

역복사경계해석을 위한 다양한 조정기법 비교

김기완[†]·백승욱^{*}

Comparison of Regularization Techniques For an Inverse Radiation Boundary Analysis

Ki Wan Kim and Seung Wook Baek

Key Words: inverse radiation(역복사), conjugate-gradient method(공액구배법), hybrid genetic algorithm(혼합형 유전 알고리즘), Newton-method(뉴턴법), parameter estimation(파라미터 추정)

Abstract

Inverse radiation problems are solved for estimating the boundary conditions such as temperature distribution and wall emissivity in axisymmetric absorbing, emitting and scattering medium, given the measured incident radiative heat fluxes. Various regularization methods, such as hybrid genetic algorithm, conjugate-gradient method and Newton method, were adopted to solve the inverse problem, while discussing their features in terms of estimation accuracy and computational efficiency. Additionally, we propose a new combined approach of adopting the genetic algorithm as an initial value selector, whereas using the conjugate-gradient method and Newton method to reduce their dependence on the initial value.

1. 서 론

역복사 해석은 복사측정값을 가지고 복사 물성치들을 추정하는 것으로, 그중에서 축대칭 형상에서의 역복사해석은 매질 내부의 온도 분포나 복사 물리량을 추정하는데 적용되어 왔다.⁽¹⁾ Li는 매질 내부의 생성항 분포를 추정하였고,⁽²⁾ Ou와 Wu는 입사 복사강도의 크기가 매질의 방사량보다 크다고 가정하여 방사항을 무시한 채로 다양한 복사 물리량을 동시에 추정하였다.⁽³⁾

이제까지 다양한 조정법들이 역해석에 채택되었는데, 반복법의 한 형태로 최소 자승법을 목적

함수로 하여 이를 최소화 하는 최적기법이 주로 사용되어 왔다. 공액구배법 및 최급강하법 같은 기울기 기반 방법들은 정확한 값을 찾는 반면에 초기 가정값에 영향을 많이 받고, 기울기 정보를 구하기 위해 민감도 문제나 부가 문제를 별도로 풀어야한다. 유전 알고리즘과 같은 탐색적 기법은 초기 가정치의 영향을 덜 받는 반면 확률적 방법이므로 계산 시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 다른 방법으로는 최소 자승법의 형태 대신 각각의 에러 함수를 비선형 연립방정식으로 나타내고 이를 푸는 기법인 뉴턴법이 있다. 이 역시 기울기 정보를 이용하지만, 초기값이 해 근처에 있을 때, 빠른 수렴성을 보이는 특징이 있다.

본 연구에서는 흡수, 방사, 산란하는 축대칭 형상 매질에서 밖으로 향하는 복사 열유속을 측정하여, 그 값을 가지고 경계조건을 추정하는 역복사 문제를 고려하려 한다. 공액구배법, 뉴턴법, 혼합형 유전알고리즘과 같은 다양한 조정법을 적용하여 그들의 성능 및 특성을 비교하고, 초기값

[†] 한국과학기술원 대학원 항공우주공학전공

E-mail : kiwankim@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3754 FAX : (042)869-3710

^{*} 한국과학기술원 항공우주공학전공

에 영향을 많이 받는 기울기 기반 기법에서 그 영향을 줄이기 위해 유전 알고리즘을 초기값을 선택하는 기법으로 사용하는 새로운 접근법을 제안하고자 한다.

2. 이론 해석

2.1 직접 문제

Figure 1은 흡수, 방사, 산란하는 회체 매질로 차여져 있는 축대칭형상을 보여준다. 매질의 흡수 계수 및 산란 계수는 각각 0.5 m^{-1} 이다. 길이와 반경은 각각 4m 와 1m 이고 모든 벽은 확산적으로 방사 및 반사하며 각각의 온도와 방사율을 가지고 있다. 표면 2에서 밖으로 향하는 열유속(incident heat flux)을 정확히 계산하기 위해 공간 및 각도를 각각 20×50 의 검사체적과 8×14 의 검사각도로 이산화 하였다. 밖으로 향하는 열유속은 유한체적법으로 벽면에서의 복사강도를 구하고 이를 밖으로 향하는 모든 각도에 대하여 적분하여 계산하였다.⁽⁴⁾

2.2 조정법 (regularization method)

2.2.1 공역구배법

역해석에서 가장 많이 사용되는 기법으로 상당히 안정적이고 강건한 방법으로 알려져 있다. 기울기 정보를 이용하여 지역 최적값을 찾아가는데, 과거의 기울기 정보를 함께 이용함으로써 최급강화법보다 더 빨리 최적값을 찾아간다. 이 방법은 반복 계산을 통해 다음과 같이 더 나은값을 찾아간다.⁽⁵⁾

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k - \beta^k \mathbf{d}^k \quad (1)$$

여기서, k 는 반복 계산 수, β 와 \mathbf{d} 는 각각 이동거리와 방향을 나타내며, 이동 방향은 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{d}^k = \nabla S(\mathbf{P}^k) + \gamma^k \mathbf{d}^{k-1} \quad (2)$$

여기서, 공역 상수는 다음과 같이 구하게 된다.

