

# 점근해석을 이용한 확대형 채널 내의 천음속 연소에 관한 연구

이 장 창<sup>†</sup>

## A Study of Transonic Combustion in a Diverging Channel Using Asymptotic Analysis

Jang-Chang Lee

**Key Words:** Transonic Combustion(천음속 연소), Dilute Premixture(묾은 예혼합), Reactive Fluid(반응유체), Asymptotic Analysis(점근해석), Diverging Channel(확대형 채널)

### Abstract

A steady dilute premixed combustion at transonic speeds in a diverging channel is investigated. The model explores the nonlinear interactions between the near-sonic speed of the flow, the small changes in geometry from a straight channel, and the small heat release due to the one-step first-order Arrhenius chemical reaction. The reactive flow can be described by a nonhomogeneous transonic small-disturbance (TSD) equation coupled with an ordinary differential equation for the calculation of the reactant mass fraction in the combustible gas. The asymptotic analysis results in the similarity parameters that govern the reacting flow problem. The model is used to study transonic combustion at various amounts of incoming reactant mass, reaction rates, and channel geometries.

#### 기호설명

$\bar{A}$  : 반응율 앞지수(pre-exponential) 인자  
 $\bar{A} = \overline{AH} / \overline{U_0}$  : 스케일된 진동수(frequency)인자  
 $\bar{\bar{A}} = \varepsilon^{1/3} \bar{A}$  : 수정 스케일된 진동수 인자  
 $B$  : 비 열 방출(specific heat release)  
 $C_p$  : 정압 비열  
 $D$  : 확산계수  
 $\bar{E}$  : 활성화 에너지(activation energy)  
 $2H$  : 채널 입구높이  
 $K, K_\delta$  : 상사 파라미터  
 $M_0 = \sqrt{\overline{U_0^2} / (\nu R T_0)}$  : Mach 수  
 $p, \bar{p}$  : 무차원 압력, 압력

$\bar{p}_0$  : 채널입구의 균일 압력  
 $P_e = \overline{\rho_0 U_0 H / D}$  : Peclet 수  
 $R$  : 가스상수  
 $T, \bar{T}$  : 무차원 온도, 온도  
 $\bar{T}_0$  : 채널입구의 균일 온도  
 $\bar{u}$  : 축방향 속도  
 $\overline{U_0}$  : 채널입구의 축방향 균일 속도  
 $\bar{v}$  : 횡방향 속도  
 $\bar{W}$  : 반응율(reaction rate)  
 $\bar{x}_0$  : 채널의 전체길이  
 $x$  : 무차원 축방향 좌표  
 $x^*$  : 스케일된 무차원 축방향 좌표  
 $y$  : 무차원 횡방향 좌표  
 $Y$  : 반응유체 질량분율(mass fraction)  
 $\beta = B / C_p \bar{T}_0$  : 열 방출 파라미터  
 $\nu$  : 비열비  
 $\delta$  : 채널입구에서 반응유체의 질량 측정치

<sup>†</sup> 안동대학교 기계공학부

E-mail : leejc@anu.ac.kr

TEL : (054)820-5168 FAX : (054)823-5495

- $\varepsilon$  : 일직선 채널로부터의 편차(deviation)
- $\theta = \overline{E}/R\overline{T}_0$  : 스케일된 활성화 에너지
- $\lambda$  : 열전도율
- $\mathcal{L} = \lambda/C_p D$  : Lewis 수
- $\mu$  : 균일 상태로부터의 편차
- $\rho, \overline{\rho}$  : 무차원 밀도, 밀도
- $\overline{\rho}_0$  : 채널입구의 균일 밀도

### 1. 서론

노즐이나 채널에서 화학 반응을 수반하는 유동(reactive flow)의 압축성 동역학은 기초과학의 문제로써 여러 분야에 응용할 수 있다. 예를 들어 제트엔진의 연소실과 제트 전투기의 후기 연소기 또는 미사일의 추진 장치와 펄스 테토네이션 엔진 등등의 디자인에 기술적으로 응용할 수 있다. 특히 유동 속도가 초음속에 도달되어 충격파와 테토네이션파가 근원적으로 나타나는 고속 유동 연소는 많은 관심을 불러 일으켰다. 이러한 경향 속에서 화학반응과 복합 유동 사이의 상호작용에 대한 해석은 상당히 중요하다고 할 수 있다.

지난 수년 동안 폭연(deflagration)으로 알려진 저속 유동 연소(Williams, 1985)에 대한 이론적 연구가 활발히 이루어졌다. 하지만, 이 연구에서는 유동이 근원적으로 동결(frozen)되었고 열 방출 효과를 전혀 고려하지 않았다. 이것은 화염의 밀도가 일정하다는 가정을 통해 열팽창을 무시하거나 아주 적은 양의 열이 방출된다는 가정을 통하여 가능해진다. 적은 열 방출(small heat release) 가정은 점근해석에서 섭동 성분 향으로써 열팽창으로 취급되며 점근해석의 선도 차수(leading order)항에서 열팽창이 소거되어 밀도가 일정하다는 결론으로 귀결된다(Buckmaster & Ludford 1982). 이 연구에서 예혼합 연소가 저속 과정과 관련되어 있으나 연소와 유동과정 사이의 상호작용에 대해서는 규명되지 못하였다. 이러한 상호작용은 유동 속도가 높은 아음속이거나 음속에 가까운 속도일 때는 상당히 중요하다. 이때 밀도변화는 더 이상 무시할 수 없으며 밀도 변화는 유동에도 상당한 영향 끼치고 연소 동역학과 연소 구조에도 영향을 미친다.

