반응표면을 활용한 통계적 모멘트 추정 방법과 신뢰도해석에 적용

허재성[†] ・곽병만[*]

RS-based method for estimating statistical moments and its application to reliability analysis

Jae-Sung Huh and Byung-Man Kwak

Key Words : Reliability analysis(신뢰도 해석), Design of Experiments(실험계획법), Response surface(반응표면), Pearson System(피어슨 시스템)

Abstract

A new and efficient method for estimating the statistical moments of a system performance function has been developed. The method consists of two steps: (1) An approximate response surface is generated by a quadratic regression model, and (2) the statistical moments of the regression model are then calculated by experimental design techniques proposed by Seo and Kwak[(4)]. In this approach, the size of experimental region affects the accuracy of the statistical moments. Therefore, the region size should be selected suitably. The D-optimal design and the central composite design are adopted over the selected experimental region for the regression model. Finally, the Pearson system is adopted to decide the distribution type of the system performance function and to analyze structural reliability.

기호설명

x : 확률 변수

f : 시스템의 성능함수

$\bar{y}, \hat{y}$: 시스템의 근사화된 반응표면

μ : 평균값

σ : 표준편차

$\sqrt{\beta_1}$: 왜도(skewness)

β_2 : 첨도(kurtosis)

1. 서 론

† 한국과학기술원 기계공학과 박사과정
E-mail : jshuh@khp.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-5004 FAX : (042)869-8270
* 한국과학기술원 기계공학과 석좌교수

공학설계의 핵심요소는 소비자의 요구에 부응하는 제품을 제조하는데 필요한 정보를 능률적으로 만들어내어 시장의 수요에 부응하고 개발 및 생산비를 낮게 유지시켜서 높은 품질의 제품을 생산하는 것이다. 그러나 기존의 최적설계는 시스템에 존재하는 파라미터들의 불확실성을 설계에 적극적으로 반영하지 못하여 높은 품질의 제품 생산에 필요한 설계를 얻는 것에 한계가 존재한다. 이러한 시스템의 불확실성을 설계에 반영하여 좀 더 신뢰성과 현실성이 고려된 설계를 얻는 방법으로 강건설계, 공차설계, 신뢰도를 고려한 구조설계 등의 분야가 있으며 현재 많은 연구가 진행되고 있다. 특히, 이러한 분야에서 시스템의 불확실성을 설계에 적극적으로 반영하기 위하여 시스템의 신뢰도를 정확히 파악하는 것이 필수적이다.

일반적으로 실제의 신뢰도 기반 최적설계에 있어서 신뢰도는 거의 1 에 가깝기 때문에, 정확한 계산이 어렵고 또한 계산량이 매우 크다. 몬테카를로 시뮬레이션은 구현하기 쉽고 확률변수 분포의 종류에 대한 제약이 없으며 시스템 신뢰도를

구하기가 용이한 반면, 만족할만한 정확도를 얻기 위해서는 시행횟수를 크게 잡아야 하므로 경제성이 떨어진다는 단점이 있다. 신뢰도 지수 β를 이용하는 방법에는 선형 근사식을 이용하는 FORM(first-order reliability method)과 이차함수로 근사를 하는 SORM(second-order reliability method)이 있는데 이는 신뢰도를 계산하기 위한 반복과정에서 시스템의 1 차 혹은 2 차 미분을 계산하여야 한다. 그리고 비정규 분포가 고려되어야 하는 경우에는 그에 상응하는 정규분포로 근사화하는 과정에서 많은 오차가 발생하게 된다.

이와 더불어 시스템 성능함수의 통계적 모멘트를 계산하고 존슨 시스템(Johnson system)이나 피어슨 시스템(Pearson system)[1]과 같은 확률 분포 모델링에 관한 기법을 활용하여 시스템 성능함수의 확률 분포를 추정하여 손상확률을 계산하는 방법이 최근 많이 연구되고 있다. 여기서, 시스템의 통계적 모멘트를 계산하는 방법으로는 테일러 전개 방법, 몬테카를로 시뮬레이션 방법, 수치적분 방법과 실험계획적 방법 등이 있다.

