

# 사출성형에서의 Penalty Formulation 을 이용한 Packing 과정 해석

강성용<sup>†</sup> · 김승모\* · 김선경\*\* · 이우일\* · 김대환\*\*\* · 김우규\*\*\* · 김형채\*\*\*

## Analysis of Packing Procedure Using Penalty Formulation in Injection Molding

Sung Yong Kang<sup>†</sup>, Seung Mo Kim<sup>\*</sup>, Sun Kyung Kim<sup>\*\*</sup>, Woo Il Lee<sup>\*</sup>,  
Dae Hwan Kim<sup>\*\*\*</sup>, Woo Kyu Kim<sup>\*\*\*</sup> and Hyung Chae Kim<sup>\*\*\*</sup>

**Key Words :** Packing process (보압과정), Penalty parameter (Penalty 상수), Compressibility (압축성)

### Abstract

The penalty method has been widely applied to analyses of incompressible fluid flow. However, we have not yet found any prior studies that employed penalty method to analyze compressible fluid flow. In this study, with an eye on the apparent similarity between the slight compressible formulation and the penalty formulation, we have proposed a new approximate approach that can analyze compressible packing process using the penalty parameter  $l$ . Based on the assumption of the isothermal flow, a set of reference solutions was obtained to verify the validity of the proposed scheme. Furthermore, we have applied the proposed scheme to the analysis of the packing process of different cases.

#### 기호설명

$u_i$	: 속도
$P$	: 압력
$\tau_{ij}$	: 전단응력텐서
$d_{ij}$	: 변형률 텐서
$I_2$	: 2 차 불변 변형률 텐서
$\lambda$	: Penalty 파라미터

### 1. 서론

Polymer processing 중 하나인 Injection molding 의 Packing 과정에 대한 수치적인 모사는 주로 GHS 모델 등과 같은 유동 모델에 의해 표현되었다. 그러나 그런 경우에는 표면형상에 영향을 미치는 Fountain(Vulcano) flow 를 제대로 표현할 수 없기

때문에 Navier-Stokes 식과 같은 Full equation 을 풀어야 한다.

Full equation 을 사용할 때 Computational resource 와 Calculation time 이 중요한 문제가 되는데, 이런 문제들로 해석과정에서 보통 Mixed formulation 보다 Penalty formulation 가 더 적당하다. 그러나 Penalty formulation 은 주로 Incompressible flow 에 적용되었고 Compressible flow 에 적용된 예는 아직 확인된 바 없다.

이 논문에서는 Slight Compressible formulation 과 Penalty formulation 사이의 형태적 유사성에 착안하여 penalty parameter 를 이용한 새로운 formulation 을 제시하고, Compressible flow 문제와 관련 있는 Packing procedure 를 해석하고자 한다.

### 2. Mathematical Modeling

Packing process 에서는 압축효과가 해석의 주안점이 된다. 그래서 지배방정식 중 Mass Conservation 식이 Incompressible flow 와 다른 형태를 가지게 된다.

<sup>†</sup>

서울대학교

E-mail : xepyrus6@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1657 FAX : (02)886-0631

\*

서울대학교

\*\*

서울산업대학교

\*\*\*

삼성전자

## 2.1 Momentum Equation For Packing Process

유체 거동을 설명하는 Momentum equation 은 다음과 같이 쓸 수 있다.[1]

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = -p_{,i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = 2\eta(I_2, \theta) d_{ij} \quad (2)$$

$$\text{where, } I_2 = (2d_{ij}d_{ji})^{1/2}, \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Polymer 의 점도 거동에 관한 모델은 Cross-WLF 모델을 사용하였고 식은 다음과 같다.

$$\eta(I_2, \theta) = \frac{\eta_0(\theta)}{1 + (\eta_0(\theta) \cdot I_2 / \tau)^{1-n}} \quad (3)$$

$$\theta \geq D_2 \quad \eta_0 = D_1 e^{-A_1(\theta - D_2)/(A_2 + \theta - D_2)}$$

$$\theta < D_2 \quad \eta_0 = \infty$$

$\theta$ 는 온도를 의미하며  $D_1, D_2, A_1, A_2, \tau, n$  는 polymer 의 종류에 따라 정해지는 상수값을 나타낸다. 위의 운동량 보존에 대한 식과 점도 모델은 물질이 Compressible 이든 Incompressible 이든 상관없이 사용 가능하다