본 연구에서는 아음속 영역과 초음속 영역 그리고 약한 충격파를 포함하고 화학반응이 일어나는 유동에 대해 천음속 근처에서의 연소 거동을 연구하였다. 적은 열 방출은 반응물질과 온도장 그리고 밀도장 사이에서 비선형 상호작용을 일으키며 이러한 적은 열 방출을 수반하는 묽은 화학반응(dilute chemical reactions)에 국한시켜 연구하였다. 이와같은 조건 아래서 점근해석의 적용이 가능하며 이 점근해석은 화학반응이 일어나는 압축성 유동을 묘사하기 위해 낮은 차수의 단순화된 모델 방정식들을 제공한다.

## 2. 2 지배 방정식 및 점근해석

### 2.1 지배 방정식

입구 높이가  $2H$ 이고 전체 길이가  $\overline{x}_0$ 인 2차원 채널 내의 반응 유체의 압축성 유동을 고려한다. 채널 벽은  $\overline{y} = \pm H(1 + \varepsilon F_{u,1}(\overline{x}/H))$  로 주어지고 함수  $\varepsilon F_{u,1}(\overline{x}/H)$  는 채널의 위쪽 표면과 아래쪽 표면을 각각 나타낸다. 또한  $\frac{d}{d\overline{x}}(\overline{x}_0/H) = 0$  라고 가정한다. 2차원 채널 내의 정상, 비점성, 압축성 유동을 묘사하는 지배 방정식은 다음과 같다 (Buckmaster & Ludford, 1982) :

$$\overline{p} = \overline{\rho} R \overline{T}, \tag{1}$$

$$(\overline{\rho} \overline{u})_{\overline{x}} + (\overline{\rho} \overline{v})_{\overline{y}} = 0, \tag{2}$$

$$\overline{\rho} (\overline{u} \overline{u}_{\overline{x}} + \overline{v} \overline{u}_{\overline{y}}) = -\overline{p}_{\overline{x}}, \tag{3}$$

$$\overline{\rho} (\overline{u} \overline{v}_{\overline{x}} + \overline{v} \overline{v}_{\overline{y}}) = -\overline{p}_{\overline{y}}, \tag{4}$$

$$\overline{\rho} C_p (\overline{u} \overline{T}_{\overline{x}} + \overline{v} \overline{T}_{\overline{y}}) - (\overline{u} \overline{p}_{\overline{x}} + \overline{v} \overline{p}_{\overline{y}}) = \lambda (\overline{T}_{\overline{xx}} + \overline{T}_{\overline{yy}}) + B \overline{W}, \tag{5}$$

$$\overline{\rho} (\overline{u} \overline{Y}_{\overline{x}} + \overline{v} \overline{Y}_{\overline{y}}) = D (\overline{Y}_{\overline{xx}} + \overline{Y}_{\overline{yy}}) - \overline{W}, \tag{6}$$

$$\overline{W} = A \overline{\rho} \overline{Y} e^{-\overline{E}/R\overline{T}}. \tag{7}$$

여기서 반응유체의 열역학 상태량( $R, D, C_p, \nu, \lambda, B$ )들은 전부 상수라고 가정한다. 식(7)은 1단 1계 Arrhenius 반응을 방정식이다.

채널 입구에서의 유체는 균일(uniform)상태라고 가정하고 이 균일 상태의 상태량들은 지배 방정식을 무차원화 시킬 때 기준 상태로 사용되었으며 또한 채널 입구 높이의 반인  $H$ 는 길이의 기준 상태로 사용되었다. 지배 방정식들을 무차원화 시키기 위해 무차원 변수들을 정의하면 다음과 같다 ;

$$p = \overline{p}/\overline{p}_0, \quad \rho = \overline{\rho}/\overline{\rho}_0, \quad T = \overline{T}/\overline{T}_0,$$

$$u = \overline{u}/\overline{U}_0, \quad v = \overline{v}/\overline{U}_0, \quad x = \overline{x}/H, \quad y = \overline{y}/H.$$

식 (1)~(7)을 무차원 형태의 방정식으로 다시 정리하면 ;

$$p = \rho T, \tag{8}$$

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \tag{9}$$

$$\rho (u u_x + v u_y) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} p_x, \tag{10}$$

$$\rho (u v_x + v v_y) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} p_y, \tag{11}$$

$$\rho (u T_x + v T_y) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (u p_x + v p_y) = \frac{\mathcal{L}}{P_e} (T_{xx} + T_{yy}) + \beta W, \tag{12}$$

$$\rho(uY_x + vY_y) = \frac{1}{P_e} (Y_{xx} + Y_{yy}) - W, \quad (13)$$

$$W = A\rho Y e^{-\theta/T}. \quad (14)$$

반응유체 유동에 대한 경계 조건들은 아래와 같이 고려하였다. 먼저 채널 입구 앞쪽에서 연료 공기 혼합기에 의해 정상 유동 반응유체가 생성되고 반응유체는 채널 입구에서 다음과 같은 경계 조건들을 가진다;

