병진 가속을 받는 외팔 평판의 면내 변형율을 이용한 진동 해석

임홍석† · 유홍희*

Modal Analysis Employing In-plane Strain of Cantilever Plates Undergoing Translational Acceleration

Hong Seok Lim and Hong Hee Yoo

Key Words : modal analysis(진동 해석), cantilever plates(외팔 평판) , translational acceleration(병진 가속), aspect ratio(종횡비), Von Karman strain(폰 칼만 스트레인)

Abstract

A modeling method for the modal analysis of cantilever plates undergoing in-plane translational acceleration is presented in this paper. Cartesian deformation variables are employed to derive the equations of motion and the resulting equations are transformed into dimensionless forms. To obtain the modal equation from the equations of motion, the in-plane equilibrium strain measures are substituted into the strain energy expression based on Von Karman strain measures. The effects of two dimensionless parameters (related to acceleration and aspect ratio) on the modal characteristics of accelerated plates are investigated through numerical studies.

1. 서 론

외팔 평판 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조 형태이며 대표적인 것으로 항공기나 로켓의 날개, 인공위성의 태양열 전지판, 그리고 헬리콥터의 블레이드 같은 예제들이 있다. 이들 중 특별히 비행기나 로켓의 날개는 이륙 또는 발사 시에 병진 방향 가속도를 받게 된다. 그런데 이러한 평판의 병진 방향 가속도는 평판 시스템의 강성의 변화를 가져와 그 진동 특성을 변화시키게 된다. 이러한 구조물에 대한 진동 특성의 정확한 예측은 이들의 설계를 위해 필수적이므로 진동 특성 해석을 위한 연구가 필요하다.

강체 운동을 하는 구조물의 진동 특성에 대한 연구는 참고문헌[1-5]에서 볼 수 있듯이 블레이 드형 구조물로부터 참고문헌[6]에 제시되어진 평판 형태의 구조물까지 이루어지고 있다. 그러나 이러한 연구들에서는 평판을 보의 형태로 이상화 하여 다루고 있거나 운동이 없는 고정된 상태에서 평판 진동 특성을 다루고 있다. 평판이 강체운동을 하는 경우에 대한 진동 해석을 다룬 문헌도 회전운동에 국한되어 있다. (참고문헌 [7-8] 참조) 로켓이나 항공기는 병진 가속 운동을 하므로 날개의 종횡비 변화와 병진 가속도에 의한 진동 특성의 변화를 파악하기 위한 연구가 필요하다고 판단된다. 본 연구의 목적은 면내 변형율을 이용하여 병진방향 가속도 변화에 따른 고유 진동수와 모드 형상의 변화를 파악하기 위한 모델링 방법을 제시하고, 그 모델링에 근거하여 해석결과를 도출하여 주요 동적 특성을 분석하고 규명하는데 두고있다.

본 논문의 구성은 서론에 이어서 2 장에는 직교방향 변수를 이용해 면내 운동방정식을 유도하고 이로부터 면내 선형 변형율을 구하였다. 그런 후 변형율을 이용하여 굽힘 방향 운동 방정식을 유도하였고 가상 무차원 매개변수 를 이용해 무차원 진동방정식을 유도했으며 다음 3 장에서는 이에 가상 모드법을 적용하고 수치해석을 통하여 결과를 도출하여 주요 동적 특성을 논의하였다. 마지막 4 장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

† 한양대학교 대학원 기계설계학과
E-mail : limit75@dreamwiz.com
TEL : (02)2299-8169 FAX : (02)2298-4634
* 한양대학교 기계공학부

2. 운동 방정식 유도

Fig. 1 은 가로길이 a, 세로길이 b 그리고 일정한 두께 h를 가지는 외팔 평판을 보여준다. 이 평판은 가속을 받는 고정단에 부착되어 있으며, 평판 위의 임의의 한 점인 P점의 탄성 변형 변위는 직교 방향 변수인 u_1, u_2, u_3 로 나타내어 진다.
ρ는 평판의 단위 면적 당 질량이고 ν는 포아송비, 그리고 D 는 굽힘 강성 계수 이다.