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(\mathbf{P}^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(\mathbf{P}^{k-1})]_j^2} \quad (3)$$

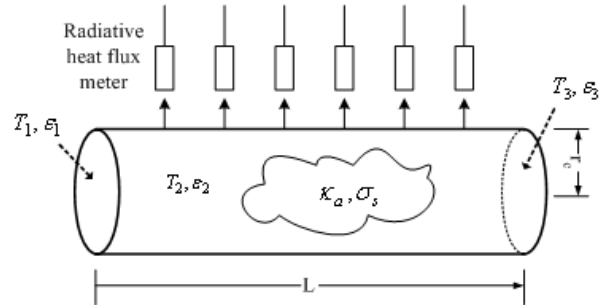


Fig. 1 Schematic of the physical system

첫 번째 반복에서는 $\gamma^0 = 0$ 이 된다. 여기서, N은 파라미터의 총 개수이다.

식 (3)의 공역 상수를 구하기 위해서는 목적함수의 파라미터에 대한 일차 미분값이 필요한데, 만약 측정값이 복사 열유속이라면 목적함수와 미분값이 다음과 같이 표현된다.

$$S(\mathbf{P}^k) = \sum_{i=1}^I (q_{m,i} - q_{e,i}(\mathbf{P}^k))^2 \quad (4)$$

$$[\nabla S(\mathbf{P}^k)]_j = -2 \sum_{i=1}^I J_{j,i} [q_{m,i} - q_{e,i}(\mathbf{P}^k)] \quad (5)$$

여기서, \mathbf{J} 는 파라미터에 대한 열유속의 1차 미분값인 민감도 상수로 다음과 같이 정의된다.

$$J_{j,i} = \frac{\partial q_{e,i}(\mathbf{P}^k)}{\partial P_j} \quad (6)$$

마지막으로, 식 (1)에서의 이동거리는 식 (5)를 이동거리 β에 대해 최소화하는 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\beta^k = \frac{\sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^J J_{j,i} d_j^k \right) [q_{e,i}(\mathbf{P}^k) - q_{m,i}]}{\sum_{i=1}^I \left\{ \sum_{j=1}^J (J_{j,i} d_j^k) \right\}^2} \quad (7)$$

2.2.2 혼합형 유전 알고리즘

유전 알고리즘은 자연선택이라는 다윈의 개념을 기본으로 한 탐색기법이다.⁽⁶⁾ 최적값을 찾아 하나의 해를 반복 계산하는 기울기 기반 기법과는 다르게 해들의 집합이 반복 계산된다. 부모세대에서 좋은 값을 가지는 해들을 선택하고, 이를 교차(crossover), 돌연변이(mutation) 연산을 통해 더 좋은 해들을 찾고, 이 값을 자녀세대로 넘겨준다. 이러한 절차가 정해진 세대수만큼 반복 계

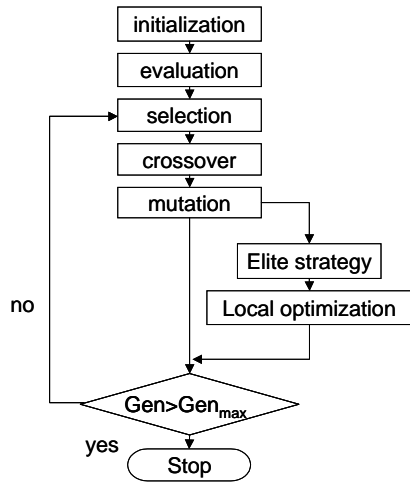


Fig. 2 The flowchart of a hybrid genetic algorithm

산되고 그 과정에서 가장 좋은 최적값을 찾게 된다. 유전 알고리즘은 최적화하려는 목적함수의 설계변수에 대한 기울기의 정보가 필요치 않기 때문에 역해석에서 추정해야 하는 파라미터가 많을 경우나 비선형 문제에서 유용하게 사용될 수 있다. Fig. 2는 본 연구에서 사용된 혼합형 유전 알고리즘의 순서도를 보여준다. 해집단의 수를 10으로 하고, 염색체의 표현은 실수형을 고려하였으며, 선택(selection)은 품질 비례 선택 방법 중에서 해들의 다양성 확보를 위해 제안된 확률 보편 샘플링(stochastic universal sampling)을 사용하였고, 교차(crossover)는 BLX- α 산술적 교차 ($\alpha=0.5$)를 사용하였으며, 돌연변이(mutation)는 시간이 지남에 따라 교란의 정도를 감소시키는 비균등 돌연변이(non-uniform mutation)를 적용하였는데, 이 연산이 미세 조정과 유사한 작업을 하게 된다. 이러한 유전연산이 끝나면 엘리트 전략으로 그 세대에서 가장 품질이 좋은 해를 따로 보관하고, 이 해에게만 지역 최적화 알고리즘을 적용한다. 지역 최적화 알고리즘은 비균등 돌연변이에서 사용한 연산자를 사용하였다.⁽⁷⁾