$$u(0, y) = 1 + \mu u_0(y), \quad v_x(0, y) = 0, \quad (15)$$

$$T(0, y) = 1 + \mu T_0(y),$$

$$Y(0, y) = \delta Y_0(y) \quad \text{for } -1 \leq y \leq 1.$$

여기서 주목해야 할 것은 채널 입구에서의 횡방향 속도 성분이 묘사되지 않았다는 점이다. 하지만 입구에서의 상태는 언제든지 횡방향으로 속도가 발전할 수 있으며 따라서 하류에서 교란이 생성될 수도 있다. 즉, 입구 상태는 하류에서 생성된 교란에 대한 상류의 영향력을 내재하고 있다. 이러한 가정은 해석 및 결과의 범위를 제한하지는 않는다.

$x_0$ 가 충분히 크다면 출구  $x = x_0 = \bar{x}_0/H$ 에서의 횡방향 속도 성분은 0이고 이는 입구로부터 멀리 떨어진 곳의 유동이 평행 유동 상태라는 것과 일치한다;

$$v(x_0, y) = 0 \quad \text{for } -y_0 \leq y \leq y_1 \quad (16)$$

여기서,  $y_0 = 1 + \varepsilon F_{u,1}(x_0)$  이고  $y_1 = 1 + \varepsilon F_{u,2}(x_0)$  이다. 채널 벽  $y = \pm(1 + \varepsilon F_{u,1}(x))$  를 따라 법선 속도 성분은 무시된다;

$$v(x, y) = \pm(1 + \varepsilon F_{u,1}(x)) = u(x, y) \quad (17)$$

$$= \pm(1 + \varepsilon F_{u,1}(x)) \varepsilon \frac{dF_{u,1}(x)}{dx} \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_0.$$

채널 내의 대칭 유동의 경우에는 축( $y=0$ )을 따라 다음과 같은 대칭 조건을 가정할 수 있다;

$$v(x, 0) = T_y(x, 0) = Y_y(x, 0) = 0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_0. \quad (18)$$

식 (8)~(14)는 경계조건 (15)~(18)과 함께 속도장, 온도장, 압력장, 밀도장, 질량분율 등을 구하기 위한 점근해석에 사용될 것이다. 본 연구는 아주 작게 확대된 채널 ( $0 \leq \varepsilon \ll 1$ ) 내에서 균일 상태에서부터 약간 벗어난 ( $0 \leq \mu \ll 1$ ) 속도로 입구에서 축방향으로 유입되는 물은 혼합물 ( $0 \leq \delta \ll 1$ )이 음속 ( $M_0 \sim 1$ ) 근처의 속도로 유동하는 문제에 그 초점을 맞추었다.

또한 공기와 혼합된 연료의 고속 연소에서는 전형적으로  $L \sim 1$ 이고  $P_e \gg 1$ 이다. 이것은 식(12)와 (13)에서 열 확산 효과와 반응유체의 확산 효과가 무시됨을 의미한다. 이러한 조건 아래서 반응유체 유동의 상태량들은 점근적으로 확장될 수 있다. 이때  $\delta \rightarrow 0, M_0 \rightarrow 1, \varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$  그리고  $P_e \rightarrow \infty$  라는 극

한을 둔다.

### 2.2 점근해석(Asymptotic Analysis)

아주 작게 확대된 채널을 묶은 반응유체가 균일 상태에 가까운 상태로 음속 가까이 유동할 경우, 대류와 화학반응 그리고 채널 형상은 균일 유동 상태량에 작은 섭동을 유발하는 효과가 있다. 이러한 섭동은 서로 복잡하게 비선형적으로 상호작용 할 것이다. 다양한 천음속 반응유체 상태량들 사이의 비선형 상호작용을 묘사하기 위해 다음을 고려한다;

$$x = \varepsilon^{1/3} x^* \quad (19) \quad K = \frac{1 - M_0^2}{\varepsilon^{2/3}} \quad (20)$$

$$K_\delta = \frac{\delta}{\varepsilon^{4/3}} \quad (21) \quad \mu = \varepsilon^{2/3}. \quad (22).$$

여기서  $K$ 는 고전 천음속 유동 상사 파라미터(Cole & Cook, 1986)이며  $K_\delta$ 은 채널로 들어가는 반응유체의 적은 양, 직선 채널로부터 벗어난 확대형 채널의 편차, 또는 음속 흐름(stream)으로부터 벗어난 입구 유동 속도의 편차 사이에 관련된 상사 파라미터이다. 다음은 유동과 연소 상태량들을 점근적으로 근사 시킨 형태이다;

$$u = 1 + \varepsilon^{2/3} u_1 + \varepsilon^{4/3} u_2 + \dots, \quad (23)$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^{5/3} v_2 + \dots, \quad (24)$$

$$p = 1 + \varepsilon^{2/3} p_1 + \varepsilon^{4/3} p_2 + \dots, \quad (25)$$

$$\rho = 1 + \varepsilon^{2/3} \rho_1 + \varepsilon^{4/3} \rho_2 + \dots, \quad (26)$$

$$T = 1 + \varepsilon^{2/3} T_1 + \varepsilon^{4/3} T_2 + \dots, \quad (27)$$

$$Y = \varepsilon^{4/3} K_\delta Y_1 + \dots. \quad (28)$$

식(19)~(28)에 나타난 다양한 먹들은 미지수 먹으로 표현된 점근확장(asymptotic expansions)의 일반식들을 식(8)~(14)에 대입하고 서로의 오더를 비교 매칭(matching)하여 결정된다. 다양한 섭동항들 중에서 차수(order)가 제일 큰 것(1차)과 두 번째로 큰 차수(2차)만을 모으면 다음과 같다.

