

프로펠러팬에서의 Tip Vortex 거동

김성협[†] · 古川雅人^{*} · 井上雅弘^{**}

Behavior of Tip Vortex in a Propeller Fan

Sunghyup KIM, Masato FURUKAWA, Masahiro INOUE

Key Words : Propeller fan(프로펠러팬), RANS simulation(RANS 해석), Tip leakage flow(끝단누설유동), Tip vortex(날개끝단 渦), Wake(후류)

Abstract

Flow fields in a half ducted propeller fan have been investigated by three-dimensional Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) simulations and a vortex core identification technique. The simulation at the design operating condition shows that the tip vortex onset point is located at 30 percent tip chord of the suction surface on the blade tip. There is no interaction between the tip vortex and the adjacent blade, so that the tip vortex smoothly convects to the rotor exit. However, the high vorticity in the tip vortex causes the wake and the tip leakage flow to be twined around the tip vortex and to interact with the pressure surface of the adjacent blade. This flow behavior corresponds well with experimental results by Laser Doppler Velocimetry. On the contrary, the simulation at the low-flowrate operating condition shows that the tip vortex onset point is located at the 60 percent tip chord of the suction surface. In contrast to the design operating condition, the tip vortex grows almost tangential direction, and impinges directly on the pressure surface of the adjacent blade.

기호설명

c_q	질대속도의 원주방향속도성분	[m/s]
r	프로펠러팬 날개의 반경	[m]
P	전압	[Pa]
P_s	정압상승량	[Pa]
Q	체적유량	[m ³ /s]
U_t	날개끝단속도	[m/s]
n	hub/tip 비	
ρ	밀도	[kg/m ³]
w	각속도	[rev/s]
z_p	전압손실계수	
f	유량계수(= $Q / [p(1-n^2)r^2 U_t]$)	
y	압력계수(= $2P_s / (\rho U_t^2)$)	
첨자 1	날개의 입구부	

1. 서론

Shroud 가 날개후단 만을 덮고 있는 프로펠러팬은 공조기기의 실외기, 자동차엔진, 전자제품의 집적회로 등의 광범위한 영역에서 강제대류를 이용한 냉각장치로 가장 일반적으로 선택되어지고 있는 유체기계이다. 이러한 높은 활용성으로 인하여 프로펠러팬의 고효율화에 따른 소형화, 쾌적운전에 따른 저소음화의 요구는 지속적으로 강조되고 있다.

이상의 지속적인 요망에 따라, 프로펠러팬의 공력성능과 소음에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔으며, 최근까지의 수많은 연구결과를 통하여 날개 끝단에서의 와류유동(Vortical flow)은 프로펠러팬의 공력성능 및 소음특성과 밀접한 관계가 있음이 밝혀졌다. 특히, Fukano(1990) 등은 프로펠러팬에서 Shroud 의 형상을 포함하여, Shroud 와 날개 끝단과의 거리, 위치 등의 형상인자와 공력성능 및 소음간의 관계를 실험하여, 위의 사실을 증명하였다. 또한, Akaike 와 Kikuyama 는 LDV (Laser Doppler Velocimetry)를 이용하여 프로펠러팬 날개

[†] 삼성전자 개발혁신센터
E-mail : sh2122@samsung.com
TEL : (031)200-3294 FAX : (031)200-4692

^{*} 日本 九州大學 助教授

^{**} 日本 佐世保工業高等專門學校 校長

전, 후에서의 와류유동형태를 계측하였으며, 저유량 운전조건에서 Shroud 전단부에 역류를 동반한 와류유동이 존재함과, Shroud 형상의 최적화로 날개 끝단에 위치한 와류유동을 조절하여 소음을 감소시킬 수 있음을 밝혀내었다(1993). 최근에는 張 등이 날개의 후단 만을 Shroud 가 덮고있는 프로펠러팬에 대하여 해석적 연구를 수행하였으며, 이 연구를 통해 날개의 전단부에서 발생한 Tip vortex 가 원주방향으로 발달하여 인접날개의 정압면 끝단에 충돌하고 있음을 보여 주었다(2001), 또한 연이은 비정상거동의 해석을 통하여 날개 정압면의 충돌영역에 대한 압력변동의 주파수특성을 분석한 결과, Tip vortex 거동이 팬소음과 깊이 관련함을 증명하였다(2003).