2.2.3 뉴턴법

기본적인 원리는 앞에서 설명한 공역구배법과 유사하며, 목적함수 및 이동거리, 방향에 대한 식들이 다음과 같이 달라진다.⁽⁸⁾

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \Delta \mathbf{P}^k \quad (8)$$

여기서, 이동거리 및 방향을 나타내는 Δ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta \mathbf{P}^k = -[\mathbf{J}^T \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{S} \quad (9)$$

또한, 목적함수 \mathbf{S} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{S}(\mathbf{P}^k) = \mathbf{q}_{e,i}(\mathbf{P}^k) - \mathbf{q}_{m,i} \quad (10)$$

2.3 상관해석

민감도 해석은 파라미터의 추정의 용이성 및 동시추정 가능성에 대한 유용한 정보를 제공하지만 추정해야 하는 파라미터의 개수가 많을 때, 민감도 계수들이 선형적으로 의존적인지에 대한 여부를 판단하기가 쉽지 않다. 상관 해석은 이러한 경우에 각각의 파라미터들이 얼마나 서로 의존적인지에 대한 정보를 준다.

상관 계수는 민감도 계수를 이용하여 다음과 같이 구하게 된다.

$$X_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}}, \quad r_{ij} = [\mathbf{J}^T \mathbf{J}]^{-1}, \quad i, j = 1, np \quad (11)$$

여기서, np 는 파라미터 개수를 의미한다.

만약 민감도 계수의 절대값이 0.9 이상이면 파라미터간의 상호의존성이 매우 큼을 나타내고, 이 경우 기울기 기반 기법을 이용할 경우 동시 추정이 어렵게 된다.

3. 결과 및 고찰

다양한 최적화 기법을 비교하기 위해서 총 5개의 경우를 고려하였다. Case 1에서 3까지는 상수 값을 추정하는 것이고, case 4와 5는 다항식의 계수를 추정하는 것이다. Table 1은 추정해야하는 파라미터와 각각의 파라미터 간의 상관계수를 보여준다. 상관계수는 엄밀해(exact value)를 가지고 계산한 것이다. Case 3에서 5까지에서 상관계수의 절대 크기가 0.99를 초과하는데, 이는 기울기 기반 기법을 사용할 경우 동시 추정에 어려움이 있을 수 있음을 나타낸다. 방사율과 차수(order)를 맞추기 위해 온도와 다항식 계수를 1000으로 나누어서 추정 절차를 수행하였다.

3.1 다양한 최적법의 성능 비교

다양한 최적법으로 얻은 결과들을 비교하고 Table 2에 나열하였다. 먼저 유전 알고리즘은 확률적인 방법이며 해집단 수에 비례하여 계산 시

Table 1 Parameters to be estimated and correlation coefficients

Case	Parameters	Exact value	Correlation coefficients
		($T_i=T_i/1000$, $p_i=p_i/1000$)	
1	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	0.8	-0.905, 0.799, 0.824
2	T_1, T_2, T_3	0.6, 1.2, 0.8	0.910, 0.823, 0.839
3	ε_2 and T_2	0.8, 1.2	-0.997
4	$T_2 = p_1+p_2r+p_3r^2+p_4r^3$	0.6, 0.95143, -0.45023, 0.0562	-0.976, 0.933, -0.889, -0.987, 0.963, -0.992
5	$T_2 = p_1+p_2r+p_3r^2+p_4r^3$ and ε_2	0.6, 0.95143, -0.45023, 0.05622, 0.8	-0.999, 0.997, -0.993, 0.985, -0.999, 0.995, -0.998, 0.983, -0.972

Table 2 Comparison of iteration numbers and computational time for various regularization techniques

Case	HGA		CGM		Newton		
	CPU time (sec)	initial guess	iteration no.	CPU time (sec)	initial guess	iteration no.	CPU time (sec)
1	11464	0.1	11	513	0.1	5	158
		0.5	9	247	0.5	4	104
		0.7	7	180	0.7	3	99
2	18681	0.5	106	4280	0.5	9	255
		1.0	26	1100	1.0	6	213
		2.0	20	540	2.0	8	304
3	16570	0.1-0.7	-	-	0.5	12	348
		0.9	10	268	0.9	5	138
4	-	0.1-0.9	-	-	0.5	17	991
5	-	0.1-0.9	-	-	0.1-0.9	-	-

간이 소요되므로 수렴 조건을 만족하기 위해서 10000초 이상의 시간이 필요했다. Case 4와 5에서는 주어진 시간에 수렴조건을 만족하지 못했다.