상태 식(8)로부터 ;

$$O(\varepsilon^{2/3}): p_1 = \rho_1 + T_1, \quad (29)$$

$$O(\varepsilon^{4/3}): p_2 = \rho_2 + T_2 + \rho_1 T_1; \quad (30)$$

연속 식(9)로부터 ;

$$O(\varepsilon^{1/3}): (\rho_1 + u_1)_{x^*} = 0, \quad (31)$$

$$O(\varepsilon): (\rho_2 + u_2 + \rho_1 u_1)_{x^*} + v_1 y = 0; \quad (32)$$

$x$ -운동량 식(10)로부터 ;

$$O(\varepsilon^{1/3}): \nu u_{1x^*} + p_{1x^*} = 0, \quad (33)$$

$$O(\varepsilon): \nu u_{1x^*} (\rho_1 + u_1) + \nu u_{2x^*} - \nu K u_{1x^*} + p_{2x^*} = 0; \quad (34)$$

$y$ -운동량 식(11)로부터 ;

$$O(\varepsilon^{2/3}): v_{1x^*} + p_{1y} = 0, \tag{35}$$

$$O(\varepsilon^{4/3}): v_{1x^*}(\rho_1 + u_1) + v_{2x^*} - v_{1y} - \beta K \delta \bar{\Delta} Y_1 e^{-\beta(1+\varepsilon^{2/3}T_1+\dots)} + p_{2y} = 0. \tag{36}$$

에너지 식(12)과 식(14)로부터 ;

$$O(\varepsilon^{1/3}): T_{1x^*} - \frac{v-1}{V} p_{1x^*} = 0, \tag{37}$$

$$O(\varepsilon): T_{1x^*}(\rho_1 + u_1) + T_{2x^*} - \frac{v-1}{V} (u_1 p_{1x^*} + p_{2x^*}) - \beta K \delta \bar{\Delta} Y_1 e^{-\beta(1+\varepsilon^{2/3}T_1+\dots)} = 0. \tag{38}$$

$$O(\varepsilon^{-1/3}): Y_{1x^*} = -\bar{\Delta} Y_1 e^{-\beta(1+\varepsilon^{2/3}T_1+\dots)}. \tag{39}$$

1차 차수 식들[(29), (31), (33), (35), (37)]을 먼저 분석하면 식(31), (33), (37)로부터 아래의 식들을 구할 수 있다 ;

$$\begin{aligned} \rho_1 + u_1 &= f(y), \quad v u_1 + p_1 = g(y) \\ T_1 - \frac{v-1}{V} p_1 &= h(y). \end{aligned} \tag{40}$$

여기서, 함수  $f(y)$ ,  $g(y)$ ,  $h(y)$ 는 입구 조건들로부터 결정된다. 식(29)를 사용하여 ;

$$h(y) = \frac{g(y)}{V} - f(y). \tag{41}$$

식(40)으로부터;  $p_1 = g(y) - v u_1$ .

$$\text{식(35)로부터; } v v_{1x^*} + g_y(y) - v u_{1y} = 0. \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= u_1 - g(y)/V \quad \text{라고 놓으면 식(42)로부터} \\ \bar{u}_{1y} &= v_{1x^*}. \end{aligned} \tag{43}$$

따라서 식(43)으로부터 속도 섭동 포텐셜  $\Phi_1$ 을 구할 수 있다;  $\bar{u}_1 = \Phi_{1x^*}, \quad v_1 = \Phi_{1y}.$   $\tag{44}$

그리고 나면 1차 섭동들은 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_{1x^*} + \frac{g}{V}, \quad p_1 = -v \Phi_{1x^*}, \\ \rho_1 &= -\Phi_{1x^*} + f(y) - \frac{g(y)}{V}, \end{aligned} \tag{45}$$

$$T_1 = -(v-1)\Phi_{1x^*} - f(y) + \frac{g(y)}{V}.$$

입구 조건 식(15)와 함께 일반성을 유지하면서 식(45)는 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} g(y) &= v u_0(y), \quad f(y) = u_0(y) - T_0(y), \\ h(y) &= T_0(y), \quad \Phi_{1x^*}(0, y) = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

함수  $g(y)$ 는 입구 와도를 나타내고 함수  $h(y)$ 는 온도의 입구 변화를 나타낸다. 여기서 주목해야 할 점은 입구에서의 압력 섭동은 없다는 것이다;  $p_1(0, y) = 0$ .