## 2.2 Continuity Equation For Packing Process

일반적인 연속 방정식에 대한 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho u) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot u) + u \cdot \nabla \rho = 0 \quad (5)$$

density  $\rho$  는 pressure 와 temperature 에 의존하는 상태변수로써, chain rule 을 사용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

위의 결과를 이용하여 연속 방정식을 써보면,

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \nabla p \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) + \nabla \cdot u \quad (8)$$

여기에서  $\kappa = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$  는 Isothermal compressibility

coefficient,  $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  는 Thermal expansion

coefficient 로 각각 정의된다. 따라서 위의 연속 방정식은 최종적으로 다음과 같다.

$$\kappa \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \nabla p \right) - \beta \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) + \nabla \cdot u = 0 \quad (9)$$

Chung 의 이론적인 분석에 의하면, Packing 과정의 해석을 위해 다음과 같은 가정을 할 수 있다.

1. Packing 과정의 몰드 내 유동은 Isothermal 로 가정할 수 있다. Filling process 의 마지막 단계 온도가 그대로 유지되는 아주 작은 시간 내에 주로 packing 과정이 이루어지기 때문에  $\beta \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right)$  값은 다른 항에 비하여 상대적으로 작다고 가정한다.

2. Packing process 중 mold 는 polymer melt 로 가득 채워져 있기 때문에 Packing pressure 에 의해 melt 의 압력은 Hydrostatic 하게 변화한다. 물론 압력 그 자체의 값은 크지만 Filling process 에 비해 Pressure gradient 의 값이 상대적으로 작다. 이러한 작은 Pressure gradient 에 의해 Packing process 중 velocity 는 아주 작은 값을 나타내게 된다. ( $u \cdot \nabla p \approx 0$ )

위의 가정에 의해 연속 방정식은 좀더 간략한 형태로 바뀌게 된다.

$$\kappa \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u = 0 \quad \text{혹은} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot u = 0 \quad (10)$$

(10)과 같은 형태의 식을 Slight compressible formulation 이라고 한다. 여기서  $\kappa$  의 값은 일반 액체에 대해  $10^{-9} \sim 10^{-10} / Pa$  의 정도이며, 상태 방정식을 통하여 얻을 수 있다.

## 2.3 Energy Equation For Packing Process

Packing process 해석을 위한 energy equation 은 다음과 같다.

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \Phi + \Theta \quad (11)$$

where,  $\Phi = T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  (소산항),

$$\Theta = \beta \theta \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \nabla p \right) \quad (\text{팽창/압축 일})$$

이번 연구에서 energy equation 은 3D packing process 를 해석하는데 사용되었다.

#### 2.4 Equation of State For Packing Process

일반적으로 액체에 대한 상태방정식으로는 Tait equation 이 많이 사용된다. 본 연구에서도 다음과 같은 형식을 이용하여 density variation 을 구하였다.

$$v(T, p) = v_o(T) \left\{ 1 - C \ln \left( 1 + \frac{p}{B(T)} \right) \right\} + v_i(T, p) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & v_o(T) = b_{1m} + b_{2m} \bar{T} \\ \text{for } T > T_i & B(T) = b_{3m} e^{-b_{4m} \bar{T}} \\ & v_i(T, p) = 0 \\ & v_o(T) = b_{1s} + b_{2s} \bar{T} \\ \text{for } T < T_i & B(T) = b_{3s} e^{-b_{4s} \bar{T}} \\ & v_i(T, p) = b_7 e^{(b_8 \bar{T} - b_9 p)} \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} p &= \text{pressure} & T &= \text{temperature} \\ T_i &= b_5 + b_6 p = \text{transition temperature} \\ \bar{T} &= T - b_5 & C &= 0.0894 (\text{universal constant}) \end{aligned}$$

### 3. Finite Element Formulation

FEM 은 compressible 과 incompressible 한 유동 전체에 성공적으로 적용할 수 있다. 운동방정식과 연속방정식에 FEM 을 적용하는 방법에 있어서 주요 변수인 속도와 압력을 어떻게 처리하느냐에 따라서 다음 세가지 방법으로 크게 나누어진다.[2]

1. Velocity-pressure integrated (Mixed) method
2. Penalty method
3. Segregated velocity-pressure method

여기서는 Mixed method 와 Penalty method 에 대해서만 논의를 하겠다. 앞에서도 언급하였지만 Computational resource 와 Calculation time 의 영향으로 Mixed formulation 보다 Penalty formulation 이 더욱 적당하다.