공액구배법의 경우 case 1과 2에서 혼합형 유전알고리즘보다 적은 시간에 다양한 초기값에서 수렴조건을 만족하였다. 하지만, 초기값에 따라서 반복수와 계산 시간에 차이가 존재했으며, 이를 통해 기울기 기반 기법은 초기값에 많은 영향을

받음을 확인할 수 있었다. 상관계수의 크기가 커지면서 case 3에서부터 수렴조건을 만족하지 못하거나 발산하는 초기값이 많아졌고, case 4와 5의 경우에는 수렴조건을 만족하는 초기값을 찾지 못했다.

뉴턴법의 경우, 모든 경우에서 공액구배법보다 빠른 수렴 성능을 보였고, 몇몇의 경우에 공액구배법이 수렴조건을 만족하지 못한 초기값에서도 최적값을 찾았다. 하지만, 역시 case 5에서 수렴

Table 3 Comparison of iteration numbers and computational time when HGA is adopted as initial value selector

Case	GA + CGM		GA + Newton	
	iteration no.	CPU time (sec)	iteration no.	CPU time (sec)
1	8	397	3	69
	9	590	3	65
	9	602	3	66
2	33	1556	7	260
	35	1639	11	443
	38	1787	9	368
3	27	743	5	130
	43	1548	5	140
	81	1944	4	112
4	936	45158	7	312
5	3232	161258	5	283

조건을 만족하는 초기값을 찾지 못했다.

이러한 단점을 극복하기 위해 혼합형 유전알고리즘에서 찾아낸 적합도가 뛰어난 해를 기울기 기반 기법의 초기값으로 사용하였고, 그 결과는 Table 3에 나열하였다.

먼저 혼합형 유전 알고리즘을 1 세대에 걸쳐 실행시키고 난 후, 그 세대에서 최고의 적합도를 가지는 해를 공역구배법과 뉴턴법의 초기치로 사용하였는데, 전체적으로 초기치에 따른 편차는 상당히 줄어들었다. 공역구배법은 case 4와 5에서 최적값을 찾을 수 있었지만, 계산 시간이 매우 길어졌다.

뉴턴법 역시 case 5에서 최적값을 찾았고, 모든 경우에서 공역구배법보다 짧은 시간에 최적값을 찾았다. 그러므로, 유전 알고리즘과 결합하여 실행시키기에는 뉴턴법이 좀더 효율적임을 알 수 있었고, 유전 알고리즘 또한 양질의 초기치를 제공함을 알 수 있었다.

결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(a) 파라미터들간의 상관계수가 클수록, 파라미터 추정에 필요한 반복수가 증가하므로, 반복수를 줄이기 위해 적절한 초기치 가정이 필요하다.

(b) 다수의 파라미터 추정 문제에서 혼합형 유전알고리즘을 기울기 기반 기법들의 초기치를 제공하는 도구로 채택함으로써 기울기에 대한 영향을 줄일 수 있었다.

(c) 다양한 초기 가정치에서 뉴턴법이 공역구배법 보다 빠른 수렴성을 보였다.

후 기

본 연구는 CERC(연소기술연구센터)의 지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Kurpisz, K. and Nowak, A. J., 1995, *Inverse Thermal System*, Computational Mechanics Publication, USA, pp. 230-235.
- (2) Li, H. Y., 2001, "A Two-Dimensional Cylindrical Inverse Source Problem in Radiative

- Transfer", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 69, pp. 403-414.
- (3) Ou, N. R. and Wu, C. Y., 2001, "Simultaneous Estimation of Extinction Coefficient Distribution, Scattering Albedo and Phase Function of a Two-Dimensional Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 4663-4674.
- (4) Chui, E. H., Raithby, G. D., and Hughes, P. M. J., 1992, "Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosure with the Finite Volume Method", *J. Thermo. Heat Transfer*, Vol. 6, pp. 605-611.
- (5) Özisik, M. N. and Orlande, H. R. B., 2000, *Inverse Heat Transfer*, Taylor & Francis, New York.
- (6) Michalewicz Z., 1999, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-Verlag, Berlin.
- (7) Kim, K. W., Baek, S. W., Kim, M. Y., and Ryu, H. S, 2003, "A Hybrid Genetic Algorithm for the Estimation of the Wall Emissivities in a Two-Dimensional Irregular Geometry", *The 8th UK National Heat Transfer Conference*, Oxford, UK.
- (8) Yang, C. Y., 2003, "Estimation of Boundary Conditions in Nonlinear Inverse Heat Conduction Problems", *J. Thermo. Heat Transfer*, Vol. 17, No. 3, pp. 389-395.