다음은 2차 차수 식들[(30), (32), (34), (36)]을 분석한다. 먼저 식(30)을  $x^*$ 에 대해 1차 미분하고 정리하면 다음과 같이 표현된다;

$$p_{2x^*} - \rho_{2x^*} - T_{2x^*} = (\rho_1 T_1)_{x^*},$$

$$\rho_{2x^*} - u_{2x^*} = -(\rho_1 u_1)_{x^*} - v_{1y},$$

$$-u_{2x^*} - p_{2x^*} \frac{1}{V} = (\rho_1 + u_1) u_{1x^*} - K u_{1x^*},$$

$$\begin{aligned} T_{2x^*} - \frac{v-1}{V} p_{2x^*} &= -T_{1x^*}(\rho_1 + u_1) + \\ &\frac{v-1}{V} u_1 p_{1x^*} + \beta K \delta \bar{\Delta} Y_1 e^{-\beta(1+\varepsilon^{2/3}T_1+\dots)}. \end{aligned}$$

위에 나타낸 4개의 식들을 모두 합치면 다음과 같이 표현된다;

$$\begin{aligned} &(\rho_1 u_1)_{x^*} - (\rho_1 + u_1 - K) u_{1x^*} + T_{1x^*}(\rho_1 + u_1) \\ &- \frac{v-1}{V} u_1 p_{1x^*} - (\rho_1 T_1)_{x^*} + v_{1y} \\ &= \beta K \delta \bar{\Delta} Y_1 e^{-\beta(1+\varepsilon^{2/3}T_1)}. \end{aligned} \tag{47}$$

식(44)와 (45)를 식(47)에 대입하면 최종적으로 속도 섭동 포텐셜  $\Phi_1(x^*, y)$ 로 표현된 식을 얻을 수 있다 ;

$$\begin{aligned} &\left[ K - \left( f(y) + \frac{g(y)}{V} \right) - (v+1)\Phi_{1x^*} \right] \Phi_{1x^* x^*} \\ &+ \Phi_{1yy} = \beta K \delta \bar{\Delta} Y_1 e^{-\beta(1+\varepsilon^{2/3}T_1)}. \end{aligned} \tag{48}$$

여기서 식(46)으로부터  $f(y) + g(y)/V = 2u_0(y) - T_0(y)$  이다. 식(48)은 연소 효과(식의 오른쪽 소스 항)를 포함하는 수정된 Karman-Guderley 방정식이다. 이 식은 비제차 비선형 편미분 방정식이며 국부 마하수  $M$ 에 따라 방정식의 형태가 바뀐다. 국부 마하수  $M^2 = 1 - \varepsilon^{2/3} [K - f(y) - g(y)/V - (v+1)\Phi_{1x^*}]$  이다. 유동이 국부적으로 아음속 ( $M < 1$ )이면 방정식은 타원형(elliptic)이고, 초음속이면 ( $M > 1$ ) 방정식은 쌍곡선(hyperbolic)이다. 또한 주목해야 할 점은 연소가 없는 경우 ( $Y_1 = 0$ )에는 식(48)은 채널 유동에 대한 고전 천음속 미교란 방정식(TSD)으로 단순화된다(Cole & Cook, 1986).

식(48)은  $Y_1(x^*, y)$ 의 단순화된 상미분 방정식(39)과  $\Phi_1(x^*, y)$ 의 함수로 이루어진  $T_1(x^*, y)$ 에 대한 식(45)와 함께 풀어야 된다. 또한 3개의 식으로 결합된 이 시스템은 식(15)~(18)로부터 유도된 아래의 경계 조건들을 만족해야 한다 ;

$$\begin{aligned} \Phi_{1x^*}(0, y) &= 0, \quad \Phi(x_0, y) = 0 \text{ for } -1 \leq y \leq 1, \\ \Phi_{1y}(x^*, \pm 1) &= -\frac{dF_{u1}}{dx}(\varepsilon^{1/3}x^*) \\ \text{for } 0 \leq x^* \leq x_0^* &= \frac{x_0}{\varepsilon^{1/3}}, \\ Y_1(0, y) &= Y_0(y) \text{ for } -1 \leq y \leq 1. \end{aligned} \tag{49}$$

여기서, 벽 경계 조건은  $0 \leq x^* \leq x_0^* = x_0/\varepsilon^{1/3}$  사이의 모든 점에서  $y = \pm 1$  인 선을 따라 적용된다.

반응 유체의 압축성 유동에 대한 천음속 미 교란 모

델은  $\Phi_1$ 의 해를 구하기 위한 식(48),  $Y_1$ 의 해를 구하기 위한 식(39), 경계 조건 식(49)로 구성되어 있다. 이 모델의 해로부터 축방향 및 횡방향의 속도장, 마하수, 온도장, 압력계수  $c_p = (\bar{p} - \bar{p}_0) / \left( \frac{1}{2} \bar{\rho}_0 \bar{U}_0^2 \right)$ 가 포함된 압력장, 반응유체 질량분율장 등을 구할 수 있다. 식(48)로부터 다음과 같은 사실이 기대된다. 즉, 어떤 고정값  $\varepsilon$  및  $K$ 에 대해서  $K_\delta$  또는  $\bar{\lambda}$  또는  $\beta$ 의 값이 증가할 때 영역 내에서 더욱 강한 연소와 더 큰 열 방출이 일어날 것이다.