본 연구에서는 반응표면을 활용하여 시스템의 통계적 모멘트를 추정하는 새로운 방법론을 제안하고 이를 확률 분포 모델링에 관한 기법을 활용하여 구조 신뢰도 해석(structural reliability analysis)에 적용하려 한다.

2. 반응표면을 활용한 통계적 모멘트 추정 방법

2.1 제안하는 방법론

일반적으로 시스템의 성능 함수 $f(\mathbf{x})$는 음함수(implicit function)로 표현되므로 식 (2.1)처럼 정의되는 통계적 모멘트를 해석적으로 계산하는데는 많은 노력이 소요되거나 불가능한 경우가 다수이다. 그러므로 본 연구에서 제안하는 방법은 음함수 형태인 성능함수를 다항식으로 표현되는 반응표면 $\bar{y}(x)$을 이용하여 충분히 정확히 근사한 후, 그 양함수(explicit function)로 표현된 $\bar{y}(x)$을 이용하여 시스템 성능함수의 통계적 모멘트를 추정하려 한다.

시스템 성능함수 $f(\mathbf{x})$의 근사 반응표면 $\bar{y}(x)$는 일반적으로 반응표면법에서 회귀모델을 추정하는 방법을 따를 것이다. 즉, 기존의 실험계획법[5] 중 하나인 D-Optimal 계획법과 중심합성계획법(Central Composite Design, CCD)을 이용하며 실험점들을 선정하고 반응표면의 계수를 추정하기 위하여 최소자승법(least square method)을 이용하려 한다.

이와 같이 다항식으로 근사화된 성능함수의 통계적 모멘트는 기존의 실험계획적 방법을 이용하여 정확하게 계산할 수가 있게 된다. 이 실험계획적 방법은 Taguchi[2]에 의해 제안되었으며 D' Errico 와 Zaino[3]에 의해 개선되었으며 Seo 와 Kwak[4]에 의해 비정규분포로 확장되었다.

$$E\{f^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^k \phi(x) dx \tag{2.1}$$

제안하는 방법인 반응표면을 이용한 통계적 모멘트의 추정 방법에서 해의 정확도에 큰 영향을 미치는 요소는 실험영역의 크기이며 이를 결정하기 위한 상세한 과정은 다음 절에서 언급한다.

2.2 실험영역의 제안

실험영역의 크기를 결정하기 위하여 그림 1 처럼 확률변수가 하나이고 시스템의 성능함수 $f(\mathbf{x})$를 2 차 보간 다항식(interpolating polynomial) $\hat{y}(x)$으로 근사화한다고 하자. 그림 1 에서 x 의 평균점을 기준으로 실험영역의 크기는 $k_1\sigma$과 $k_2\sigma$로 표현된다. 성능함수 $f(\mathbf{x})$가 1 차 혹은 2 차 다항식인 경우 중앙점(l)의 위치 및 실험영역의 크기에 관계없이 $\hat{y}(x)$은 정확히 $f(\mathbf{x})$를 복원하므로 통계적 모멘트는 정확히 계산될 수 있다. 그러나 그 이외의 함수에 대해서는 추정한 통계적 모멘트는 에러를 포함할 수 밖에 없으며 이러한 에러를 가능한 최소화하는 실험영역의 크기를 결정하려 한다.

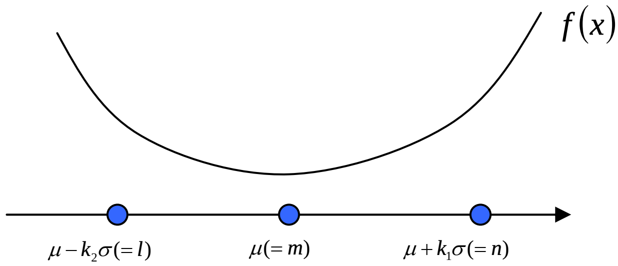

Fig. 1 Experimental region expressed by k_1 & k_2

본 연구에서는 3 차 다항식에 대해 가능한 정확히 통계적 모멘트를 계산하는 실험영역을 결정하고 이를 일반적인 문제에 적용하고자 한다. $f(\mathbf{x})$와 세 점(l, m, n)으로 결정되는 2 차 보간 다항식 $\hat{y}(x)$은 식 (2.2)와 (2.3)으로 각각 표현된다.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2.2)$$

$$\hat{y}(x) = (b + al + am + an)x^2 + (c - a(lm + ln + mn))x + (d + almn) \quad (2.3)$$

