고온에서 외부 가진력을 받는 회전하는 경사기능 박판 블레이드의 동적응답 해석

오병영* · 나성수**

Dynamic Response Analysis of Rotating Functionally Graded Thin-Walled Blades Exposed to Steady Temperature and External Excitation

B.Y.Oh*, Sungsoo Na**

Key Words: Extended Galerkin Method(확장된 갤러킨 방법), Functionally Graded Material(경사기 능재료), Thin-walled Blade(박판 블레이드), Volume Fraction(체적분율)

Abstract

This paper is dedicated to the thermoelastic modeling and dynamic response of the rotating blades made of functionally graded ceramic-metal based materials. The blades modeled as non-uniform thin walled beams fixed at the hub with various selected values of setting angles and pre-twisted angles. In this study, the blade is rotating with a constant angular velocity and exposed to a steady temperature field as well as external excitation. Moreover, the effect of the temperature gradient through the blade thickness is considered. Material properties are graded in the thickness direction of the blade according to the volume fraction power law distribution. The numerical results highlight the effects of the volume fraction, temperature gradient, taper ratio, setting angle and pre-twisted angle on the dynamic response of bending-bending coupled beam characteristics are provided for the case of a biconvex cross section and pertinent conclusions are outlined.

1. 서 론

복합재의 사용은 이전까지 순수 금속 또는 합금 등의 재료가 갖는 고정된 특성, 응용범위의 제한성을 뛰어넘어 다양한 기계적 성질을 만족시켜주고 있으며 따라서 새로운 복합재의 계발에 대한 관심도 날로 증대되어 가고 있다. 복합재가 갖는 가장 큰 장점이라면 이종재가 갖고 있는 각각의 특성과는 또 다른 얻고자 하는 기계적 성질

* 고려대학교 대학원 기계공학과 E-mail: bottle05@korea.ac.kr

TEL: (02)3290-3854 FAX: (02)926-9290

** 고려대학교 공과대학 기계공학과

을 다양한 복합화의 과정을 통해 만들어 낼 수 있다는 점일 것이다. 본 논문에서 다루고 있는 경사기능재료(Functionally Graded Material, FGM) 는 새로운 개념의 복합재로서 극한 열환경에서의 응용을 목적으로 1984년 일본 항공우주연구소의 Niino에 의해 처음 소개되었다. 경사기능재료는 단순히 두 가지 이상의 재료를 접합하는 것이 아 니라 정해진 방향에 따라 각각의 재료의 조성비 를 일정한 규칙에 따라 변화시켜 줌으로써 물리, 화학적 성질이 연속적으로 변화하도록 만들어준 새로운 개념의 복합재이다. 이러한 경사기능재료 의 특성은 그 사용 목적에 따라 인위적으로 조성 비를 변화시켜줌으로써 재료에서 발생할 수 있는 여러 취약성을 극복할 수 있도록 하는 장점이 있 다. 또한 열차폐재료, 절삭공구재료, 생체재료, 센 서 등 다양한 응용 가능성이 연구되어지고 있다. 특히, 극한 열환경에서 사용되는 구조물에 세라 믹스를 이용한 Thermal Barrier Coating보다 우수한 열차폐효과를 가지면서도 기존의 문제였던 코팅층의 탈락이 없어 극한 열환경에서 사용될 구조물의 재료로 큰 주목받고 있다. 본 논문에서는 가스터빈엔진과 같은 고온에서 사용되는 블레이드에 경사기능재료를 적용하기 위한 연구로써 확장된 Galerkin 방법을 이용하여 양쪽이 볼록한 단면형상(Biconvex cross section)을 갖는 박판보(thin-walled beam)로 모델링된 경사기능 블레이드의 자유진동해석 및 동적응답특성의 결과를 체적분율, 열 효과, 회전속도, 테이퍼비 등 다양한 파라미터에 따라 제시하였다.