본 논문에서는Rayleigh-Ritz method를 사용하기 위해 직교 변형 변수 u_1, u_2, u_3 를 다음과 같이 근사화 하였다.

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) &= \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x,y) q_{1i}(t) \\ u_2(x,y,t) &= \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x,y) q_{2i}(t) \\ u_3(x,y,t) &= \sum_{i=1}^{\mu_3} \phi_{3i}(x,y) q_{3i}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 μ_1, μ_2, μ_3는 변형 변수 u_1, u_2, u_3 의 일반좌표의 수이다.

평판의 운동 방정식은 Von Karman strain 으로부터 얻어진 총 변형 에너지와 Kane's method 를 사용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$F_i^* + F_i = \int_0^a \int_0^b \rho \left(\frac{\partial \mathrm{v}^P}{\partial \dot{q}_{ki}} \right) \cdot \mathrm{a}^P dydx + \frac{\partial U}{\partial q_{ki}} = 0 \tag{2}$$
$$(k = 1, 2, 3)$$

여기서 F_i^*는 일반 관성력이고, F_i 는 일반 작용력, U 는 총 변형 에너지, 그리고 v^P 와 a^P 는 평판 위의 임의의 점인 P 점의 속도와 가속도를 나타낸다.

선형 면내 변형율을 얻기 위해 다음 두 개의 면내 운동 방정식을 풀어야 한다.

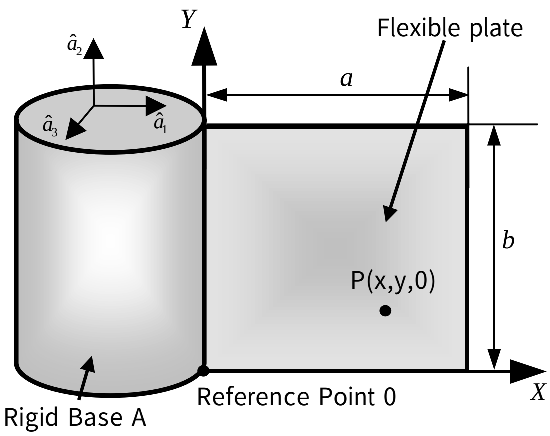


Fig. 1 Configuration of a cantilever plates

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\begin{aligned} &\left(\int_0^a \int_0^b \rho \phi_{1i} \phi_{1j} dydx \right) \ddot{q}_{1j} \\ &+ \left(\int_0^a \int_0^b \left(\gamma \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} + Gh \phi_{1i,y} \phi_{1j,y} \right) dydx \right) q_{1j} \end{aligned} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^a \int_0^b \left(\gamma \nu \phi_{1i,x} \phi_{2j,y} + Gh \phi_{1i,y} \phi_{2j,x} \right) dydx \right) q_{2j} \right] = -\dot{v}_1 \left(\int_0^a \int_0^b \rho \phi_{1i} dydx \right) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\begin{aligned} &\left(\int_0^a \int_0^b \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dydx \right) \ddot{q}_{2j} \\ &+ \left(\int_0^a \int_0^b \left(\gamma \phi_{2i,y} \phi_{2j,y} + Gh \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} \right) dydx \right) q_{2j} \end{aligned} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left(\int_0^a \int_0^b \left(\gamma \nu \phi_{2i,x} \phi_{1j,y} + Gh \phi_{2i,y} \phi_{1j,x} \right) dydx \right) q_{1j} \right] = -\dot{v}_2 \left(\int_0^a \int_0^b \rho \phi_{2i} dydx \right) \tag{4}$$

$$\gamma \equiv Eh/(1-\nu^2)$$

여기서 두 미분 방정식의 특이해를 진동 방정식을 얻는데 이용한다. 아래첨자 표시 중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이들에 대한 편미분으로 예를 들어 $\phi_{i,xx}$는 $\phi_{i,}$ 를 x로 두 번 편미분한 것을 의미한다.