본 연구는 날개 후단을 Shroud 가 덮고있는 프로펠러팬의 유동장에 있어서, Tip vortex 거동을 상세분석하기 위해 RANS(Reynolds-averaged Navier-Stokes) 해석을 수행하였으며, 해석결과는 특히 와류거동의 특성에 초점을 맞추어 가시화하여 한계유선과 함께 분석하였다. 그 결과 설계점에서는 Tip vortex, Tip leakage flow, Tip leakage vortex 및 후류(wake)가 서로 연관되어 그 특성변화에 영향을 주고 있음이 밝혀졌다. 또한, 저유량 영역의 해석결과는 Tip vortex 의 거동이 설계점의 경우와 전혀 상이하게, 즉, Shroud 전방의 발생위치에서 원주방향으로 발달하여 인접날개의 정압면과 직접 충돌하고 있음이 관찰되었다.

2. 해석대상 프로펠러팬의 특성

2.1 프로펠러팬의 형상 및 특성곡선

본 연구의 해석 대상인 프로펠러팬의 3 차원 형상을 Fig.1 에 나타내었다. 이 프로펠러팬의 설계점에서 유량계수 f 는 0.291, 압력계수 y 는 0.130 이다. 또한, 날개의 단면은 익형(airfoil)으로 설계되어 있으며, 무차원 회전수 0.373, 날개 직경 0.47m, hub/tip 비 0.3404, 날개 수 3, 날개와 shroud 의 간의 최소거리는 날개 반경의 3.3%이다.

Fig.2 는 이 프로펠러팬의 특성을 실험하여 얻어진 성능곡선으로, 청색은 유량-정압 특성을, 적색은 유량-소음특성을 나타낸다. 수치해석은 설계 및 저유량의 두 지점에서 실시하여, 그 특성을 비교 분석하였다.

2.2 LDV 측정결과

Fig.3 은 프로펠러팬 출구에서의 LDV 측정 결과 얻어진 속도벡터와 난류강도의 분포를 보여준다. 여기에서 화살표는 속도벡터를, 등고선은 난류강도를 나타내고 있다. 측정면은 유동방향, 즉 축방향에 대하여 수직인 면에 해당하므로 속도 벡터는 2 차유동에 해당한다.

Fig.3 에서, 날개에 해당하는 영역에 속도벡터의 급속한 변화와 더불어 난류강도의 집중이 두드러지는데, 이것은 후류 유동장의 특성을 나타내고 있다. 또한, 부압면과 Hub 사이에 발생하고 있는 난류강도의 집중은 Corner separation 의 발생에 해당된다. 특히, 날개와 날개 사이의 Mid-pitch 에서 속도벡터의 거동이 급변함과 동시에 高난류강도가 집중되고 있음을 관찰할 수 있는데, 이것은 이 측정면을 통과하는 Tip vortex 의 위치임을 알 수 있게 해준다. 그런데, Tip vortex 중심과 정압면의 사이에 난류강도의 상승 및 집중이 관찰되며, 이 특이한 현상에 대해서는 본 논문의 후반에서 해석결과와 함께 논의하기로 한다.

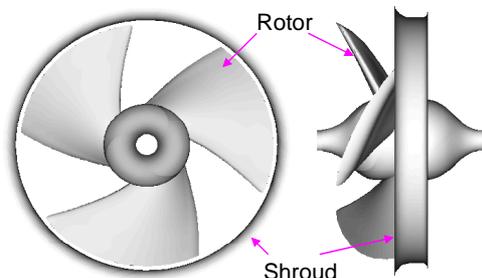


Fig.1 Test fan shape

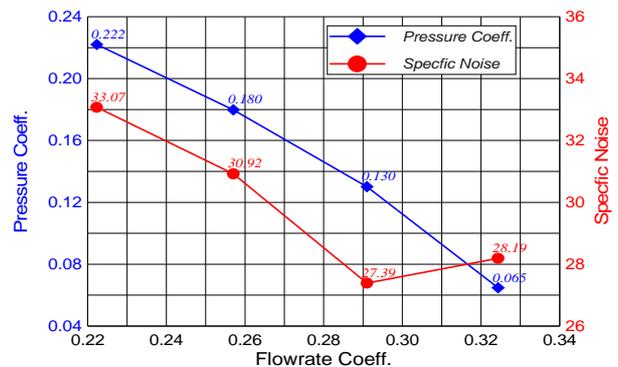


Fig.2 Characteristics of the test fan(Experiment)