2. Blade의 운동방정식

2.1 구조 모델링 및 기본가정

본 연구에서 사용된 일정한 각속도 Ω 로 회전하는 비균일하고 비틀림이 있는 biconvex형 블레이드의 기하학적 형상은 그림 1, 2와 같다. 여기서 비균일하다는 의미는 블레이드의 형상이 길이방향에 따라 중앙단면에서의 chord의 길이 $c(\eta)$ 와 높이 $b(\eta)$ 가 선형적으로 아래의 식(1)과 같이 변함을 의미한다.

$$\begin{cases}
c(\eta) \\
b(\eta)
\end{cases} = \left[1 - \eta \left(1 - \sigma\right)\right] \begin{cases}
c_R \\
b_R
\end{cases}$$
(1)

여기서 $\eta = z/L$ 는 무차원의 길이방향 좌표이고 $\sigma = c_T/c_R$ ($1 \le \sigma \le 2$)는 테이퍼비가 된다. 그리고 R_0 는 블레이드가 회전 중심부로부터떨어진 거리, L은 블레이드 스팬의 길이, 첨자 R과 T는 블레이드 단면의 뿌리부와 끝단을 나타낸다.

박판보 이론을 적용하여 블레이드의 방정식을 유도하기 위해서는 다음과 같은 기본 가정이 필 요하다.

- 1) 보의 원래 단면형상은 유지된다.
- 2) 2차 warping이 고려된다.
- 3) 횡 전단 효과가 고려된다.
- 4) 원주방향의 합응력은 다른 항들에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다.

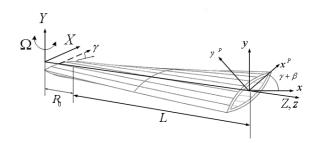


Fig. 1 Geometry of the pre-setting and pre-twisted thin-walled blade

5) 테이퍼비에 따라 수직, 수평으로 대칭적인 선형변화를 보인다.

회전좌표계 x, y, z는 회전축의 중심으로부터 R_0 만큼 떨어진 곳에 위치하며 (x^p, y^p, z^p) 는 국부 좌표계로 정의한다. 여기서 x^p 와 y^p 는 임의의 블레이드 단면에서의 주축이 된다. 또한, 두 좌표계 사이에는 다음과 같은 변환관계에 있게 된다.

$$x = x^{p} \cos(\gamma + \beta(z)) - y^{p} \sin(\gamma + \beta(z))$$

$$y = x^{p} \sin(\gamma + \beta(z)) + y^{p} \cos(\gamma + \beta(z))$$

$$z = z^{p}$$
(2)

여기서 $\beta(z) = \beta_0 z/L$ 는 초기비틀림각으로 블레이드의 고정단에서 자유단으로 길이방향에 따라 선형적으로 변화한다.(β_0 는 블레이드의 자유단 끝에서의 초기비틀림각을 나타낸다.) 또한 γ 는 pre-setting angle을 나타낸다. 운동방정식에서 표현되는 질량계수와 강성계수는 pre-setting angle과 pre-twisted angle의 영향을 받게 되며 따라서 위의식 (2)와 같은 변환관계식을 따르는 축방향좌표의함수로 표현된다.

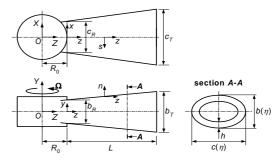


Fig. 2 Geometry of the tapered blade

2.2 변위와 변형률

박판보 방정식의 기본 가정들로부터 보의 3차 원 탄성이론을 그에 상응하는 1차원 이론으로 축 소하기 위해서 변위벡터의 성분들은 다음의 식과 같이 표현된다.

$$u(x, y, z, t) = u_0 - y\phi(z, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0 + x\phi(z, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(z, t) + \theta_x(z, t)[y(s) - n\frac{dx}{ds}]$$

$$+ \theta_y(z, t)[x(s) + n\frac{dy}{ds}]$$

$$- \phi'(z, t)[F_w(s) + na(s)]$$
(3)

$$\theta_{x}(z,t) = \gamma_{yz}(z,t) - v_{0}'(z,t)$$

$$\theta_{y}(z,t) = \gamma_{xz}(z,t) - u_{0}'(z,t)$$
(4)

여기에서 $F_w(s)$ 는 일차, na(s)는 이차 warping 함수이고 n은 두께방향의 좌표를 나타낸다. 또한 γ_{xz} 와 γ_{yz} 는 각각 xz와 yz 평면상에서의 횡전단 변형률을 나타내며 $u_0(z,t)$, $v_0(z,t)$, $w_0(z,t)$ 와 $\theta_x(z,t)$, $\theta_y(z,t)$, $\phi(z,t)$ 는 각각 x,y,z 축 방향에 대한 병진운동과 회전을 나타낸다.