식 (3),(4)를 풀어 일반좌표q_{1i}, q_{2i} 를 구한 후 일반좌표를 다음 (5)식에 대입하면 선형 변형율을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,x} q_{1i} \\ \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,y} q_{2i} \\ \varepsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,y} q_{1i} + \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,x} q_{2i} \end{aligned} \tag{5}$$

식(5)로부터 구한 선형 변형율을 굽힘 변형 에너지 식에 대입하여 운동 방정식을 유도하면 굽힘 방향 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\begin{aligned} &\left(\int_0^a \int_0^b \rho_p \phi_{3i} \phi_{3j} dydx \right) \ddot{q}_{3j} \\ &+ \left(\int_0^a \int_0^b D \left(\phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} + \phi_{3i,yy} \phi_{3j,yy} + \nu \phi_{3i,xx} \phi_{3j,yy} \right. \right. \\ &\left. \left. + \nu \phi_{3i,yy} \phi_{3j,xx} + 2(1-\nu) \phi_{3i,xy} \phi_{3j,xy} \right) dydx \right) q_{3j} \end{aligned} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\left(\int_0^a \int_0^b \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \left(\phi_{3i,x} \phi_{3j,x} + \nu \phi_{3i,y} \phi_{3j,y} \right) \\ + \varepsilon_{yy} \left(\phi_{3i,y} \phi_{3j,y} + \nu \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} \right) \end{pmatrix} dydx \right) q_{3j} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\left(\int_0^a \int_0^b Gh \varepsilon_{xy} \left(\phi_{3i,y} \phi_{3j,x} + \phi_{3i,x} \phi_{3j,y} \right) dydx \right) q_{3j} \right] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, \mu_3)$$

식(6)에서 선형 변형율은 X 및 Y 방향 가속도 증가에 따라 선형적으로 증가하므로 위 식에서 선형 변형율에 관계된 항들에 의해 가속에 따른 강성 변화가 나타내어 지며, 이는 가속도가 진동 특성에 영향을 미침을 분명하게 보여준다.

식(6)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수들과 매개 변수들 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{a}, \quad \eta \equiv \frac{y}{a}, \quad \delta \equiv \frac{a}{b}, \quad \vartheta_j \equiv \frac{q_j}{a}, \quad \phi_i(x,y) \equiv \varphi_i(\xi,\eta), \quad \alpha_x \equiv \frac{a_x}{a_r}, \quad \alpha_y \equiv \frac{a_y}{a_s} \tag{7}$$

여기서 a_r , a_s , T 는 다음과 같이 정의된다

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho a^4}{D}}, \quad a_r \equiv \frac{a}{T^2} \quad a_s \equiv \frac{b}{T^2} \tag{8}$$