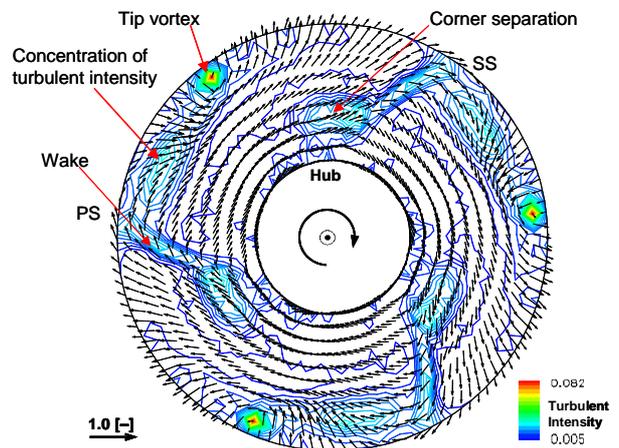


Fig.3 Velocity vectors and turbulent intensity near rotor exit

3. 수치해석방법

3.1 지배방정식의 차분화

본 연구에서는 압축성, 3 차원 RANS 방정식에 대하여, 緩和風上差分도식을 적용하여 차분화한 후, 음해법(implicit method)을 이용하여 해석하였다. 적용된 수치해법의 개요는 다음과 같다.

지배방정식의 공간차분은 셀(cell) 중심에서 유한체적법이, 시간차분에는 Euler 음해법이 적용되었다. 와동(渦動) 구조를 정확하게 묘사하기 위하여 비점성 거동은 TVD(Total variation diminishing) 식에 근거한 고해상도 풍상차분도식으로 평가된다. Chakravarthy(1986)의 Riemann 해법은 Roe의 근사법이며, Anderson 등에 의한 3 차 정확도를 갖는 MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)법이 적용되었다. 이러한 해석방법 즉, Riemann 해법에 기초한 고해상도 풍상차분법은 충격파 뿐만 아니라, 전단층 묘사에도 뛰어난 것으로 알려져 있으므로 압축성 유동이나, 본 연구와 같은 회전유동의 특성을 묘사하는데 적절할 것으로 사료된다.

점성거동은 Gauss 이론에 근거한 중앙차분법으로 계산되었으며, 와점성(Eddy viscosity)을 평가하기 위하여 Baldwin & Lomax 대수난류모델을 사용하였다. 이 경우 경계층의 천이는 Baldwin & Lomax 모델에서 제안된 값을 수정없이 적용하여, Gauss-Seidel 법으로 직접 계산하였다.

3.2 유동영역 및 계산 격자계

Fig.4 는 H-type 격자로 형성된, 본 연구에서의 프로펠러 팬 계산영역을 보여주고 있다. 해석 대상인 유동장은 날개 수가 3 매이므로, 120°영역만을 그 해석의 대상으로 설정하였다. 이 계산영역은 다시, 2 개의 영역으로 분리되며, Block 1 은 날개가 있는 주영역에, Block 2 는 Shroud 및 외벽을 포함하는 주변영역에 해당한다.

