_0}{1 + \frac{1}{2(1+F)} \frac{\Delta p_1}{p_0}} \sqrt{\frac{\rho_f}{3\Delta p_1}} \quad (37)$$

$$f = \frac{1 + \frac{1}{2(1+F)} \frac{\Delta p_1}{p_0}}{2\pi \sqrt{1+F} R_0} \sqrt{\frac{3\Delta p_1}{\rho_f}} \quad (38)$$

식(36)에서 음파의 경우에 해당하는 $\Delta p_1 = 0$ 이 되는 경우를 생각하면 관탄성을 고려할 때 음파의 전파속도는 식(39)로 주어진다.

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+F}} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_f \alpha_0}} \quad (39)$$

또 관탄성을 고려하는 경우, $\alpha_0 = 0$ 일 때의 전파속도는 다음과 같다.

$$c = \sqrt{hE/(D\rho_f)} \quad (40)$$

4. 결과 및 고찰

Fig.2는 충격파의 전파속도와 기포율의 관계를 나타낸다. 충격파의 전파속도는 관의 탄성계수 E 가 매우 큰 경우($F \approx 0$)에 기포율이 증가함에 따라 급격하게 감소한다. 관의 탄성계수 E 가 작은 경우($F \neq 0$)에는 전파속도 변화율이 작아서 완만하게 감소하고, 기포율 1%이상이면 관탄성의 크

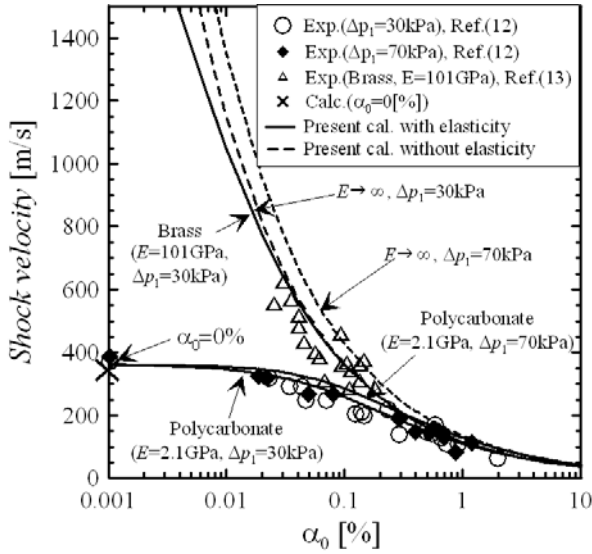


Fig 2. Shock propagation velocity and void fraction ($p_0=100\text{kPa}$, $D/h=16$)

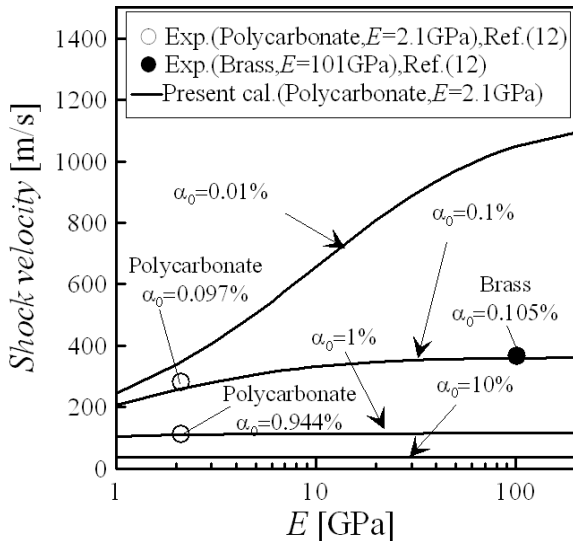


Fig 3. Relationship between shock velocity and pipe elasticity ($p_0=100\text{kPa}$, $D/h=16$, $\Delta p_1=30\text{kPa}$)

기와 관계없이 거의 동일한 값을 가진다. Polycarbonate와 같이 E 값이 작은 경우($E=2.1\text{GPa}$, $E=2.1\text{GPa}$, $F=0.0076\sim 76$)에는 관탄성을 적용하여 얻은 계산값만이 실험값의 경향을 잘 반영한다. Brass와 같이 E 값이 매우 큰 경우($E=101\text{GPa}$, $F=0.00016\sim 1.6$)는 관탄성의 영향이 적어, 관탄성 고려 여부와 상관없이 계산값과 실험값이 정성적으로 잘 일치한다.