무차원 변수와 매개 변수들을 사용하여 식(6)을 무차원화 시키면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\left(\int_0^1\int_0^1 \varphi_{3i}\varphi_{3j}\,d\eta\, d\xi\right)\ddot{\vartheta}_{3j}\right] \\
&+\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\begin{aligned}&\{\int_0^1\int_0^1(\delta^4\varphi_{3i,\eta\eta}\varphi_{3j,\eta\eta}+2\nu\delta^2\varphi_{3i,\xi\xi}\varphi_{3j,\eta\eta}\\&+\varphi_{3i,\xi\xi}\varphi_{3j,\xi\xi}+2(1-\nu)\delta^2\varphi_{3i,\xi\eta}\varphi_{3j,\xi\eta})d\eta\, d\xi\}\vartheta_{3j}\end{aligned}\right] \\
&+\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\begin{aligned}&\left(\int_0^1\int_0^1\frac{\gamma T^2}{\rho_p}\left(\varepsilon_{xx}\left(\frac{1}{a^2}\varphi_{3i,\xi}\varphi_{3j,\xi}+\frac{1}{b^2}\nu\varphi_{3i,\eta}\varphi_{3j,\eta}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\varepsilon_{yy}\left(\frac{1}{b^2}\varphi_{3i,\eta}\varphi_{3j,\eta}+\frac{1}{a^2}\nu\varphi_{3i,\xi}\varphi_{3j,\xi}\right)\right)d\eta\, d\xi\right)\vartheta_{3j}\end{aligned}\right] \\
&+\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\left(\int_0^1\int_0^1\frac{GhT^2}{\rho_p ab}\varepsilon_{xy}\left(\varphi_{3i,\eta}\varphi_{3j,\xi}+\varphi_{3i,\xi}\varphi_{3j,\eta}\right)d\eta\, d\xi\right)\vartheta_{3j}\right] \\
&=0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\mu_3)
\end{aligned} \tag{9}$$

3. 수치해석 결과

3.1 해석결과 비교를 통한 신롸성 검증

이 장에는 앞서 유도된 진동방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 사용된 평판의 모드 함수들은 가로와 세로방향의 보 함수들을 곱하여 구하는데 가로방향은 외팔 보의 모드함수를 세로방향은 병진 및 회전에 의한 강체운동 함수 2 개와 양단 자유 보의 모드함수를 각각 사용한다. (참고문헌 [11] 참조) 보의 모드 함수는 기존의 방법이 아닌 Gram-Schmidt 방법을 이용하여 다항식의 형태로 구성하였으며 이와 관련된 상세한 과정은 참고문헌[10]에 나타나 있다. 본 논문과 관련되어서 사용한 보 함수의 개수는 가로방향 5 개, 세로방향 7 개이며 결국 이들을 곱하여 사용하므로 사용되는 모드의 수는 각 방향 당 35 로 본 논문에서 구하는 가장 낮은 5 개의 고유진동수 들의 수렴에 충분하도록 선정되었다.

가속을 받는 외팔 평판의 무차원 고유 진동수에 대해 제안된 방법의 신뢰성은 제안된 방법에 의한 해석 결과와 상용 구조해석 프로그램인 ANSYS 의 해석 결과를 비교함으로 검증할 수 있다. 제안된 방법은 u_1, u_2, u_3 각 방향에 대해 35 개 씩 모드 수를 가지므로 총 105 개의 자유도를 가지며, ANSYS 의 경우는 평판 해석 시 100 개의 Element 와 121 개의 Node 를 사용하고 Node 한 개 당 6 개의 자유도를 가지므로 총 726 개의 자유도를 갖는다. 비교 결과는 다음 절의 각 그래프에서 보여주고 있으며 두 결과는 약 7 배 정도의 자유도 차이에도 ANSYS 결과가 확실하게 수렴된 결과 값을 보여주지는 못하며 거의 일치한다.

3.2 가속도 증가에 따른 무차원 고유진동수 변화

Fig.2 는 종횡비 δ 가 1 인 경우에 Y 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5 개 무차원 고유 진동수 변화를 보여준다. 이 결과는 첫 번째부터 세 번째 고유 진동수의 경우에 가속도가 증가할수록 고유진동수가 감소하는 것을 보여주며 어느 가속도 이상에서는 고유진동수가 0 에 도달하여 동적 좌굴 현상도 발생하는 것을 보여준다. 네 번째와 다섯 번째 고유 진동수의 경우에는 가속도가 증가할수록 고유 진동수가 증가하다가 다시 감소하는 경향을 보여준다. 그리고 외팔 평판은 Y 방향에 대해 대칭이므로 부호로 나타내어지는 가속도의 방향 변화에 대해 대칭적인 형태의 그래프를 보여준다. 그림에서 관찰되는 다른 특이한 점은 첫 번째와 두 번째 그리고 네 번째와 다섯 번째 고유진동수 궤적간에 휨 현상이 (Loci Veering) 발생한다는 점이다. 그래프 상에서는 첫 번째와 두 번째 고유진동수 사이의 휨 현상이 확실히 나타나지 않으나 멀리 떨어진 궤적 휨 현상일 수 있으므로 가속도 증가에 따른 모드간 절선 변화를 비교해 보면 그림 Fig.3 (a),(b),(c) 에서와 같은 모드 절선 변화를 확인할 수 있다. 이 그림을 보면 가속을 받지 않을 때인 (a)의 경우는 첫번째와 두번째 모드가 굽힘 모드와 비틀림 모드들인데 Y 방향 가속도 증가에 따라 (b),(c)에서 보여주는 바와 같이 모드