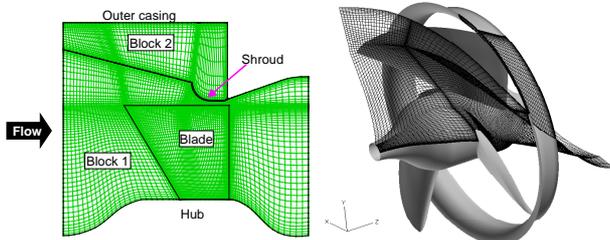


Fig.4 Computational Grid system

Table 1 Grid system and node numbers

System	N_c	N_s	N_p	Total
Block 1	127	62	130	1,278,420
Block 2	98	20	130	

Table 1 은 격자계를 구성하고 있는 절점의 수를 보이고 있다. 여기에서 N_c , N_s 및 N_p 는 각각 축방향, 반경방향 및 원주방향의 절점 수를 나타낸다.

3.3 경계조건

벽경계조건의 경우, No-slip, 단열조건으로 벽함수를 사용하지 않고 벽에서의 점성효과를 직접 평가하였다. 이때, 벽과의 최소격자 거리는 3×10^{-4} 이다. 또한, 입구에서는 입구면에 수직한 균일유동이 유입되는 것으로, 출구에서는 유출유량에 근거한 내부 셀 Flux 를 바탕으로 축방향 속도를 수정, 계산하였으며, 그 외의 물리량에 대해서는 구배를 무시하였다.

4. 결과 및 검토

4.1 설계점 운전에서의 유동특성

Fig.5 는 원주방향으로 평균한 설계점에서의 자오면유선(Meridional streamlines)을 보여준다. 이 유선으로부터, 해석대상인 프로펠러팬은 날개의 전면부 이외에도 Shroud 가 덮고 있지 않은 상부영역도 유입부에 해당함을 알 수 있다. 한편, 유동장이 원주방향으로 평균되었지만, Tip vortex 거동이 Shroud 와 날개 끝단 사이에 존재하고 있으며, 이 영역은 blockage 효과로서 Shroud 하단의 유동장을 방해하고 있음을 알 수 있다.

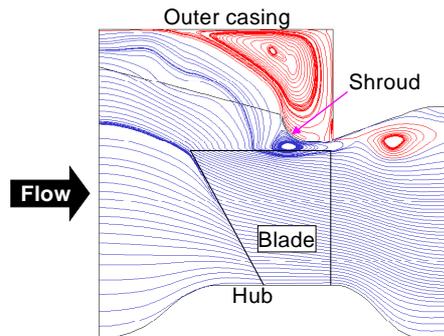


Fig.5 Meridional streamline in tangentially averaged flow ($f=0.291$)

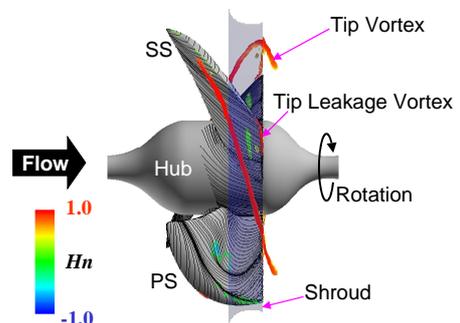


Fig.6 Tip vortex structure ($f=0.291$)

Fig.6 은 3 차원 와(渦)구조를 보이고 있다. 와의 색은 Normalized helicity 로써, 적(赤)색은 1, 녹(綠)색은 0 에 해당한다. 그림에서, Normalized helicity 는 거의 1 인 것으로부터, 와의 발생위치로부터 날개의 출구까지 강하게 휘감기고 있다는 것을 알 수 있다. 또한 Tip vortex 의 발생위치는 부압면 30% 코드위치로, Shroud 의 전단까지는 거의 날개면 측에 연하여 하류로 진행하다가, Shroud 하단에서 Shroud 의 벽면효과에 의하여 원주방향으로 진행하다가 하류로 흘러나가고 있다. 한편 날개의 후단에서 Tip leakage vortex 의 거동이 관찰되며, 거의 원주방향으로 발달하지만, 부압면으로부터 원주방향의 약 25%지점까지 발달하고 있다. 이 두 와류유동의 간섭에 대해서는 후술하기로 한다.