### 3. 3 수치해석 및 결과

#### 3.1 수치해석

식(48), (39), (45), (49)로 주어진 천음속 반응 유체에 대한 점근해석 모델은 국부 유동 조건에 따라 그 유동 형태가 바뀐다. 따라서 이 모델은 수치 해석적으로 형태민감(type-sensitive) 차분법이 요구된다. 본 연구에서는 식(48)을 차분화하기 위해 Murman & Cole(1971)의 테크닉을 사용하였다. 수치해석의 일관성을 위하여 식(48)의 보존적 형태를 사용하였다 ;

$$\left( \tilde{K}(y)\Phi_{1x^*} - \frac{1}{2}(V+1)\Phi_{1x^*}^2 \right)_{x^*} + (\Phi_{1y})_y = \beta K_\delta \bar{\lambda} Y_1 e^{-\theta/(1+\varepsilon^{2/3}T_1)} \quad (50)$$

여기서  $\tilde{K}(y) = K - (f(y) + g(y)/V)$ . 또한 외재적 반복 계산법을 사용하였으며 이 반복 계산법은 보통 화학 반응이 없는 채널 유동의 해로부터 주어진 초기 섭동들로부터 시작한다. 식(50)은 기지의 반응유체 질량분율  $Y_1(x^*, y)$ 의 분포에 대해서 수치계산을 수행하고 이로부터 구해진 속도 섭동 포텐셜  $\Phi_1$ 의 해는 온도장  $T_1$ 을 제공하고 이 온도장은 반응유체 방정식(39)를 계산할 때 필요하다.  $Y_1$  장을 결정하기 위하여, 식(39)는  $Y_{1x^*} = Q(x^*) = -\bar{\lambda} Y_1 e^{-\theta/(1+\varepsilon^{2/3}T_1)}$  형태의 1차 상미분 방정식을 푸는데 적합한 Simpson의 적분법을 사용하였다;

$$Y_{1i,j} = Y_{1i-1,j} + \frac{\Delta x^*}{6} (Q_{i-1,j} + 4Q_{i-\frac{1}{2},j} + Q_{i,j}) + O[(\Delta x^*)^5] \quad (51)$$

여기서  $Q_{i-\frac{1}{2},j} = (Q_{i-1,j} - Q_{i,j})/2$ 가 사용되었다. 식(48)과 (39)는 해가 수렴할 때까지 반복 계산되었다.

#### 3.2 수치해석 결과

입구와 출구 부분이 일직선이고  $x$ 축에 대해 대칭인 확대형 채널 (Fig. 1)의 각 파라미터들의 값은 다음과 같다 ;  $\varepsilon = 0.12, x_0 = 1,$

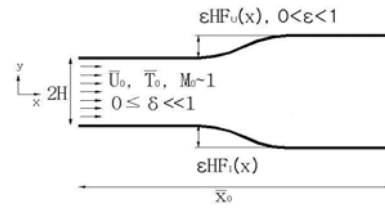


Fig. 1 Physical model of a transonic flow of a reactive fluid in a channel

$0 \leq x \leq 1$  일 때  $F_{u,i}(x) = 0,$

$1 \leq x \leq 2$  일 때  $F_{u,i} = \pm(1 - \cos(\pi x))/2,$

$2 \leq x \leq 3$  일 때  $F_{u,i} = \pm 1.$

또한  $K_\delta = 1, \beta = 2, \theta = 10$ 인 고정값들이 모든 경우에 대해 사용되었다. 입구상태는 균일상태이고  $u_0(y) = T_0(y) = 0$  (또는  $f(y) = g(y) = 0$ )이며  $Y_0(y) = 1$ 이다. 유동이  $x$ 축 대칭이기 때문에 수치계산은 채널의 반쪽인 아래 영역에서만 수행되었다.  $300(x^*$ 방향) $\times 200(y$ 방향)의 격자를 사용하여 마하수  $M_0 = 0.80$ 에 대한 다양한 수정 스케일된 진동수 인자( $\bar{\lambda} = 10,000 \sim 30,000$ )에 대하여 충분히 수렴된 수치 결과를 얻을 수 있었다.

Fig. 2a-2c와 3a-3c는  $M_0 = 0.8$  (또는  $K = 1.48$ )이고  $\bar{\lambda} = 10,000$  및  $20,000$  그리고  $30,000$ 인 각각의 경우에 대하여 무차원 온도장  $T = 1 + \varepsilon^{2/3}T_1$ 과 반응유체 질량 분율장  $Y_1$ 을 나타내었다. 이 그림들에서 유동은 왼쪽에서 오른쪽으로 흐르고 아래쪽 선은 채널의 아래쪽 벽을 나타내며 위쪽 선은 중심선을 나타낸다. Fig. 2a-2c에는  $\Delta T = 0.01$ 인 10개의 등온선들이 있고 Fig. 3a-3c에는  $\Delta Y_1 = 0.05$ 인 10개의 등질량 분율 선이 있다. 각각의  $\bar{\lambda}$  값에 대해 온도장과 반응유체 질량 분율장은 채널 벽 근처에서 비 선형적으로 거동하고 있다. 또한 2개의 뚜렷한 중심점이 존재하는데 하나는  $x = 1$  근처에 있고 다른 하나는  $x = 2$  근처에 있다.  $x = 1$ 은 채널 형상이 오목하게(concave) 확대되기 시작하는 지점이다. 이 지점에서 온도는 최소 값에 도달하고 화학반응은 조금 느려진다.  $x = 2$ 에서는 채널 형상이 볼록하게(convex)되면서 채널 확대가 끝나는 지점이다. 이 지점에서 온도는 최고 값에 도달하고 화학반응은 조금 증가할 것이다. 다른 한편으로 채널 중심선 근처에서의  $T$ 와  $Y_1$ 은 단조롭게 변화하고 있다.  $\bar{\lambda}$ 의 증가는 온도장에서의 변화를 크게 증가시켰고 결과적으로 출구 온도가 높아진 것을 알 수 있다. 높아진 온도는 출구에서 반응유체가 더 많이 소모 되도록 도와준다.