2.3 경사기능재료의 구성방정식

경사기능재료는 등방성이므로 박판구조물에 해당하는 열탄성 구성 방정식은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{cases}
\sigma_{ss} \\
\sigma_{zz} \\
\sigma_{nz} \\
\sigma_{ss}
\end{cases} =
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\
Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & Q_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\varepsilon_{ss} - \hat{\alpha}\Delta T \\
\varepsilon_{zz} - \hat{\alpha}\Delta T \\
\varepsilon_{nz} \\
\varepsilon_{sn} \\
\varepsilon_{ss}
\end{bmatrix}$$
(5)

위의 식에서 표현된 열탄성 계수는 다음과 같 이 정의된다.

$$Q_{11} = \frac{E}{1 - v^2}, Q_{12} = \frac{Ev}{1 - v^2}$$

$$Q_{66} = \frac{E}{2(1 + v)} (\equiv G), Q_{44} = Q_{55} = k^2 G$$

$$\hat{\alpha} = \frac{E}{1 - v} \alpha$$
(6)

여기서 E와 v는 각각 탄성계수와 뿌와송비를 나타내며 $\Delta T(s,z,n)$ 는 정상상태 온도증가율을, k^2 는 횡전단 교정계수를 그리고 \hat{lpha} 는 열팽창계 수를 나타낸다. 한편, 블레이드는 두께방향을 따라 정상상태 일차원 열분포를 받는다고 가정하며 일차원 정상상태 열전달 방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dn}\left[k(n)\frac{dT}{dn}\right] = 0\tag{7}$$

여기서 T, 와 T_b 는 각각 블레이드 단면의 상 층부와 기저부의 온도를 나타내고 k(n)은 두께 방향의 열전달계수가 된다. 식 (7)은 각각의 경계 조건에 따라 T(h/2) = T, 와 T(-h/2) = T, 을 만족하게 된다. 따라서 식 (7)의 해로부터 아래와 같은 정상상태 온도분포를 얻게 된다.

$$T(n) = T_b \left[1 + \frac{\lambda}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(n)} dn} \int_{-h/2}^{n} \frac{1}{k(n)} \right] dn$$
 (8)

여기서 $\lambda = (T_t - T_b)/T_b$ $(T_b = 300 K)$ 는 블레이드 두께방향에 대한 무차원화된 온도 구배 (Temperature Gradient)를 의미한다. 경사기능재료의 물성치는 온도에 종속적이므로 온도의 함수로도 표현된다. 따라서 경사기능재료의 물성치는 아래와 같은 형태로 표현된다.

$$P(n) = P_0(P_{-1}/T + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3)$$
 (9)

여기서 P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 , P_3 는 온도에 관한 계수로 실험으로부터 얻어지는 구성물질의 고유한 값이다. 본 연구에서 사용된 질화규소(silicon nitride)와 스테인리스강(stainless steel)의 각각의 계수값들은 표1, 2에 표시하였다. 또한, 경사기능 재료의 물성치는 블레이드 두께를 따라 다음의 법칙에 따라 연속적으로 변한다.

$$P(n) = (P_c - P_m)V_m + P_m$$
 (10)

여기서 V_m 은 금속 성분의 체적분율을 나타낸다. 구성물질의 물성치는 온도의 함수인 반면 체적비는 공간의 함수로 주어진다. 일정한 두께를갖는 블레이드에 대하여 기준면이 n=0일 때 V_m 은 다음과 같이 표현된다.

$$V_m = \left(\frac{2n+h}{2h}\right)^K \tag{11}$$

여기서 $K(0 \le K \le \infty)$ 을 체적분율이라 한다.

2.4 해밀턴 변분분리와 지배방정식

운동방정식과 경계조건을 유도하는데 해밀턴 변분분리가 적용되었다.