그러나 Penalty formulation 은 비압축성 유동을 풀기 위해  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  조건을 Constraint(Variational analysis)로 받아들이는 형태로 식이 유도되기 때문에, 연속 방정식이 근사적으로 만족된다는 특성을 갖는다. Penalty method 에서는 압력이 속도를 기반으로 Penalty term 으로 주어지며 다음과 같이 근사적으로 표현된다.

$$p = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \text{혹은} \quad p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

$\lambda$  는 penalty parameter 를 나타낸다. 기존 연구에 따르면,  $\lambda$  는  $10^4 \sim 10^{13}$  정도의 큰 범위를 가지며 그 범위 내에서 안정된 해를 얻을 수 있다고 알려져 있다. 즉, 충분히 큰  $\lambda$  값에 대해서는  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  이 충분히 만족되므로 비압축성 유동 효

과를 나타나지만, 상대적으로 작은  $\lambda$  값에 대해서는 mass loss 가 생기게 된다.

실제로 앞에서 살펴본 packing process 에 대한 연속방정식 (10)과 Penalty formulation 에서의 압력 항은 유사한 형태를 가진다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Mass conservation} \quad (14)$$

(Slight compressible formulation)

$$p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Penalty formulation} \quad (15)$$

두 식을 비교해보면 적절한  $\lambda$  값에 따라 압축성 효과를 고려하는 것이 가능함을 알 수 있다.

운동방정식과 관련하여 위의 Slight compressible formulation 은 Mixed method 을 이용하여  $u, p$  를 동시에 풀며, Penalty formulation 에서는 운동방정식에서 얻은  $u$  을 통하여  $p$  를 구하게 된다.

Mixed method 에서는  $p$  값의 갱신을 통해 유동에 영향을 주고 받게 되지만 Penalty method 에서는 그러한  $p$  의 갱신 과정이 없다. 이를 위해 여기에서는 penalty parameter  $\lambda$  의 갱신을 통해 Penalty formulation 이 Slight compressible formulation 을 모사하는 새로운 방법을 제안하였다.

#### 3.1 Penalty Formulation For Small Compressibility

식(15)을 식(14)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (-\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ & -\nabla \cdot \mathbf{u} \left( \frac{\partial}{\partial t} \lambda \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ & \nabla \cdot \mathbf{u} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{1}{\kappa} \right) + \lambda \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

Packing pressure 가 적용되기 시작하는 아주 작은 시간에서의 유동변화를 제외하고 Packing process 전반에 걸쳐 유동장을 Quasi-steady state 로 본다면 위 식의 마지막 항  $\lambda \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)$  은 무시할 수 있는 값이 되고 다음과 같은 간략한 형태로 바뀌게 된다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{1}{\kappa} \right) = 0 \quad (17)$$

따라서 다음처럼 penalty parameter  $\lambda$  의 시간에 따른 변화량을 얻을 수 있다.

$$\Delta \lambda = \frac{1}{\kappa} \Delta t \quad (18)$$

Injection molding process 를 Penalty method 로 해

석할 경우, Filling process 과정은 비압축성이므로 penalty parameter  $\lambda$  값을 상당히 크게 주어 해석이 가능하다. 또한 다음 Packing process 에서는 동일한 formulation 을 그대로 이용하되 작은 penalty parameter 의 값을 사용하여 압축성 효과를 고려할 수 있다. 즉, penalty parameter  $\lambda$  값을 초기값 0 에서부터 식 (18)을 이용하여 매 시간마다 증분하여 사용한다.

이처럼 Injection molding process 전체를 하나의 Penalty method 코드로 적절히 해석할 수 있으므로 Mixed method 에 비해 많은 장점이 있으며 특히 3 차원 문제를 풀 때 더욱 용이해진다.