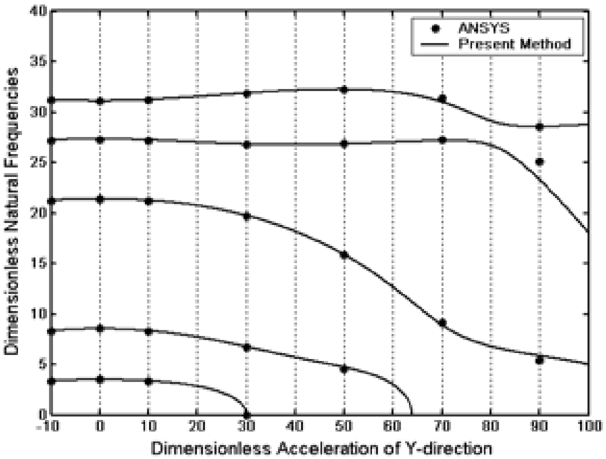
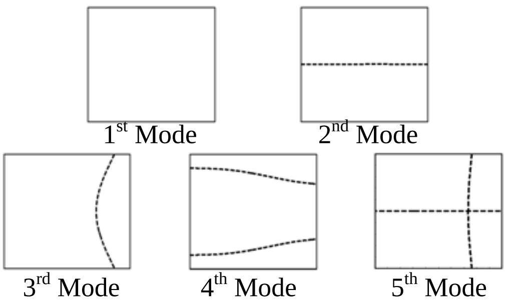
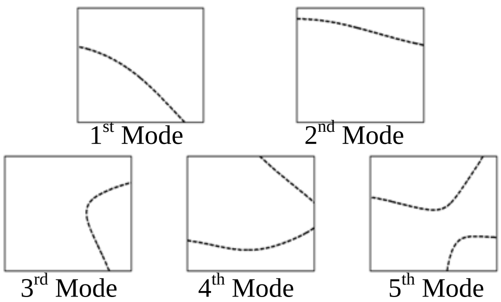


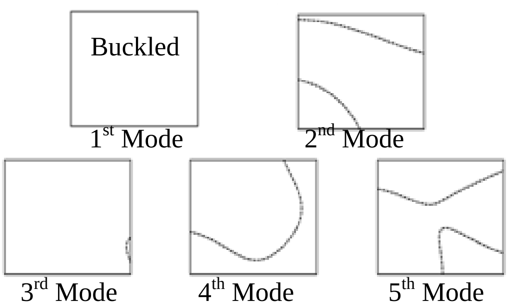
Fig. 2 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in Y-direction (δ=1, $\nu = 0.3$, $\alpha_x = 0$)