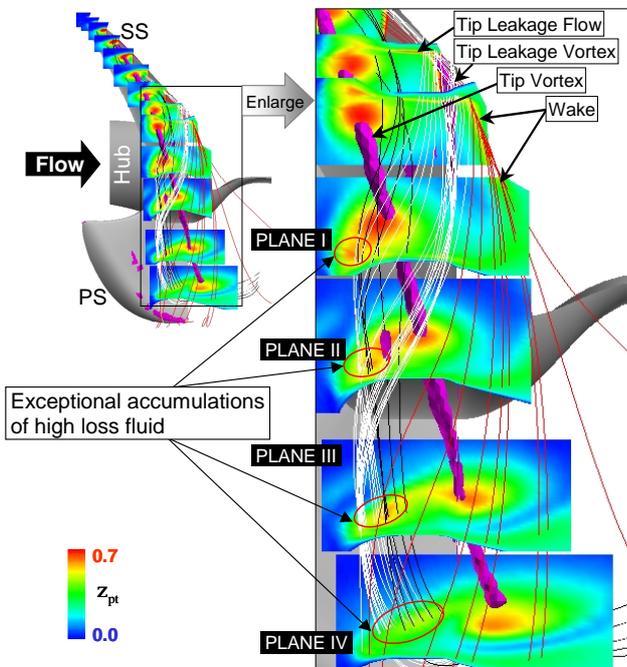


Fig.7 Vortex structures and total pressure loss distributions near rotor exit ($f=0.291$)

Fig.7 의 좌측은 설계점 운전에서의 유동장의 구조로, Tip vortex 의 거동과 함께 그 회전의 중심축에 수직한 단면에서의 전압손실분포 및 유선들을 보이고 있다. 또한 우측그림은 익후단(Trailing edge) 직후에서의 유동장을 확대하여 보여주는 것으로 출구근처에서의 와류유동, 그 중심에 수직한 단면에서의 전압손실분포 및 주위의 유선을 형태를 상세하게 보여준다. 단, 전압손실계수의 정의는 다음의 식(1)과 같다.

$$z_p = \frac{w(rc_q - r_l c_{q_l}) - (P - P_l) / r}{U_t^2 / 2} \quad (1)$$

또한, 그림에서 Vortex core 의 색은 전압손실분포와 구분하기 위하여 보라색으로 표시하였다. 그림에서 단면 I~IV 의 전압손실계수의 분포에서, 고

손실유체의 집중은 Vortex 의 중심 및 후류의 영역과 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며, 이들 전압손실계수가 높게 나타나고 있는 고손실 유체들의 거동을 분석하기 위하여, 이 단면들을 통과하는 유선의 거동을 살펴보기로 한다. 그림에서 적색 유선은 후류, 백색 유선은 Tip leakage flow, 그리고 흑색 유선은 Tip vortex 주위의 유동에 해당한다. 우선, 흑색 유선은 Tip vortex 발생위치로부터 그 중심 코어(core)를 따라 발달함과 동시에, vortex 의 회전에 따라 그 주위를 휘감고 있는 것을 알 수 있다. 그런데, 이러한 고손실 유체의 선회는 백색의 Tip leakage flow 유선과 적색의 후류 유선도 동일하게 나타나고 있으며, 이것은 이들 유선이 Tip vortex core 에 휘감기고 있다는 사실로 확인할 수 있다. 즉, 날개의 후류가 하류로 흘러나가는 것이 아니라, Tip vortex 의 강한 선회성분에 의하여 인접 날개의 정압면을 향하여 발달하고 있는 것이다. 이러한 Tip leakage flow 와 후류의 특이한 거동의 원인은 프로펠러팬의 경우, Tip vortex 의 형성과정에서 그 발생 위치인 날개 전단부가 개방되어 있어서 Shroud 와 같은 벽면효과가 존재하지 않으므로 Tip vortex 의 선회가 강하게 형성되고, 상대적으로 고손실, 저속유동인 Tip leakage flow 와 후류는 이러한 Tip vortex 의 강한 선회에 휘감기어 원주방향으로 진행하여 인접날개의 정압면과 간섭하게 되는 것으로 사료된다. 결과적으로, 원주방향의 Tip leakage flow 및 후류는 **Fig.7** 의 단면 I~IV 에서 Tip vortex 중심위치 외에 특별한 고손실 유체의 집중영역을 형성시키고 있는 것이다.