### 3.2 Computational Aspects of Penalty Formulation For Small Compressibility

식 (18)을 이용하여 Packing process 중 penalty parameter  $\lambda$  의 갱신은 다음과 같이 이루어진다.

$$\lambda^{t+1} = \lambda^t + \Delta\lambda \quad (19)$$

그리고 Penalty formulation 으로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$p^{t+1} = -\lambda^{t+1} \nabla \cdot u^{t+1} \quad (20)$$

식 (19)를 식 (20)에 대입하면 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} p^{t+1} &= -(\lambda^t + \Delta\lambda) \nabla \cdot u^{t+1} \quad (21) \\ &= -\lambda^t \nabla \cdot u^{t+1} - \Delta\lambda \nabla \cdot u^{t+1} \\ &\approx p^t - \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot u^{t+1} \Delta t \end{aligned}$$

또, Slight compressible formulation 을 시간에 대하여 explicit 하게 적분하면,

$$p^{t+1} = p^t - \left(\frac{1}{\kappa}\right) \nabla \cdot u^t \Delta t \quad (22)$$

얻는다. 식 (21)은 Packing 되는 순간 압력이 급격히 증가하여 transient effects 를 무시할 수 없는 매우 짧은 시간을 제외하고는 모두 적용할 수 있다.

여기에서는 위에서 제시한 이론적인 배경을 통해 간단한 2D 문제의 해석을 수행하였다. 그 결과를 이용하여 검증 을 시도하였고, 3 차원 문제에 대해서도 제시한 방법을 적용해 해석해 보았다.

우선 Mixed method 을 통하여 Slight compressible flow model 를 해석하였고, 그리고 Penalty method - Reduced integration formulation ( $(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{K}')\mathbf{u} = \mathbf{F}$ )을 기반으로 앞서 새롭게 제안한 방법을 적용하여 해석한 결과를 비교하였다. Time integration 은 Fully implicit scheme 을 사용하였다.

검증을 위하여 Reference solution 을 얻었으며, 정

확성을 위하여 등온상태의 유동을 가정하였다.

### 3.3 Comparison of Results between by Penalty Method and by Mixed Method

다음과 같은 간단한 형상에 대하여 입구 부분에

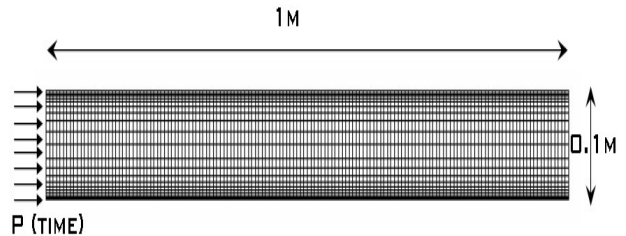


Fig. 1 Simple geometry for verification.

서 Packing pressure 를 시간에 대한 함수로 주고 다른 세 면에 대해서는 no slip 조건을 부가하여 added mass 를 계산하였다. Application 을 제외한 검증문제는 모두 Isothermal assumption 을 하였다.

15x200 개의 유한요소를 사용하였으며, 그에 따른 node 수는 Mixed method 를 사용할 때는 9341 개, Penalty method 를 사용할 때는 3171 개였다.

Fig. 1 의 Mass conservation 을 고려하면,

$$\begin{aligned} \int_{Volume} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho u) \right) dV &= \int_{Volume} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_{Surface} \rho u \cdot dS \\ &= \int_{Volume} \rho \kappa \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) dV + \int_{Surface} \rho u \cdot dS \\ &= \int_{Volume} \rho \kappa \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) dV - \dot{m} = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

위의 (23)식으로부터 added mass 량이 시간에 대한 압력증가량에 비례하는 값임을 알 수 있다. 이를 확인하기 위해 시간에 대한 압력증가량을 일반 공정조건으로 사용할 수 있는  $5 \times 10^6, 10^7 Pa/s$  으로 계산하였다. 시뮬레이션에 필요한 물성치는 240°C 를 기준으로 한 HDPE 를 기준으로 하였다.