(a) α_y= 0



(b) α_y= 30



(c) α_y= 63

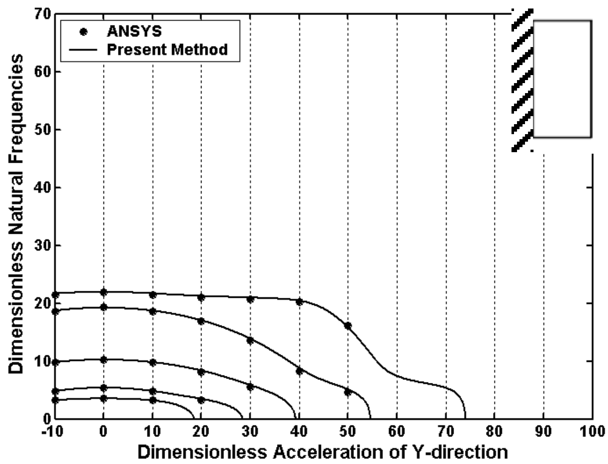
Fig. 3 Nodal line patterns of lowest five mode shapes with different accelerations (δ=1, $\nu = 0.3$, $\alpha_x = 0$)

형상 변화가 발생한다. 다른 모드들에서도 대칭적인 모드 절선 형태가 가속도 증가에 따라 비대칭적으로 변화하는 것을 확인할 수 있다.

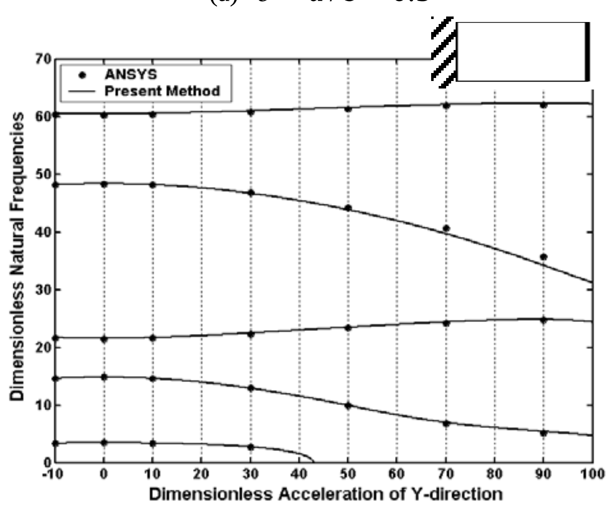
3.3 종횡비 변화에 따른 가속을 받는 외팔 평판의 고유진동수 변화 경향

Fig.4 (a),(b)는 종횡비 δ가 0.5 와 2 인 경우에 대해 각각 Y 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5 개 무차원 고유 진동수 변화를 보여준다. 앞의 Fig.2 에서의 종횡비 δ가 1 인 경우와 비교하여 보면 종횡비 δ가 0.5 인 경우는 첫 번째 고유 진동수가 더 빠르게 감소하며 동적 좌굴도 더 작은 가속도에서 발생한다. 반면에 δ가 2 인 경우에는 첫 번째 고유 진동수가 더 느리게 감소하며 동적 좌굴도 더 큰 가속도에서 발생한다.