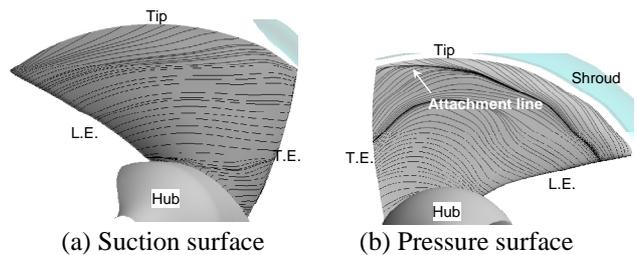


Fig.8 Limiting streamlines on blade surfaces ($f=0.291$)

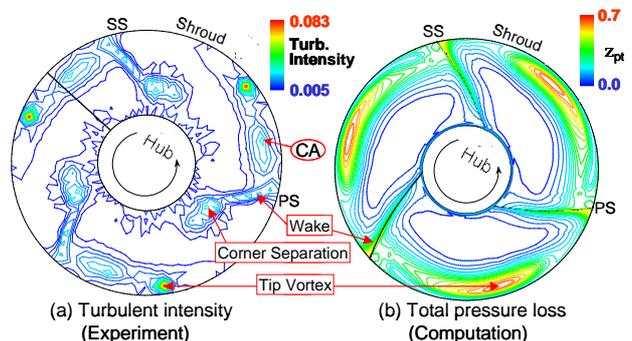


Fig.9 Limiting streamlines on blade surfaces ($f=0.291$)

Fig.7 에서 설명한 Tip leakage flow 및 후류의 원주방향 유동은 인접날개 정압면의 끝단과 간섭할

것으로 사료되며, 이 결과 날개 경계층 내에는 부착선이 형성될 것이다. Fig.8 은 날개표면에서의 한계유선(Limiting streamlines)으로 경계층내의 유동형태를 보여주며, Fig.7 에서 거론한 내용이 타당함을 증명하고 있다.

우선, 부압면의 한계유선은 원심력에 의한 반경방향의 유동 외에 특별한 유동형태는 존재하지 않음을 알 수 있다. 그러나, 경계층 내에서의 유동이 부압면의 경우보다 변화가 적을 것으로 여겨지는 정압면의 경우, 오히려 날개 끝단 근처에서 부착선(Attachment line)의 형성됨과 동시에, 날개의 원심력에도 불구하고, 날개 내경방향으로의 유동이 부착선 하단으로 형성되고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 Fig.7 에서 설명한 바와 같이 Tip vortex 의 강한 선회에 휘감긴 Tip leakage flow 와 후류가 인접 정압면에 충돌하여 형성시키는 것으로, 전술한 추론이 타당함을 보여주는 증거이다.

또한, 위에서 Tip leakage flow 와 후류의 원주방향 거동에 의해 형성되는 고손실 유체의 집중영역은 유동방향에 대해 수직한 단면에서도 그 특징을 나타낼 것으로 사료되며, Fig.9 는 이 사실을 잘 표현하고 있는 그림이다.

Fig.9 는 실험과 계산결과를 동시에 비교하고 있는 그림으로 해석의 타당성을 보여주는 동시에 위에 거론한 내용을 재차 설명하는 그림이다. 우선, 좌, 우의 각면은 프로펠러팬 출구의 동일위치에서의 결과로, 좌측 실험의 경우는 난류강도를, 우측 해석의 경우는 전압손실분포를 보여준다. 두 단면 그림의 비교에서 해석의 경우에 Corner separation 을 충실히 예측하지 못하고 있으나, 그 이외의 모든 유동 특징은 적절히 예측하고 있음을 알 수 있다. 즉, 후류를 비롯하여, Mid-pitch 부에 위치한 Tip vortex 의 거동과 더불어, Tip vortex 와 인접 날개의 정압면 사이에 나타나는 고 난류강도의 집중이, 해석의 경우에도 고손실 에너지의 집중으로 Tip vortex 와 압력면 사이에 길게 분포하여 나타나고 있음을 알 수 있다.