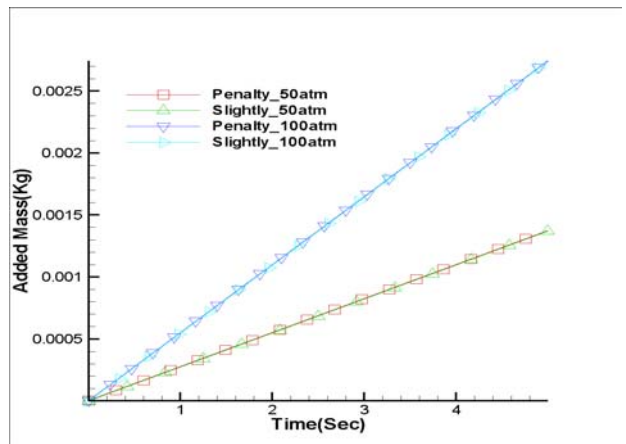


Fig. 2 Relationship between added mass and rate of change of pressure with respect to time

Fig. 2 는 Mixed method 와 Penalty method 를 사용하여 계산한 Added mass 량을 나타낸다. 시간에 대한 압력 증가량이 2 배가 되었을 때 추가되는 질량 유속량 또한 2 배가 되는 것을 확인할 수 있다.

3.3.1  $5 \times 10^6 Pa/s$  의 경우

Fig.3 과 Fig.4 는 Packing 이 되는 순간 압력이 급격히 증가하여, transient effects 를 무시할 수 없는 짧은 시간 이후 steady state 에 이르게 되었을 때의 속도  $u(m/s)$ 의 분포이다. 비록 시간에 따른 압력 전파는 나타나지 않았지만 두 결과가 상당히 동일함을 알 수 있다. Fig.5 는 Packing process 를 두 가지 방법으로 풀었을 경우의 추가된 질량을 나타낸 그림이다. 그림에서 보듯이 Penalty method 를 사용한 경우가 Mixed method 를 사용한 경우보다 항상 질량 추가량이 많았으나, 추가된 질량의 차이가  $1.e-6kg$  미만임을 확인할 수 있다.

계산시간은 같은 조건의 문제를 Frontal solver 를 이용하여 계산하였을 때 Mixed method 가 Penalty method 에 비해 4 배 이상 더 많이 걸렸다..

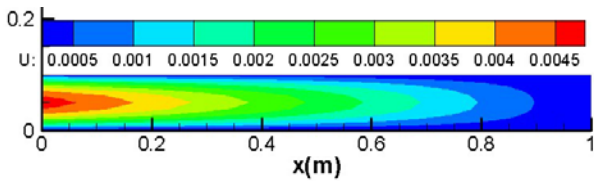


Fig. 3 Distribution of velocity component u obtained by slight compressible formulation

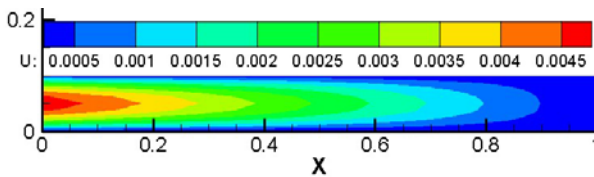


Fig. 4 Distribution of velocity component u obtained by penalty formulation

3.3.2  $1 \times 10^7 Pa/s$  의 경우

$5 \times 10^6 Pa/s$  에서와 마찬가지로 Fig.6 와 Fig.7 은 Packing 이 되는 순간 압력이 급격히 증가하여, transient effects 를 무시할 수 없는 짧은 시간 이후 steady state 에 이르게 되었을 때의 속도  $u(m/s)$ 의 분포이다.

4. Application

Fig.10 과 Fig.11 은 이 연구에서 새롭게 제안된 scheme 을 3D 의 간단한 사각 mold 에 대하여 적용

한 결과이다. 시간에 따른 Packing pressure 는 Fig.9 와 같이 주었으며 물성치는 앞에서 검증한 문제와 같다.