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta V + \delta W) dt = 0$$

$$\delta u_0 = \delta v_0 = \delta \theta_x = \delta \theta_y = 0 \quad at \quad t = t_1, \ t_2$$
(12)

여기서 K는 운동에너지, V는 변형에너지이며, δW 는 외력에 의한 가상일을 나타낸다. 그리고 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$K = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho(\dot{R}_i \cdot \dot{R}_i) d\tau \tag{13}$$

$$\begin{split} &\int_{t_{0}}^{t_{1}} \delta K dt = \int_{t_{0}}^{t_{1}} \int_{0}^{L} -\{b_{1}(\ddot{u}_{0} + 2\dot{w}_{0}\Omega - u_{0}\Omega^{2})\delta u_{0} + b_{1}\ddot{v}_{0}\delta v_{0} \\ &+ b_{1}[\ddot{w}_{0} - 2\dot{u}_{0}\Omega - (R_{0} + z + w)\Omega^{2}]\delta w_{0} + I_{,y}(\ddot{\theta}_{y} - \Omega^{2}\theta_{y})\delta\theta_{y} \\ &+ [I_{,xx}(\ddot{\theta}_{x} - \Omega^{2}\theta_{x}) + 2I_{,xx}^{0}\Omega\dot{\phi}]\delta\theta_{x} + [I_{,p}\ddot{\phi} - 2I_{,xx}^{0}\Omega\dot{\phi} - I_{,xx}^{0}\Omega^{2}\phi \\ &- I_{,ww}(\ddot{\theta}_{x}'' - \Omega^{2}\phi'')]\delta\phi\}dzdt - \int_{t_{0}}^{t_{1}} [I_{,ww}(\ddot{\phi}' - \Omega^{2}\phi')]\delta\phi]_{0}^{L}dt \end{split} \tag{14}$$

변형에너지는 아래와 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau$$
 (15)

$$\int_{t_{0}}^{t_{1}} \delta V dt = \int_{t_{0}}^{t_{1}} \int_{0}^{L} -\{T_{z}' \delta w_{0} + (M_{y}' - Q_{x}) \delta \theta_{y} + (M_{x}' - Q_{y}) \delta \theta_{x}
+ [B_{\omega}'' + M_{z}' + (T_{z} \phi')'] \delta \phi + [Q_{x}' + (T_{z} u_{0}')'] \delta u_{0}
+ [Q_{y}' + (T_{z} v_{0}')'] \delta v_{0} \} dz dt + \int_{t_{0}}^{t_{1}} [T_{z} \delta w_{0} + M_{y} \delta \theta_{y} + M_{x} \delta \theta_{x}
- B_{\omega r} \delta \phi' + (B_{\omega}' + M_{z} + (T_{r} \phi') \delta \phi + (Q_{x} + T_{z} u_{0}') \delta u_{0}
+ (Q_{y} + T_{z} v_{0}') \delta v_{0}]_{0}^{L} dt$$
(16)

2.5 운동방정식 및 경계조건

운동에너지와 변형에너지를 해밀턴 변분분리 원리를 적용하여 각각 정리하면 아래와 같이 플 랩(flap)-래그(lag)가 연성된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_{0} : [a_{43}\theta'_{x} + a_{44}(u'_{0} + \theta_{y})]' + \Omega^{2}\{Ru'_{0}\}' - b_{1}\ddot{u}_{0} - p_{x} = 0$$

$$\delta v_{0} : [a_{52}\theta'_{y} + a_{55}(v'_{0} + \theta_{x})]' + \Omega^{2}\{Rv'_{0}\}' - b_{1}\ddot{u}_{0} - p_{y} = 0$$

$$\delta \theta_{y} : [a_{22}\theta'_{y} + a_{25}(v'_{0} + \theta_{x})]' - a_{44}(u'_{0} + \theta_{y}) - a_{43}\theta'_{x}$$

$$-(b_{5} + b_{15})(\ddot{\theta}_{y} - \Omega^{2}\theta_{y}) - m_{y} = (M_{y}^{T})'$$

$$\delta \theta_{x} : [a_{33}\theta'_{x} + a_{34}(u'_{0} + \theta_{y})]' - a_{55}(v'_{0} + \theta_{x}) - a_{52}\theta'_{y}$$

$$-(b_{4} + b_{14})(\ddot{\theta}_{x} - \Omega^{2}\theta_{x}) - m_{x} = (M_{x}^{T})'$$

여기서 P_x , P_y , m_x , m_y 는 축방향 좌표와 시간에 대하여 작용하는 외력과 모멘트이다. 그리고 $R(z) = [R_0(L-z) + 0.5(L^2 - z^2)]$ 로 정의된다.