4.2 저유량 운전에서의 유동특성

Fig.10 은 저유량 영역에서의 유동해석결과를 보여준다. Tip vortex 의 발생 위치는 부압면의 약 60% chord 위치로, 설계점 유동에서보다 하류쪽에 위치함을 알 수 있다. 또한, 설계점 운전과 비교하여 Tip vortex 는 거의 원주방향으로 발달하여, 인접 날개의 정압면과 직접 충돌하고 있다. Tip vortex 의 Normalized helicity 는 발생위치를 벗어난 직 후에 거의 0 이 되고 있다. 이것은 Tip vortex 가 원주방향으로 발달하여, 축방향으로의 유동특성이 상실되는 것을 의미한다. 즉, Tip vortex 는 발생 후, 하류로 진행하지 못하고, Shroud 의 전방에서 환형(環形)구조를 형성하며, 정압면과의 간섭은 정압면의 끝단 약 60%지점에서 경계층 내에 박리현상을

만들어 내고 있다. 여기에서, 저유량 운전 유동장에서 나타난 Tip vortex 와 날개면과의 직접적인 충돌은 설계점에서의 Tip leakage vortex 및 후류에 의한 충돌보다 그 영향이 클 것으로 사료되며, 이로 인해 소음특성은 더욱 악화될 것으로 사료된다. 이 특성이 팬의 특성곡선인 Fig.2 에 반영되어 나타나고 있으며, Fig.10(c)의 날개 선단의 끝 영역에 나타나는 부착선은 환상형태의 Tip vortex 링 구조로 인한 대형 Blockage 의 영향에 의한 것으로 사료된다.

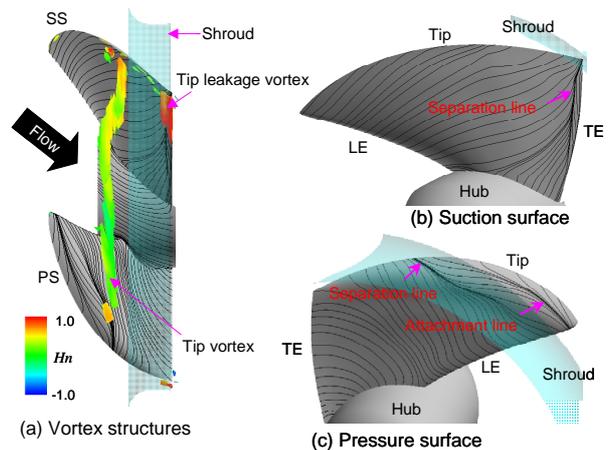


Fig.10 Vortex structures and limiting streamlines ($f=0.222$)

5. 결론

날개의 후단만을 Shroud 가 덮고 있는 프로펠러팬의 설계점 및 저유량점 운전 영역의 유동장에 대하여 유동해석을 수행하여, 그 결과를 가시화하고 분석한 결과를 통하여 다음의 결론을 얻었다.

- 설계점 운전의 경우, Tip vortex 는 발생위치는 부압면 30% chord 지점이며, 인접 날개면과의 직접적인 간섭을 발생시키지 않고 하류로 유출되고 있다.
- Tip vortex 가 간섭 없이 하류로 유출되고 있으나, 그 강한 선회성분에 의하여, Tip leakage flow 및 후류가 Tip vortex 주위에 휘감기고 있으며, 이들 유동은 원주방향으로 발달하여 인접 정압면과 간섭을 일으키고 있다. 이러한 간섭에 의하여 인접 날개의 정압면 날개 끝단부에 부착선 및 내경방향 유동장이 형성됨을 관찰할 수 있으며, 날개 출구 위치면, Tip vortex 와 정압면 사이에 실험에서는 고 난류강도가 해석에서는 고손실 유체가 집중되어 있음을 관찰 할 수 있었다.
- 저유량 영역 운전의 경우, Tip vortex 는 부압면 60% chord 위치에서 발생하고 있으며, Shroud 전방에서 거의 원주방향으로 발달하여, 인접 날개의 정압면과 직접 간섭하고 있다. 그 결과, 인접 날개의 정압면에 부착선 및 박리선이 관찰되며, 저유