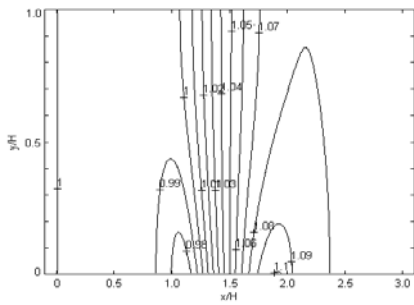


Fig. 2a Temperature Contours for  $M_0=0.8$  and  $\tilde{A}=10,000$

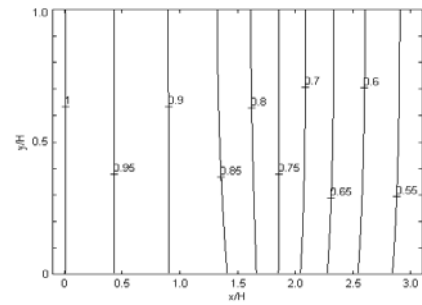


Fig. 3a Reactant Mass Fraction Contours for  $M_0=0.8$  and  $\tilde{A}=10,000$

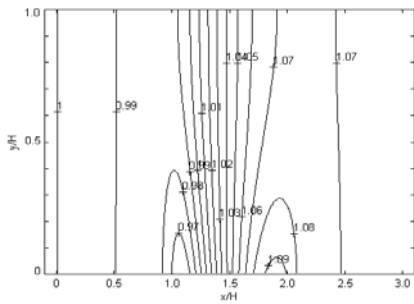


Fig. 2b Temperature Contours for  $M_0=0.8$  and  $\tilde{A}=20,000$

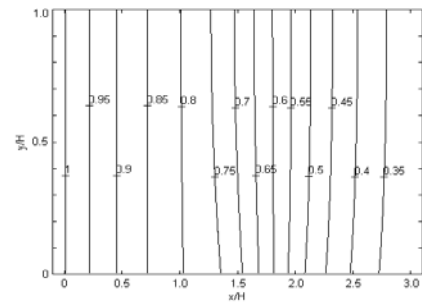


Fig. 3b Reactant Mass Fraction Contours for  $M_0=0.8$  and  $\tilde{A}=20,000$

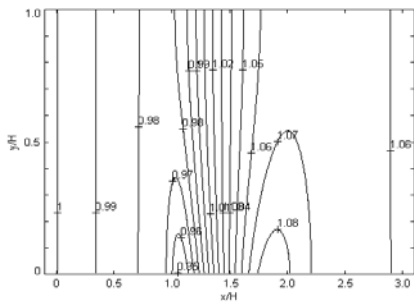


Fig. 2c Temperature Contours for  $M_0=0.8$  and  $\tilde{A}=30,000$

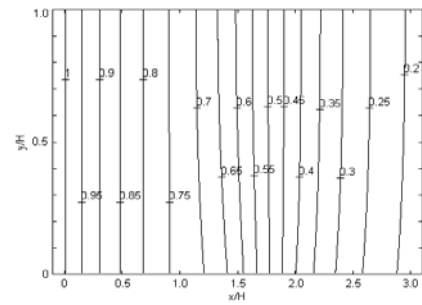


Fig. 3c Reactant Mass Fraction Contours for  $M_0=0.8$  and  $\tilde{A}=30,000$

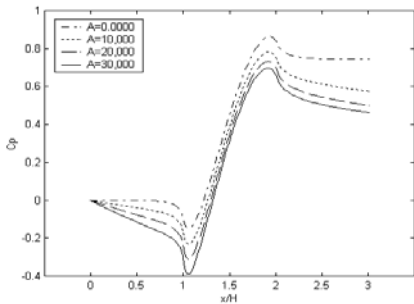


Fig. 4a Pressure coefficient distribution along the wall for  $M_0=0.8$  and various  $\tilde{A}$

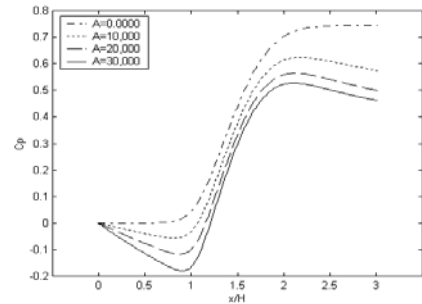


Fig. 4b Pressure coefficient distribution along the centerline for  $M_0=0.8$  and various  $\tilde{A}$