$f(\mathbf{x})$와 $\hat{y}(x)$의 차이인 에러함수를 식(2.4)와 같이 정의를 할 수 있다. 그리고 통계적 모멘트의 에러를 최소화시키기 위한 조건으로 본 연구에서 식(2.5)와 (2.6)을 제안하였다. 즉, 식(2.5)는 $f(\mathbf{x})$와 $\hat{y}(x)$에 의해 계산되는 평균을 일치시키는 조건이고, 식(2.6)은 식(2.4)의 에러함수의 평균과 분산을 동시에 최소화시키는 조건이다.

$$\varepsilon = |f(x) - \hat{y}(x)| \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} \hat{y}(x)\phi(x)dx \quad (2.5)$$

$$Minimize\ E = \frac{\mu_\varepsilon + s_\varepsilon}{2}$$

$$where\ \mu_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon(x)\phi(x)dx,\ s_\varepsilon = \sqrt{\int_\Omega \varepsilon(x)^2 \phi(x)dx} \quad (2.6)$$

위 조건을 활용하면 임의의 분포에 대한 실험영역의 크기를 결정할 수 있으나, 본 논문에서는 우선 정규분포만 다루고자 한다. 평균이 0 이고 분산이 1 인 표준 정규분포를 고려한다면 (l, m, n)은 $(-k_2, 0, k_1)$으로 간략히 나타내어지고 식(2.3)는 식(2.7)로 간단히 표현된다.

$$\hat{y}(x) = (b + al + an)x^2 + (c - alm)x + d \quad (2.7)$$

이 식을 식(2.5)에 대입하면 식(2.8)처럼 간단히 표현되므로 $k_1 = k_2 = k$ 이다.

$$b + d = b + d + a(l + n) \quad (2.8)$$

다음 조건인 식(2.6)을 계산하기 위하여 먼저 μ_ε 와 s_ε 을 각각 계산하면 식 (2.9)와 식(2.10)과 같이 정리가 된다.

$$\mu_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |f - \hat{y}| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 2|a| \left(-\frac{2e^{-k^2/2} + (2 - k^2)}{\sqrt{2\pi}} + e^{-k^2/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \quad (2.9)$$

$$s_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f - \hat{y}|^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = |a| \cdot (k^4 - 6k^2 + 15) \quad (2.10)$$

식(2.9)는 k = 1.17741 에서 최소값 1.1061 을 가지며 식(2.10)은 k = 1.7321 에서 $\sqrt{6}$ 을 가진다. 식(2.11)처럼 식(2.6)의 각 항의 최소값으로 나눈 후, E 함수의 그래프는 그림 2 와 같으며 이때 최소값은 k = 1.38184 에서 계산된다. 그러므로 본 연구에서 정규분포인 경우에 대해서 제안하는 실험영역의 크기는 $k_1 = k_2 = k$ =1.38184 이다.

$$Minimize\ E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|a|} \left(\frac{\mu_\varepsilon}{1.1061} + \frac{s_\varepsilon}{\sqrt{6}} \right) \quad (2.11)$$

정규분포의 실험영역을 결정하였듯이 비정규분포에 대해서도 역시 식(2.5)와 (2.6)의 조건을 이용하여 실험영역을 결정할 수 있으나 앞에서 언급하였듯이 본 논문에서는 제외하기로 한다.