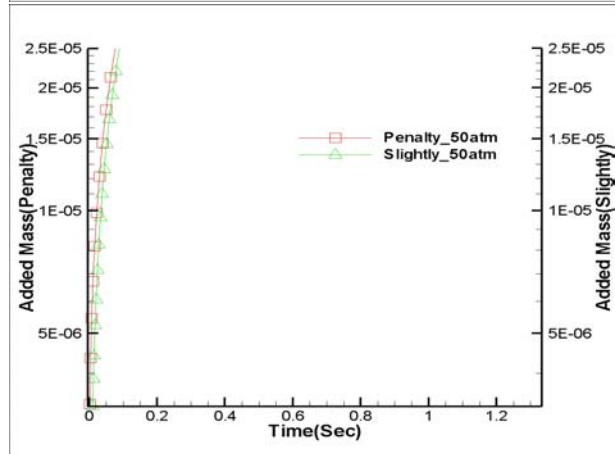
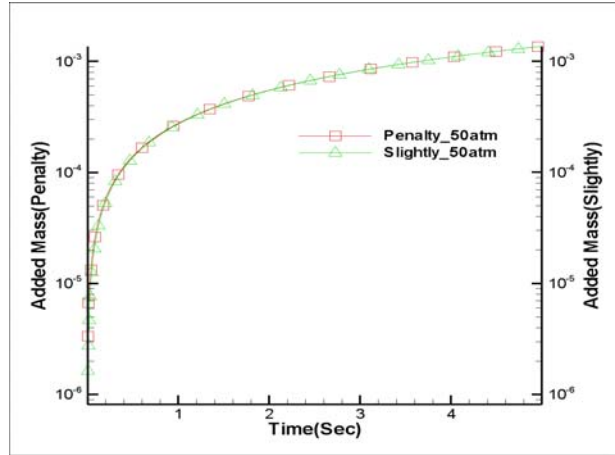


Fig. 5 The numerical measurement of added mass over the time calculated by two kind of method

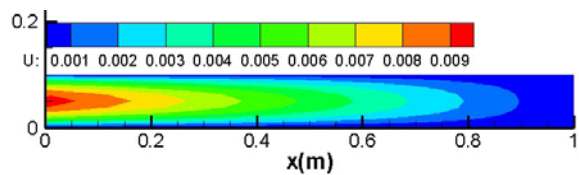


Fig. 6 Distribution of velocity component u obtained by slight compressible formulation

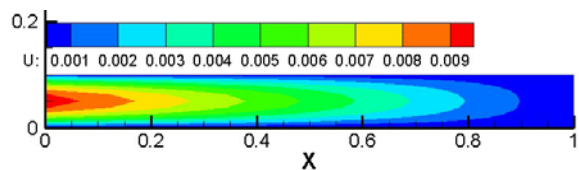


Fig. 7 Distribution of velocity component u obtained by penalty formulation

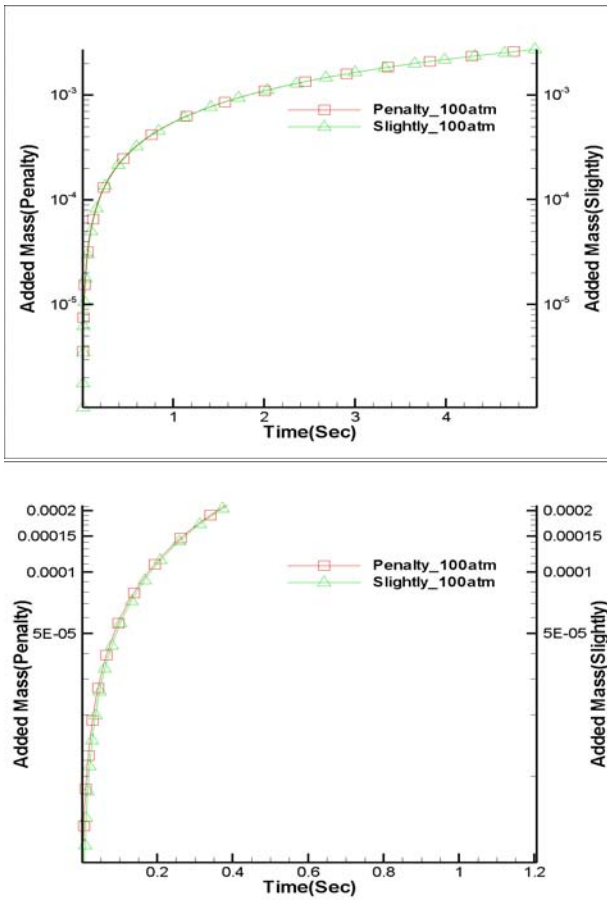


Fig. 8 The numerical measurement of added mass over the time calculated by two kind of method