량 운전에서의 소음발생이 설계유량에서의 소음발생보다 큰 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Akaike, S., and Kikuyama, K., 1993, "Noise Reduction of Pressure Type Fans for Automobile Air Conditioners," ASME J. Vibr. Acoust., 115, pp. 216-220.
2. Anderson, W.K., Thomas, J. L., and Van Leer, B., 1986, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations," AIAA Journal, Vol.24, No.9, pp.1453-1460.
3. Baldwin, B. S., and Lomax, H., 1978, "Thin Layer Approx-imation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flow," AIAA Paper No.78-257.
4. Chakravarthy, S. R., 1986, "The Versatility and Reliability of Euler solvers Based on High-Accuracy TVD Formulations," AIAA Paper No.86-0243.
5. Kim, S.H., Furukawa, M., Inoue, M., Ohnishi, T., and Yamamoto, J., 2003, "Behavior of Tip Vortex in a Propeller Fan Rotor," The 7th Asian International Conference on Fluid Machinery, No.30025.
6. Fukano, T., Fukuhara, M., Kawagoe, K., Hara, Y., and Kinoshita, K., 1990, "Experimental Study on the Noise Reduction of a Propeller Fan, 1st Report, Aerodynamic Characteristics," Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., Ser. B, 56, No. 531, pp. 3378-3382 (in Japanese).
7. Fukano, T., Kawagoe, K., Fukuhara, M., Hara, Y., and Kinoshita, K., 1990, "Experimental Study on the Noise Reduction of a Propeller Fan, 2nd Report, Noise Characteristics," Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., Ser. B, 56, No. 531, pp. 3383-3388 (in Japanese).
8. Furukawa, M., Yamasaki, M., and Inoue, M., 1991, "A Zonal Approach for Navier-Stokes Computations of Compressible Cascade Flow Fields Using a TVD Finite Volume Methods," Trans. ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 113, pp. 573-582.
9. Furukawa, M., Nakano, T., and Inoue, M., 1992, "Unsteady Navier-Stokes Simulation of Transonic Cascade Flow Using an Unfactored Implicit Upwind Relaxation Scheme With Inner Iterations," ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 114, No.3, pp.599-606.
10. Furukawa, M., Saiki, K., and Inoue, M., 1995, "Numerical Simulation of Three-Dimensional Viscous Flow in Diagonal Flow Impeller," ASME FED-Vol. 227, pp.29-36.
11. Inoue, M., Furukawa, M., 1994, "Artificial Dissipative and Upwind Schemes for Turbomachinery Blade Flow Calculations," VKI, Lecture Series, No. 1994-06
12. Jang, CM., Furukawa, M., Inoue, M., 2001, "Analysis of Vortical Flow Field in a Propeller Fan by LDV measurements and LES – Part I: Three-Dimensional Vortical Flow Structures" ASME J. Fluids Eng. 123 (2001) 748-754.
13. Jang, CM., Furukawa, M., Inoue, M., 2001, "Analysis of Vortical Flow Field in a Propeller Fan by LDV measurements and LES – Part II: Unsteady nature of Vortical Flow Structures due to tip vortex breakdown" ASME J. Fluids Eng. 123 (2001) 755-761.
14. Jang, CM., Furukawa, M., Inoue, M., 2003, "Frequency Characteristics of Fluctuating Pressure on Rotor Blade in a Propeller Fan" JSME Int. J, Ser. B, Vol.46, No.1, pp. 163-172.
15. Levy, Y., Degani, D., and Seginer, A., 1990, "Graphical Visualization of Vortical Flows by Means of Helicity," AIAA Journal, Vol.28, pp. 1347-1352.
16. Perry, A. E., and Chong, M. S., 1987, "A Description of Eddying Motions and Flow Patterns Using Critical-Point Concepts," Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 19, pp. 125-155.
17. Sawada, K., 1995, "A Convenient Visualization Method for Identifying Vortex Centers," Trans. Japan Soc. of Aero. Space Sci., Vol. 38, No. 120, pp. 102-116.