회전하는 박판보로 가정된 블레이드는 z=0에서 고정단 조건이고 z=L에서는 자유단 조건을 만족하므로 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

At
$$z = 0$$
 $u_0 = v_0 = \theta_y = \theta_x = 0$ (18)
At $z = L$ δu_0 : $a_{43}\theta'_x + a_{44}(u'_0 + \theta_y) = p_x$ δv_0 : $a_{52}\theta'_y + a_{55}(v'_0 + \theta_x) = p_y$ (19)
 $\delta \theta_y$: $a_{22}\theta'_y + a_{25}(v'_0 + \theta_x) = m_y$ $\delta \theta_x$: $a_{33}\theta'_x + a_{34}(u'_0 + \theta_y) = m_x$

3. 수치해석 및 결과

본 논문의 블레이드는 biconvex형 단면형상을 갖는 비균일 박판보로 모델링 되어있으며 구성물은 질화규소와 스테인리스강으로 이루어졌다. 경사기능재료 각각의 물성치는 표 1, 2를 적용하였다.

Table 1 Material Properties of FGM constituents

Material properties	Silicon Nitride			
	$E(N/m^2)$	ν	$\rho(kg/m^3)$	
P_0	348.43×10 ⁹	0.24	2370	
$\overline{P_{-1}}$	0	0	0	
P_1	-3.070×10^{-4}	0	0	
P_2	2.160×10 ⁻⁷	0	0	
P_3	-8.946×10^{-11}	0	0	

Table 2 Material Properties of FGM constituents

Material properties	Stainless Steel			
	$E(N/m^2)$	ν	$\rho(kg/m^3)$	
P_0	201.04×10 ⁹	0.3262	8166	
P_{-1}	0	0	0	
P_1	3.070×10 ⁻⁴	-2.002×10^{-4}	0	
P_2	-6.534×10 ⁻⁷	3.797×10 ⁻⁷	0	
P_3	0	0	0	

Table 3 Dimensionless flapping natural frequency $\overline{\omega}_1$ vs. rotational speed $\overline{\Omega}$

$ar{\Omega}$	\overline{R}_0	Ref.3	Ref.4	Present
		(FEM)		
0	0	3.51602	3.51602	3.51602
	1	3.51062	3.51602	3.51602
1	0	3.68165	3.68165	3.68166
	1	3.8882	3.88883	3.88882
2	0	4.13732	4.13732	4.1373
	1	4.83369	4.83366	4.83367
3	0	4.79728	4.79727	4.79725
	1	6.08175	6.08174	6.08176
4	0	5.58500	5.58501	5.58500
	1	7.47505	7.47496	7.47514

수치해석은 해밀턴 변분분리에 의해서 얻어진 지배방정식을 확장된 Galerkin 방법을 이용하여 수행하였다. 동적응답을 보기에 앞서, 블레이드 모델의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위하여 무차 원화된 고유진동수를 구하여 타 논문들과 비교하 였고 이를 표 3에 정리하였다. 여기서 사용된 무 차원 각속도와 고유진동수는 아래와 같이 정의 된다.

$$\overline{\Omega} = \Omega \left(b_1^0 L^4 / a_{33}^0 \right)^{1/2} \quad \overline{\omega} = \omega \left(b_1^0 L^4 / a_{33}^0 \right)^{1/2} \tag{20}$$

그림 3은 비틀림이 없고 회전속도가 0, 테이퍼비가 1인 균일한 블레이드에 대해 선택된 체적분율에 따라 변하는 플랩모드의 동적응답을 보여주고 있다. 체적분율, K가 증가함에 따라 금속성분이 증가하며 따라서 강성은 감소하게 되므로 동적응답 변위는 K=10일 때 가장 큼을 알 수 있다.