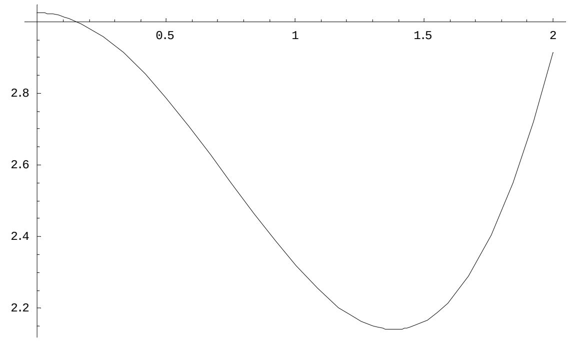

Fig. 2 Graph of E in Equation (2.11)

2.3 모멘트 추정방법의 흐름도

모멘트 추정방법의 전체적인 흐름도는 그림 3 과 같으며, 크게 3 부분으로 나누어진다. 실험영역의 크기를 결정하는 부분, 실험영역에서 실험계획을 실시하고, 각각의 회귀모델의 적합성을 판별하는 부분이다

본 연구에서는 실험계획법에서 D-Optimal 계획법과 중심합성계획법을 이용하였다. D-Optimal 계획법은 실험점의 개수를 사용자가 임의로 선택할 수 있다는 장점이 있으며 중심합성계획법은 2 차 회귀모델에서 가장 보편적으로 많이 이용하므로 채택하였다.

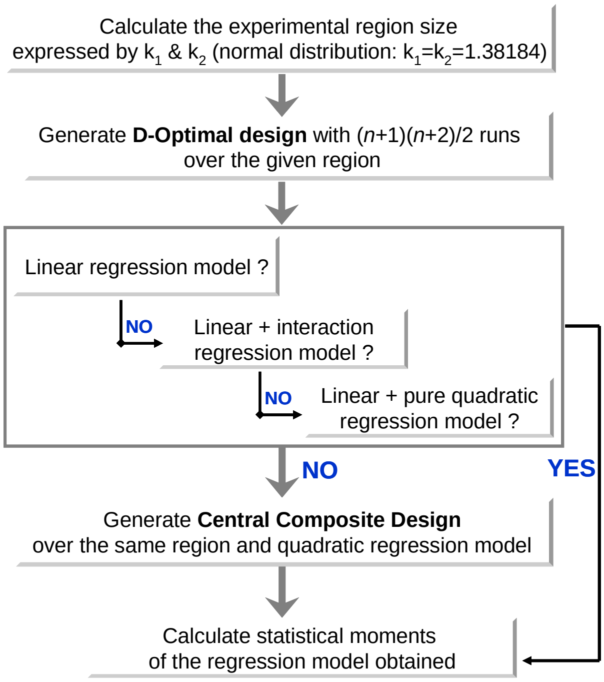

Fig. 3 Flow chart of the proposed approach

2.4 예 제

제안한 방법, 즉 반응표면을 활용한 시스템 성능함수의 통계적 모멘트 추정 방법에 대해 2 가지 실제적인 예제를 통해 검증하려 한다.

먼저 그림 4 와 같이 하중을 받는 보(beam)문제[(6)]이다. 집중하중 *P*, 탄성계수 *E* 와 관성모멘트 *I* 는 모두 정규분포를 가지는 것으로 가정한다. 각 확률변수의 파라미터는 표 1 에서 보여주고 있다. 시스템의 제한조건으로 보의 좌측 끝에서의 최대 처짐량이 주어지고, l = 5 일 때 식 (2.12)와 같은 손상함수를 구성할 수 있다.

$$g(P,E,I) = EI - 78.125P \le 0 \tag{2.12}$$

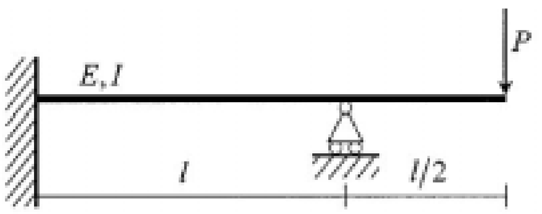

Fig. 4 Statically indeterminate beam

위와 같은 문제에 대해 제안한 방법을 적용하여 4 차 모멘트를 계산하고 해석적 방법으로 구한 예를 비교하여 표 2 에 정리하였다. 근사한 반응표면이 정확히 손상함수를 복원하므로 계산된 두 통계적 모멘트는 동일한 결과를 가진다.