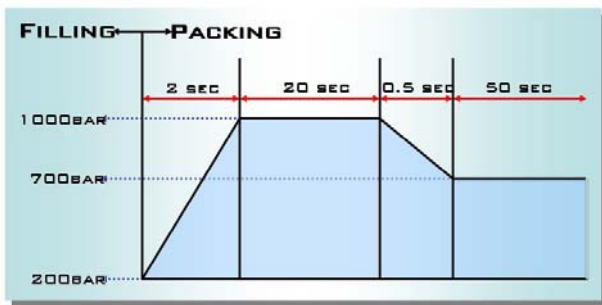


Fig. 9 The processing condition for packing pressure

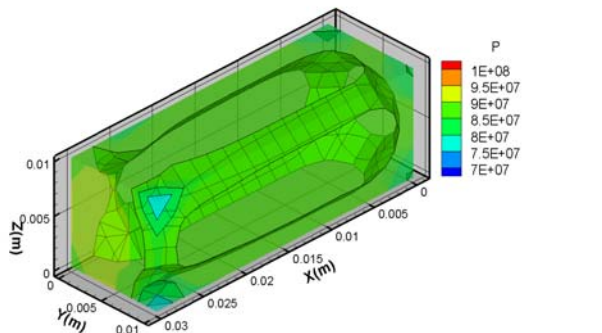


Fig. 10 The packing pressure(arrows) applied on the half of surface of the simple box

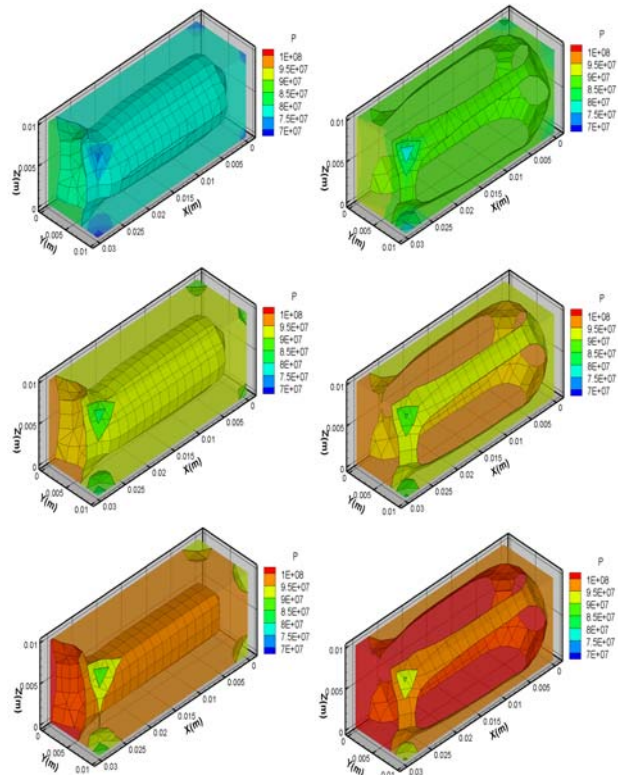


Fig. 11 The time dependent pressure distribution at every 0.2 second from 1.0 second

### 5. 결론

packing process 의 적절한 해석을 위한 간단하지만 효과적인 알고리즘을 제시하였다. 제시한 알고리즘의 타당성을 알아보기 위하여 verification 문제를 이용하여 검증하였다. 또한 2D 에서 더 나아가 3D 문제에도 적용해보았다.

### 참고문헌

- (1) Peter Kennedy, 1995, 'Flow Analysis of Injection Molds', Hanser Publishers.
- (2) J.N.Reddy, D.K.Gartling, 1994, 'Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics', CRC press.
- (3) Wen-Yen Chiu, Leo-Wang Chen, 1991, 'Analysis of Filling, Packing, and Cooling Stages in Injection Molding', Journal of Applied Polymer Science, Vol. 43 Pages 39-48.