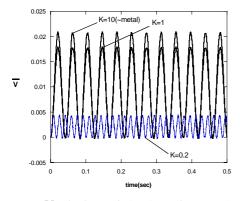


Fig. 3 Variation of the bending mode dynamic response for several volume fraction parameters ($\sigma = 1$, $\Omega = \lambda = 0$)

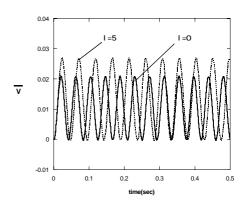


Fig. 4 Variation of the bending mode dynamic response for the different thermal gradient

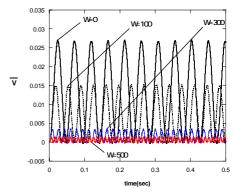


Fig. 5 Variation of the bending mode dynamic response for the selected rotational speed with thermal gradient($\sigma = 1$, $\lambda = 5$)

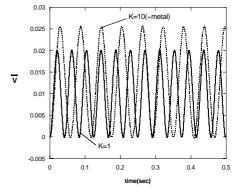


Fig. 6 Flap-wise dynamic response of pretwisted FGM blade for the selected volume fraction parameters ($\beta = 45^{\circ}$, $\Omega = 0$, $\lambda = 0$)

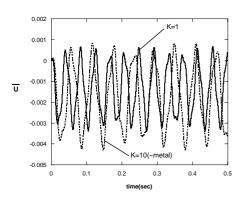


Fig. 7 Lag-wise response of pretwisted FGM blade for the selected volume fraction parameters ($\beta = 45^{\circ}$, $\Omega = 0$, $\lambda = 0$)

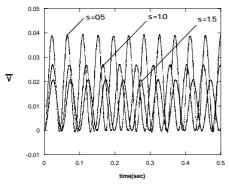


Fig. 8 Dynamic response for the selected tapered ratio ($\sigma = 1$, $\Omega = 100$, $\lambda = 5$)

그림 4는 블레이드의 동적응답에 온도가 미치는 영향을 보여주는 그래프로 온도구배가 $\lambda=5$ 일 때가 온도구배가 없을 때보다 동적응답 변위가 좀더 크게 나타나는 것을 보여주고 있다. 이것은 온도의 영향으로 강성이 다소 감소했음을 의미한다. 그림 5는 K=1이고 온도구배가 5일 때회전속도에 따른 동적응답을 보여주고 있다. 회전속도가 증가함에 따라 원심력에 의한 강성효과가 증가하여 변위의 크기가 줄어들게 됨을 보여주고 있다. 그림 6은 플랩방향의 변위, 그림 7은 래그방향의 변위 그래프로 비틀림이 없을 때는 발생하지 않았던 플랩-래그 연성이 초기비틀림각의 영향으로 발생함을 보여준다. 마지막으로 그림 8은 테이퍼비가 동적응답에 미치는 영향을 보여주고 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 회전하는 경사기능재료 박판 블 레이드의 동적응답을 보기 위한 모델링을 제시하였고, 확장된 Galerkin 방법을 이용한 수치해석결과로부터 경사기능재료의 설계파라미터인 체적분율과 온도구배, 회전속도, 테이퍼비, 초기비틀림각 등의 다양한 변수들을 고려한 수치해석을수행하였다. 본 논문의 결론들은 체적분율을 이용한 물성치의 능동적 선택이 가능함을 보여주며블레이드의 운전 환경에 따른 다양한 변수들을 만족시켜 줄 수 있는 설계파라미터로 활용될 수있을 것이다.

후 기

Sungsoo Na acknowledges the support of the work by the Basic Research Program of the Korea Science and Engineering Foundation, Grant No. R01-2002-000-0012 9-0.

참고문헌

- (1) J. Aboudi, M. J. Pindera, S. M. Arnold, 1999, "Higher-order theory for functionally graded materials", Composites, Part B, Vol. 30, pp. 777~832
- (2) J. N. Reddy and C. D. Chin, 1998, "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", Thermal Stresses, Vol. 21, pp. 593~626
- (3) Dewey H. Hodges, Michael J. Rutkowski, 1981, "Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method", AIAA JOURNAL Vol. 19, No. 11, pp. 1459~1466
- (4) O. Song, L. Librescu, 1997, "Structural Modeling and Free Vibration Analysis of Rotating Composite Thin-Walled Beams", Journal of Americal Helicopter Society, Vol. 42, No. 4, pp. 358~369
- (5) J. Ma, G. E. B. Tan, 2001, "Processing and Characterization of Metal-Ceramics Functionally Gradient Materials", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 113, pp. 446~449