Fig.3은 충격과 전파속도와 관탄성의 관계를 나타낸다. 충격과 전파속도는 기포율이 0.01%와 0.1%인 경우에 관탄성이 증가함에 따라 전파속도가 증가한다. 기포율이 1%와 10%인 경우에는

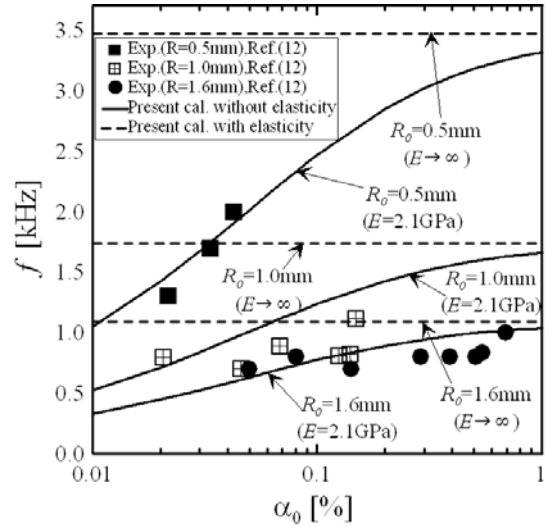


Fig 4. Relationship between relaxation frequency and α_0 (Polycarbonate, $E=2.1\text{GPa}$, $p_0=100\text{kPa}$, $D/h=16$, $\Delta p_1=30\text{kPa}$)

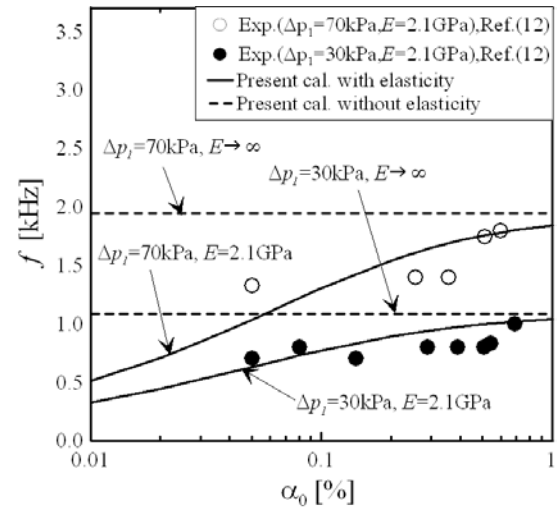


Fig 5. Relationship between relaxation frequency and α_0 (Polycarbonate, $E=2.1\text{GPa}$, $R=1.6\text{mm}$, $p_0=100\text{kPa}$, $D/h=16$)

충격과 전파속도가 관탄성의 변화에 거의 영향을 받지 않는다. 이는 실험 결과와도 잘 일치한다.

Fig.4는 기포반경에 대한 완화진동 주파수와 기포율의 관계를 Polycarbonate관과 같이 E 값이 작은 경우에 대해 나타낸다. 실험값은 관탄성을 고려한 계산값과 잘 일치한다. 여기서 주파수의 크기는, 기포율이 증가함에 따라 증가하고, 같은 기포율에서는 기포반경이 작을수록 크다. 또한 주파수 증가율은 기포반경이 작을수록 크다. 관탄성이 매우 큰 경우에 주파수는 기포반경에만 의

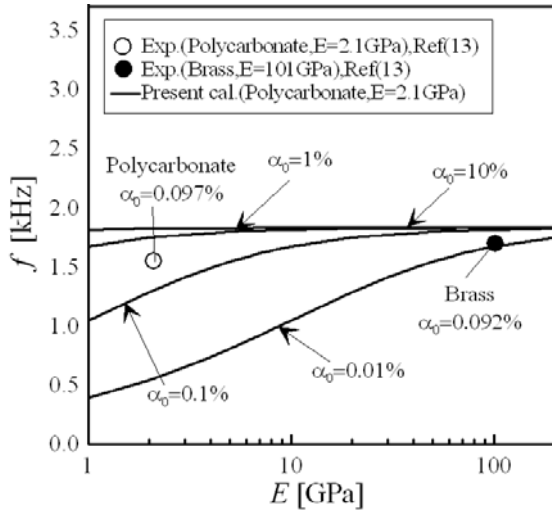


Fig 6. Relationship between relaxation frequency and pipe elasticity ($R_0=0.95\text{mm}$, $p_0=100\text{kPa}$, $D/h=16$, $\Delta p_l=30\text{kPa}$)

존하며, 기포반경값에 따라 일정한 값을 가진다.