Fig. 4a와 4b는 다양한  $\bar{A}$  값에 대하여 확대형 채널 내의 벽과 중심선을 따라 유동 압력 분포를 나타내고 있다.  $x=1$  근처에서 유동의 가속과 흡입(suction)(낮은 압력)이 분명하게 나타나고 있으며 그 결과 이 영역에서는 온도가 낮고 화학 반응이 천천히 일어난다.  $\bar{A}$ 의 증가는 이러한 효과를 더욱 강화시키고 있다. 벽면이 점점 덜 오목하게 됨에 따라 유동의 속도는 감소하게 되고 온도와 압력은 증가한다. 반대로 벽면이 볼록한  $x=2$  근처에서는 온도와 압력이 최고 값에 도달하고 있다. 다시 강조하지만  $\bar{A}$ 의 값이 증가할수록 이러한 효과는 더욱 심화되고 있음을 알 수 있다. 입구 유동보다 출구 유동이 더 느리고 온도와 압력은 더 증가한다. 따라서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 즉, 화학 반응율이 고정되어 있다면 채널 입구로 들어오는 높은 운동에너지가 화학 반응과 채널 확장을 통해 출구에서의 더 높은 열에너지로 전환되었음을 알 수 있다. 그러나 스케일된 진동수 인자  $\bar{A}$  값의 증가는 출구에서의 온도(열에너지)와 압력을 떨어뜨리는 요인이 된다.

#### 4. 결론

확대형 채널 내에서 천음속으로 유동하는 정상류는 예혼합 연소에 대해 점근해석 모델을 이용하여 연구하였다. 이 모델은 음속 근처의 유동 속도, 일직선 채널로부터 벗어난 형상의 작은 변화, 1단 1차 Arrhenius 화학반응을 식에 의한 적은 열 방출 사이의 비 선형 상호 작용에 대해 연구하였다. 반응유체 유동은 연소가스의 질량 분율을 계산하는 상미분 방정식과 연립하여 비균질 천음속 미교란 방정식(TSD)을 사용하여 해석하였다. 또한 점근해석으로부터 반응유체 유동 문제를 지배하는 상사 파라미터들을 유도하였다. 수치해석 결과들은 대류, 화학반응, 형상 효과 사이의 복잡한 상호작용과 유동에 미치는 영향에 대해 조명하였다. 즉, 반응유체의 진동수가 증가하면 할수록 더 많은 반응유체가 소모되었지만 채널을 따라 유동은 가속되고 채널 출구에서의 낮은 열에너지로 귀결되었다.

본 연구 모델은 빠른 속도로 거동하는 반응유체 유동이 있는 연소실의 해석 및 디자인에 응용할 수 있다. 또한 본 연구 모델을 진행 충격파가 존재하는 반응 유체의 비정상 압축성 유동에 확대 적용함으로써 펄스 테토네이션 엔진의 복잡한물리 현상을 해석하는데 유용한 도구로 쓰일 것이다.

#### 후 기

본 논문은 교육부 주관 두뇌한국 21의 지역대학 육성사업의 일환으로 수행되었으며 이에 감사드립니다. 또한 본 연구에 많은 조언을 해준 Zvi Rusak 교수께 깊은 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Buckmaster, J. D. and Ludford, G. S. S., 1982, Theory of Laminar Flames, Cambridge University Press, Cambridge.
- (2) Cai, J., Icoz, O., Lui, F., and Sirignano, W.A, 2001a, "Ignition and flame studies for turbulent transonic mixing in a curved duct flow," AIAA Paper 01-0180.
- (3) Cai, J., Icoz, O., Lui, F., and Sirignano, W.A, 2001b, "Combustion in a transonic flow with large axial and transverse pressure gradients," Proc. 2nd Joint Meeting of the US Sections of the Combustion Institute, pp. 1~9.
- (4) Cheryni, G. G., 1968, "Supersonic flow past bodies with formation of detonation and combustion fronts," *Astronautics Acta / bf 13*, pp. 467-475.
- (5) Clarke, J. F., Kassoy, D. R., and Riley, N., 1986, "On the direct initiation of a plane detonation wave," *Proceedings of the Royal Society, London*, Vol. A408, pp. 129-148.
- (6) Clarke, J. F., Kassoy, D. R., Meharzi, N. E., Riley, N., and Vasantha, R., 1990, "On the evolution of plane detonations," *Proceedings of the Royal Society, London*, A429, pp. 259-283.
- (7) Cole, J. D. and Cook, L. P., 1986, *Transonic aerodynamics*, North-Holland.
- (8) Murman, E. M. and Cole, J. D. 1971, "Calculation of plane study transonic flows" *AIAA Journal*, Vol. 9, pp. 114-121.
- (9) Oswatitsch, K. and Zierep, J., 1960, "Das problem des senkrechten stoßes an einer gekrümmten Wand," *ZAMM*, Vol. 40, pp. 143-144.
- (10) Rusak, Z. and Lee, J.-C., 2000, "Transonic flow of moist air around a thin airfoil with non-equilibrium and homegeneous condensation," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 403, pp. 173-199.
- (11) Sirignano, W. A. and Kim, I., 1997, "Diffusion flame in two-dimensional, accelerating mixing layer," *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 9, pp. 2617-2630.
- (12) Sirignano, W. A. and Lui, F., 1999, "Performance increases for gas-turbine engines through combustion inside the turbine," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 15, pp. 111-118.
- (13) Short, M., Kapila, A., and Quirk, J. J., 1999, "The chemical-gas dynamic mechanisms of pulsating detonation wave instability," *Phil. Transactions the Royal Society, London*, Vol. A357, pp. 3621-3637.
- (14) Williams, F. A., 1985, *Combustion Theory*, Benjamin Cummings, New York.