Fig.5 (a),(b)는 종횡비 δ가 0.5 와 2 인 경우에

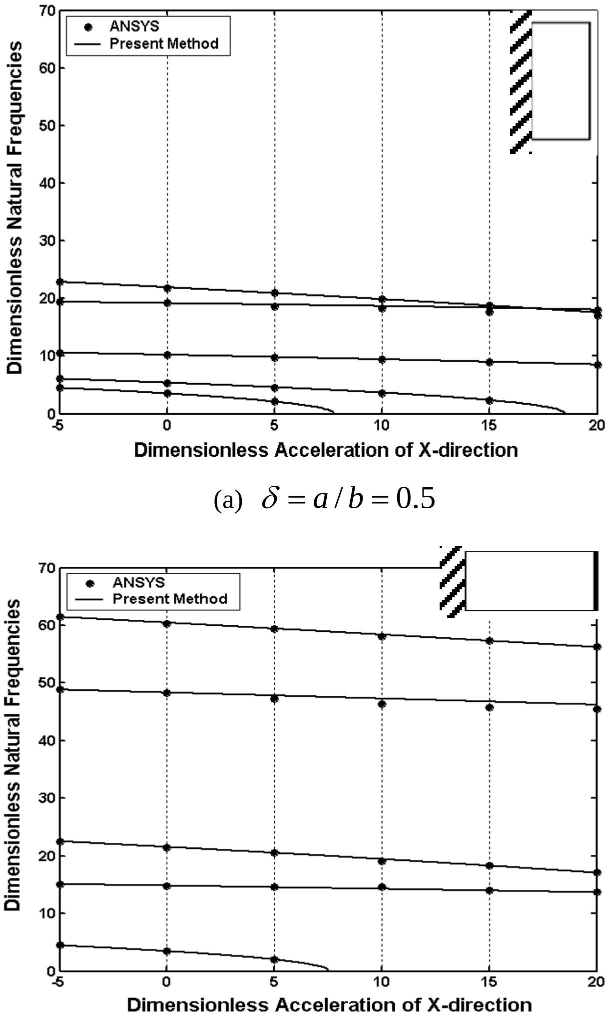


(a) $\delta = a/b = 0.5$



(b) $\delta = a/b = 2$

Fig. 4 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in Y-direction with different aspect ratios. ($\nu = 0.3$, $\alpha_x = 0$)



(a) $\delta = a/b = 0.5$

(b) $\delta = a/b = 2$

Fig. 5 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in X-direction with different aspect ratios. ($\nu = 0.3$, $\alpha_y = 0$)

대해 각각 X 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5 개 무차원 고유 진동수 변화를 보여준다. 두 경우 모두 가속도 증가에 따라 고유 진동수가 감소하는 경향을 보여주고 있으며 부호로 나타내어지는 가속도의 방향 변화에 대해 비대칭적인 형태의 고유 진동수 궤적을 보여준다. 이러한 현상에 대하여 간단히 설명하면 평판이 가속을 받을 때 평판은 압축되게 되고 그래서 고유 진동수는 감소하게 된다. 반대로 평판이 반대 방향으로 가속을 받게 되면 평판은 인장되게 되고 따라서 고유진동수는 증가하게 된다. 또 한 가지 흥미로운 점은 X 방향 가속을 받는 평판의 경우에는 동적 좌굴이 발생하는 가속도가 종횡비에 대해 변하지 않는다는 것이다. 위의 두 경우 모두 약 7.5 의 가속도에서 동적 좌굴이 발생하고 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 병진방향 가속을 받는 외팔 평판의 진동방정식과 이에 근거한 수치해석 결과를 제시하였다. 병진가속도와 종횡비가 고유진동수와 모드 절선의 변화에 미치는 영향을 분석할 수 있었다. 특히 가속도 증가에 따라 고유진동수 궤적간 휨 현상과 모드 간에 형태 교환이 발생하는 것을 관찰할 수 있었다. 또한 가속도 증가에 따라 일정 가속도에서 고유 진동수가 0 으로 떨어지는 동적 좌굴 현상이 발생하며 더 작은 종횡비 에서 동적 좌굴이 더 빠르게 일어남을 확인할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, “The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades”, *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766
(2) Theodorsen, T., 1935, “Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force”, *NASA TN*, No.516.
(3) Schilhansl, M., 1958, “Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam”, Transaction of ASME, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28-30.
(4) Putter, S. and Manor, H., 1978, “Natural Frequencies of Radial Rotating Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56. pp. 175-185.
(5) Bhat, R., 1986, “Transverse Vibration of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199-210.
(6) Liew, K.M. and Lim, M.K., 1993, “Transverse Vibration of Trapezoidal Plates of Variable Thickness: Symmetric Trapezoidals”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 165, No. 1, pp. 45-67.
(7) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, “Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 233-248.
(8) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, “Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429-449.
(9) Chihara, T., 1978, An Introduction to Orthogonal Polynomials , London: Gordon and Breach Science Publishers.
(10) Bhat , R., 1985, “Natural Frequencies of

Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials In Rayleigh-Ritz Method ," *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), pp. 493-499.

(11) Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, NASA SP-160.