Table 1 Parameters for random variables

Random variables	Mean	Standard deviation
P	4 kN	1 kN
E	$2{\cdot}10^7$ kN/m^2	$0.5{\cdot}10^7$ kN/m^2
I	10^{-4} m^4	$0.2{\cdot}10^{-4}$ m^4

Table 2 Estimated statistical moments

Parameter	Proposed	Exact
μ_g	1687.50	1687.50
σ_g	652.76	652.77
$\sqrt{\beta_{1_g}}$	0.4314	0.4314
β_{2g}	3.2743	3.2743

다음으로 2 요소 트러스(turss) 구조물에서 식 (2.13)처럼 요소에 작용하는 응력을 시스템의 손상함수로 고려한 문제이다. 확률변수로는 각 요소의 단면적 x_1, 절점 1 과 절점 2 의 거리 x_2, 집중하중 *F* 와 응력 상한값 σ_{max} 이며 모두 정규분포를 가지는 것으로 가정한다. 각 변수들의 파라미터는 표 3 에 정리하였다.

$$g = \frac{F}{2\sqrt{65}\sigma_{max}}\sqrt{1+x_x^2}\left(\frac{8}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}\right) - 1 \le 0 \tag{2.13}$$

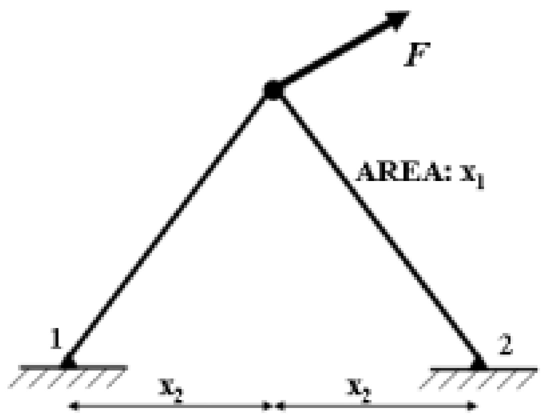

Fig. 5 Two bar truss problem

위와 같은 문제에 대해 제안한 방법을 적용하여 4 차 모멘트를 계산하고, 몬테카를로 시뮬레이션 방법(MCS)과 비교하여 표 4 에 정리를 하였다. 표 4 에서 확인할 수 있듯이 제안한 방법은 일반

적인 함수에 대해서도 상당히 정확하게 모멘트를 추정하고 있다. 특히 1 차, 2 차 와 4 차 모멘트는 정확히 계산되는 반면에 3 차 모멘트에서 대략 5%정도의 에러를 포함하고 있다.

Table 3 Parameters for random variables

Random variables	Mean	Standard deviation
x_1	1.5 cm^2	6.83×10^{-3} cm^2
x_2	0.40 m	4.09×10^{-3} m
F	200 kN	3.33 kN
σ_{max}	1000 MPa	16.6 MPa

Table 4 Estimated statistical moments

Parameter	Proposed	MCS
μ_g	-6.45703×10^{-2}	-6.45470×10^{-2}
σ_g	2.24332×10^{-2}	2.23918×10^{-2}
$\sqrt{\beta_{1_g}}$	7.18039×10^{-2}	6.80368×10^{-2}
β_{2g}	3.00841	3.01488

3. 신뢰도 해석

3.1 확률 분포 모델링

시스템의 통계적 모멘트를 이용하여 신뢰도를 해석하기 위해서는 모멘트로부터 확률분포를 파악하여야 한다. 이를 위해서는 계산된 모멘트로부터 시스템의 성능함수가 가지고 있는 실험적인 분포를 신뢰도 해석에 사용할 수 있도록 수학적인 확률분포 모델에 접합시킬 필요가 있다. 이러한 확률분포 모델링에 관한 기법들로는 존슨 시스템, 피어슨 시스템, Cornish-Fisher 전개 등이 있는데 본 연구에서는 1 차에서 4 차까지의 통계적 모멘트만으로 적용이 가능하고 정확성이 뛰어난 것으로 평가를 받는 피어슨 시스템을 이용하고자 한다. 그림 6 은 피어슨 시스템의 분포를 제시하고 있다.