Fig.5는 충격과 압력비에 대한 완화진동 주파수와 기포율과의 관계를 나타낸다. 주파수 크기는 충격과 압력비가 클수록 커지며, 실험값은 관탄성을 고려한 계산값과 잘 일치한다.

Fig.6은 기포율에 대한 완화진동 주파수와 관탄성의 관계를 나타낸다. 주파수의 크기는 기포율이 0.01%와 0.1%인 경우에 관탄성이 증가함에 따라 커진다. 기포율이 증가할수록 관탄성의 영향은 매우 작아져서 기포율이 1%와 10%인 경우에는 관탄성의 영향을 거의 받지 않는다. 그러나, 실험에 의한 주파수 측정값은 기포율에 관계없이 관탄성의 영향을 받지 않는 것으로 나타났다.

4. 결론

기포율이 10%이하의 범위에서 기액 이상류의 충격과 전파시 기포율에 따른 충격파의 특성을 해석적으로 구명하였으며, 관탄성과 기포율, 기포반경에 따른 충격파의 전파속도와 완화진동 주파수의 변동을 비교하였다. 전파속도는 기포율이 작아질수록 증가하고, 관탄성이 작은 경우에 기포율 감소에 따른 전파속도 증가폭이 현저하게 줄어들어 관탄성에 의한 차이가 크다. 또, 주파수의 경우에는 관탄성에 의한 영향보다 기포반경 변화의 영향이 크며, 기포반경이 작을수록, 압력비와 기포율은 클수록 주파수가 커지는 것으로

나타났다.

참고문헌

- (1) Campbell, I. J. and Pitcher, A. S., 1958, "Shock Waves in a Liquid Containing Gas Bubbles," *Proc. Roy. Soc. London A*, pp.534-545
- (2) Noordzij, L. and Wijngaarden, L. van., 1974, "Relaxation Effects, Caused by Relative Motion, on Shock Waves in Gas-Bubble/Liquid Mixtures," *J. Fluid Mech.* 66, part 1, pp.115
- (3) Kuznetsov, V. V., Nakoryakov, V. E., Pokusaev, B. G. and Shreiber, I. R., 1978, "Propagation of Perturbation in a Gas-Liquid Mixture," *J. Fluid Mech.*, pp.85-96
- (4) Nigmatulin, R. I., 1982, "Mathematical Modeling of Bubbly Liquid Motion and Hydrodynamical Effects in Wave Propagation Phenomenon," *Appl. Sci. Res.*, pp.267-282
- (5) 土方邦夫, 森康夫, 清水建男, 1979, "物質伝達を伴う二相気ほう流中の衝撃波の研究," *日本機械學會論文集 B*, 45-396, pp1179-1187
- (6) Prosperetti, A., 1977, "Thermal Effects and Damping Mechanism in the Forced Radical Oscillations of Gas Bubbles in Liquid," *J. Acoust. Soc.*, pp.17-27
- (7) Chapman, R. B. and Plesset, M. S., 1971, "Thermal Effects in the Free Oscillation of Gas Bubbles," *J. Basic Eng.*, pp.142-145
- (8) Matumoto, Y. and Beylich, A. E., 1985, "Influence of Homogeneous Condensation Inside a Small Gas Bubble on its Pressure Response," *J. Fluids Eng.*, pp.281-286
- (9) Wijngaarden, L. van., 1972, "One-Dimensional Flow Liquids Containing Small Gas Bubbles," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4, pp.369
- (10) 日本流體力學會編集, 1989, "流體における波動," pp.229, 朝倉書
- (11) Broer, L. J. F., 1964, "On the Interaction of Non-Linearity and Dispersion in Wave Propagation," *Appl. Sci. Res. Section B*, Vol.11, pp.273
- (12) Kobayashi, M., 1998, "Study on Weak Shock Waves Propagating through Bubbly Liquids in Elastic Pipes," Master Thesis, Kyushu University, pp.29-32
- (13) Takagaki, T., 1999, "Study on Characteristics of Pressure Wave Propagation in Bubbly Liquids in Elastic Pipes," Master Thesis, Kyushu University, pp.35-39