3.2 적용 예제

신뢰도 해석을 위한 적용 예제로는 2.4 절의 두 예제들이다. 이들은 상당히 정확하게 통계적 모멘트를 추정하고 있는 것으로 확인이 되었다. 그러므로 신뢰도 해석에서도 역시 정확하게 추정할 것으로 예상되며, 계산된 신뢰도는 표 5 와 6 에 정리를 하였다. 시스템의 통계적 모멘트처럼 신뢰도 해석 역시 상당히 정확히 추정하고 있음을 확인 할 수가 있다. 특히 표 5 에서 확인할 수 있듯이 제안한 방법이 FORM 보다 좀 더 정확히 추정하고 있다. 주목할 점은 FORM 은 총 42 번의 함수 호출을 한 반면 제안한 방법은 20 번의 함수 호출로 좀 더 해에 근접한 신뢰도를 추정한다는 것이다.

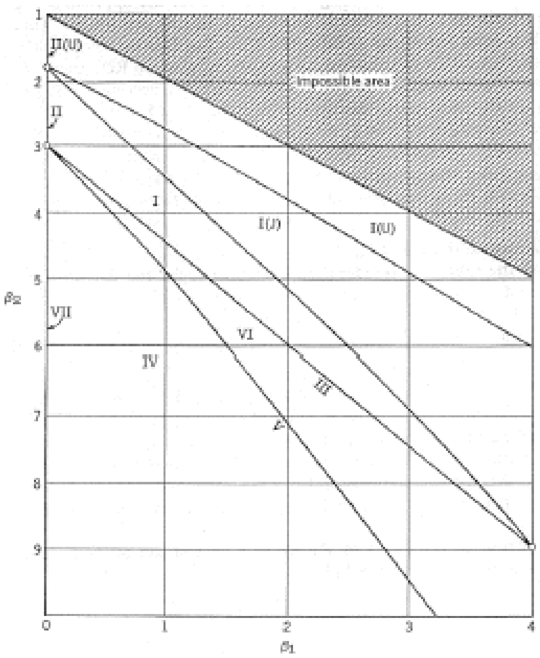

Fig. 6 A chart relating the type of Pearson frequency curve to the values of β_1, β_2

Table 5 Satisfaction probabilities of the statically indeterminate beam

Method	$\Pr[g(\mathbf{x})\le 0]$
	$g(P,E,I)=EI-78.125P\le 0$
FORM	0.999507
Proposed	0.999447
MCS	0.999337

Table 6 Satisfaction probabilities of the two truss problem

Method	$\Pr[g(\mathbf{x}) \le 0]$
	$g = \frac{F}{2\sqrt{65}\sigma_{\max}}\sqrt{1+x_x^2}\left(\frac{8}{x_1}+\frac{1}{x_1 x_2}\right)-1 \le 0$
FORM	0.997413
Proposed	0.997415
MCS	0.997407

4. 결 론

본 연구에서는 시스템 성능함수를 반응표면으로 근사하고 4 차 통계적 모멘트까지 계산한 후 피어슨 시스템을 활용하여 시스템 성능함수에 적합한 확률 분포 모델을 접합시켜 신뢰도를 계산하였다. 이 방법에서 반응표면을 생성할 때 통계적 모멘트 추정의 정확도에 영향을 미치는 실험영역을 결정하는 방법을 제안하고 정규분포에 대하여 실험영역을 역시 제안하였다. 두 가지 간단한 예제를 통하여 제안한 방법의 타당성을 검증하였다. 향후 과제로는 각 비정규분포에 대해서 실험영역을 2 장에서 언급한 방법으로 결정을 하고 좀 더 실제적인 문제에 적용을 하고자 한다.

참고문헌

(1) Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N., 1994, *Continuous Univariate Distribution*, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York

(2) Taguchi, G., 1978, "Performance Analysis Design," *International Journal of Production Research*, Vol. 16, pp. 521~530.

(3) John R. D'Errico, Nicholas A. Zaino, Jr., 1988, "Statistical tolerancing a modification of Taguchi's Method," *Technometrics* , 30, 4, pp. 397~405.

(4) Seo, H. S., and Kwak, B. M., 2002, "Efficient statistical tolerance analysis for general distribution using three-point information," *Int. J. PROD. RES.*, Vol. 40, No. 4, pp.931-944

(5) Myers, R. H., and Montgomery, D. C., 1995, *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley & Sons, New York

(6) Thoft-Christensen, P, and Baker, M. J., 1982, Structural Reliability Theory and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin