

역나선 이론을 이용한 저자유도 평행구조 기구의 강성해석

김 한 성*

Stiffness Analysis of a Low-DOF Parallel Manipulator using the Theory of Reciprocal Screws

Han Sung Kim

Key Words : Stiffness analysis(강성해석), Low-DOF parallel manipulator(저자유도 평행구조 기구), Reciprocal screw(역나선), Statics relation(정역학 관계)

Abstract

This paper presents a methodology for the stiffness analysis of a low-DOF parallel manipulator. A low-DOF parallel manipulator is a spatial parallel manipulator which has less than six degrees of freedom. The reciprocal screws of actuations and constraints in each leg can be determined by making use of the theory of reciprocal screws, which provide information about reaction forces due to actuations and constraints. When pure force is applied to a leg, the leg stiffness is modeled as a linear spring along the line. For pure couple, it is modeled as a rotational spring about the axis. It is shown that the stiffness model of an F -DOF parallel manipulator consists of F springs related to actuations and $6-F$ springs related to constraints connected from the moving platform to the base in parallel. The 6×6 Cartesian stiffness matrix is obtained, which is the sum of the Cartesian stiffness matrices of actuations and constraints. Finally, a 3-UPU parallel manipulator is used as an example to demonstrate the methodology.

1. 서론

평행구조 기구는 고정 플랫폼과 이동 플랫폼을 다수의 직렬체인으로 연결한 구조를 갖는다. 일반적으로 구동부가 고정부 근처 또는 고정부에 위치하므로, 이동부의 관성이 작아 고속작업이 가능하다는 장점을 갖는다. 또한, 이동 플랫폼의 작업하중이 각 구동기에 분산이 되므로, 고하중 작업에 적합하다. 대표적으로 모든 선형 구동기가 순 인장/압축력 하에 있는 6 자유도 스텐더트 플랫폼형 기구가 많은 연구대상이 되어오고 있다.^(1,2) 그러나, 이 기구는 복잡한 순기구학, 작은 작업영역, 많은 수의 부품 등의 단점을 갖는다.

평행구조 기구의 장점을 유지하면서 이러한 단점을 극복하기 위하여, 최근 6 자유도보다 적은 자유도를 갖는 저자유도 평행구조 기구에 대한 연구

가 활발히 진행되고 있다.⁽³⁻¹²⁾ 저자유도 평행구조 기구는 6 자유도 평행구조 기구에 비하여 단순한 순기구학, 비교적 큰 작업영역, 보다 작은 관성 및 보다 적은 수의 부품 등의 장점을 갖는다. 더욱이, 완전한 6 자유도를 필요로 하지 않는 자동화 작업이 많이 존재한다. 예를 들어, 축대칭 공구를 갖는 공작기계에서는 최대 5 자유도만을 필요로 하며, 많은 자동조립작업이 3 자유도 직선운동 또는 1 자유도 회전운동이 첨가된 4 자유도만을 요구한다. 따라서, 완전한 6 자유도를 필요로 하지 않는 응용 분야에서는, 저자유도 평행구조 기구를 사용하는 것이 경제적이다. 저자유도 평행구조 기구 중, 3 자유도 직선운동⁽⁶⁻⁹⁾ 및 회전운동기구^(10,11)와 5 자유도 기구⁽¹²⁾가 최근 주요 연구대상이 되고 있다.

고속, 고정밀 및 고하중 성능을 요구하는 기구 설계시, 강성해석은 매우 기초적이고 필수적인 단계이다. 6 자유도 평행구조 기구의 경우, 특히, 스텐더트 플랫폼의 강성해석 방법은 이미 많은 연구자에 의하여 발표되었다.⁽¹³⁻¹⁵⁾ 그러나, 저자유도 평행구조 기구의 강성해석 방법은 중요성에 비하여 많은 연구가 진행되고 있지 않다. Zhang 과

* 경남대학교 공과대학 기계자동차공학부
E-mail : hkim@kyungnam.ac.kr
TEL : (055)249-2627 FAX : (055)249-2617

Gosselin⁽¹⁶⁻¹⁹⁾은 중앙에 수동 구속 다리가 있는 저자유도 평행구조 기구의 강성을 모델링 하였다. 구속방향에 가상 조인트를 추가하여, 수동 구속 다리를 6 자유도 직렬체인으로 모델링 하고, 이의 강성과 나머지 구동 다리의 강성을 병렬로 연결하여 직교 강성행렬을 구하였다. 그러나, 이 방법은 가상 조인트(virtual joint)를 구하는 방법이 체계적이지 못하고 중앙에 수동 구속 다리가 있는 기구에 한정된다는 단점을 가지고 있다. 더욱이, 구속방향의 강성을 나타내는 가상 스프링이 직렬로 연결되었다고 모델링 하였으나, 각각의 가상 스프링은 이동플랫폼에서 고정부에 직접 연결되므로 병렬로 연결되었다고 모델링 하는 것이 타당하다. Joshi 와 Tsai⁽²⁰⁾는 저자유도 평행구조의 경우에도 특이성을 완전하게 해석하기 위해서는 구속조건을 고려한 6×6 자코비안 행렬을 사용해야 함을 발표하였다. 역나선 이론을 사용하여 구동 자코비안 (Jacobian of actuations) 행렬과 구속 자코비안 (Jacobian of constraints) 행렬을 구하고 이 두 개의 부분행렬을 합쳐 전체 6×6 자코비안 행렬을 구하였다. 입력과 출력 관계만을 고려하여 자코비안 행렬을 구하는 경우, 예를 들어, 3 자유도 기구의 경우, 3×3 자코비안 행렬을 구할 수 있는데, 이러한 부분적 자코비안 해석은 모든 특이성을 예측할 수 없다.^(21,22) 강성 해석의 경우에도 6×6 자코비안 행렬에 기초하여 강성해석을 수행해야, 강성 설계시 오류를 방지할 수 있다.

본 논문에서는 일반적인 저자유도 공간 평행구조 기구를 대상으로, 정역학 해석과 강성해석을 수행하였다. 3 장에서, 역나선 이론을 이용하여 구동 역나선과 구속 역나선을 구하고, 이러한 역나선을 사용하여 직접 정역학적 관계를 유도하였다. 4 장에서, 구동 및 구속 역나선의 방향과 위치를 고려하여 각 다리의 강성을 모델링 하였다. 즉, 역나선이 순 힘(pure force)이면, 선형 스프링으로 모델링 하고, 순 짝힘(pure couple)이면, 회전 스프링으로 각 다리를 모델링 하였다. 이 방법은 기존 연구와 달리 가상 조인트의 도입이 필요 없다는 장점을 갖는다. 항상 6 개의 독립적인 스프링으로 저자유도 평행구조 기구의 강성을 모델링 할 수 있고, 이 스프링은 이동플랫폼과 고정부를 병렬로 연결함을 유도하였다. 유도된 직교 강성행렬 (Cartesian stiffness matrix)은 6 자유도 기구의 직교 강성행렬과 동일하게 6×6 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬이다. 그러나, 저자유도 기구의 직교 강성행렬은 구동부의 직교 강성행렬과 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 구성된다. 5 장에서는 개발된 방법을 사용하여, 3 자유도 3-UPU 평행구조 기구의 강성해석을 수행하였다.

2. 기구학적 모델

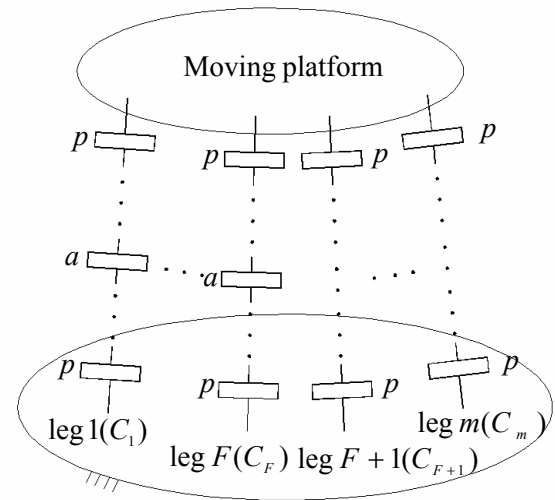


Fig. 1 Structure of a F -DOF parallel manipulator
(Note: a : active joint, p : passive joint)

본 논문에서 대상으로 하는 기구는 F -DOF (degrees of freedom)을 갖는 저자유도 공간 평행구조 기구이다. 즉, $3 \leq F < 6$ 이다. Fig. 1 과 같이 이동플랫폼(moving platform)은 m 개의 직렬체인(serial kinematic chain), 즉, 다리(leg)들에 의하여 구속되고, 각 다리는 최대 1 개의 구동기를 갖는다고 가정하였다. 구동기를 갖는 다리의 번호를 먼저 $i=1,2,\dots,F$ 로, 나머지 구동기를 갖지 않는 다리의 번호를 $i=F+1,F+2,\dots,m$ 로 정하였다. i 번째 다리의 모든 조인트의 자유도를 연결도(connectivity, C_i)라고 정의하면,^(23,24) 각 다리는 $6-C_i$ 개의 구속조건으로 이동플랫폼의 운동을 제한한다. 만약 각 다리의 구속조건들이 서로 독립적이면, 모든 다리의 구속조건의 합은 식 (1)을 만족하여야 한다. 과 구속 기구인 경우도 F -DOF 를 가지기 위해서는 독립적인 구속조건의 합은 $6-F$ 가 되어야 한다.

$$6-F = \sum_{i=1}^m (6-C_i) \quad (1)$$

3. 정역학 해석

모든 구동기가 제어되고 있는 상태에서 저자유도 평행구조 기구의 이동플랫폼에 임의 방향의 렌치(wrench)가 작용된 경우를 고려하고자 한다. 각 다리는 이동플랫폼에 작용되는 외부의 렌치를 구동기에 의하여 이동플랫폼에 전달되는 구동 힘 또는 토크, 간단히, 구동력(τ_a)과 구속에 의한 반력(τ_c)으로 지탱한다. 여기서, 구동력의 개수는 F 이고 구속에 의한 독립적인 반력의 개수는 $6-F$ 가

되어야 함을 쉽게 알 수 있다. 즉, 임의의 공간 렌치를 지탱하는 독립적인 조인트 힘의 개수는 항상 “6”이다.

외부 렌치를 지탱하는 구동력 및 구속에 의한 반력의 종류 및 방향을 구하기 위하여 역나선 이론(theory of reciprocal screws)을 이용하고자 한다.^(23,25,26) 역나선을 구하기 위하여, 이동플랫폼의 트위스트(twist)를 각 다리를 구성하는 조인트의 트위스트들의 합으로 표현할 필요가 있다. 여기서, 구형 조인트(spherical joint)는 같은 평면상에 있지 않고 한 점에서 교차하는 세 개의 회전 조인트들로, 유니버설 조인트(universal joint)는 한 점에서 교차하는 두 개의 회전 조인트들로, 그리고 실린더 조인트(cylindrical joint)는 같은 축을 갖는 선형 조인트와 회전 조인트로 나타낼 수 있으므로, 각 다리를 C_i 개의 1-DOF 조인트들로 구성할 수 있다. 이러한 관점에서, 이동플랫폼의 트위스트는 각 다리를 구성하는 조인트 단위나선(unit screw)들의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁷⁾

$$\hat{T}_p = \sum_{j=1}^{C_i} \dot{\theta}_{j,i} \hat{S}_{j,i} \quad \text{for } i=1,2,\dots,m \quad (2)$$

여기서, \hat{T}_p 와 \hat{S} 는 축좌표계(axis coordinate)⁽²⁵⁾로 표현된 이동플랫폼의 트위스트와 조인트의 단위나선을 나타내고, $\dot{\theta}$ 는 조인트의 속도이다. 아래 첨자 i 와 j 는 다리의 번호와 해당되는 다리의 조인트 번호를 각각 표시한다.

먼저, 구속에 의한 반력은 i 번째 다리의 모든 조인트 나선들과 역의 관계에 있고, $6-C_i$ 역나선 시스템을 이룬다. 즉, 구속 역나선(reciprocal screw of constraints)은 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\hat{s}_{c,k,i}^T \hat{T}_p = 0 \quad \text{for } k=1,2,\dots,(6-C_i) \quad (3)$$

여기서, \hat{s} 는 방사좌표계(ray coordinate)⁽²⁵⁾로 표현된 단위나선을 나타낸다.

그리고, 제어되고 있는 구동기를 고정되었다고 고려한다. 한 개의 구동기가 고정되었으므로, 역나선 시스템의 차원은 하나 증가하여 $6-C_i+1$ 이 된다. 구동기에 의한 구동력은 구동 조인트(active joint)를 제외한 i ($i=1,2,\dots,F$)번째 다리의 모든 조인트 나선들과 역의 관계에 있고, $6-C_i+1$ 역나선 시스템을 이룬다. $6-C_i+1$ 시스템은 $6-C_i$ 시스템을 포함하므로, $6-C_i$ 시스템에 속하지 않는 추가의 역나선을 구한다. 이러한 구동 역나선(reciprocal screw of actuations)은 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\hat{s}_{a,i}^T \hat{T}_p = 0 \quad \text{for } i=1,2,\dots,F \quad (4)$$

여기서, \hat{T}_p' 는 수동 조인트(passive joint) 단위나선들만의 선형조합으로 구성된다.

위의 과정으로 총 6 개의 독립적인 역나선을 구할 수 있다. 기구부의 중력을 무시하면, 이동플랫폼에 작용되는 임의의 렌치는 다음의 식과 같이 구동기에 의한 F 개의 구동력 및 구속에 의한 독립적인 $6-F$ 개의 반력과 평형을 이룬다.

$$\begin{aligned} \hat{w} = & [\tau_{a,1} \hat{s}_{a,1} + \dots + \tau_{a,F} \hat{s}_{a,F}] \\ & + [(\tau_{c,1,1} \hat{s}_{c,1,1} + \dots + \tau_{c,6-C_i,1} \hat{s}_{c,6-C_i,1}) + \dots \\ & + (\tau_{c,1,m} \hat{s}_{c,1,m} + \dots + \tau_{c,6-C_i,m} \hat{s}_{c,6-C_i,m})] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, f 와 m 을 엔드이펙터에 작용하는 힘과 모멘트라 할 때, 방사좌표계로 표현된 렌치는 $\hat{w} = [f^T, m^T]^T$ 이고, τ_a 는 구동기에 의한 구동력 크기를 나타내며, τ_c 는 구속에 의한 반력의 크기를 나타낸다. 위의 식을 자코비안 행렬과 조인트 힘 벡터로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{w} = J_a \tau_a + J_c \tau_c = J \tau \quad (6)$$

여기서, 구동기와 관련된 구동 자코비안 행렬과 구속조건과 관련된 구속 자코비안 행렬은 각각 식 (7)과 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁰⁾

$$J_a = [\hat{s}_{a,1} \quad \dots \quad \hat{s}_{a,F}] \in R^{6 \times F} \quad (7)$$

$$J_c = [\hat{s}_{c,1,1} \quad \dots \quad \hat{s}_{c,6-C_i,1} \quad \dots \quad \hat{s}_{c,1,m} \quad \dots \quad \hat{s}_{c,6-C_i,m}] \in R^{6 \times (6-F)} \quad (8)$$

따라서, 전체 자코비안 행렬은 다음과 같다.

$$J = [J_a \quad J_c] \in R^{6 \times 6} \quad (9)$$

그리고, $\tau_a = [\tau_{a,1}, \dots, \tau_{a,F}]^T \in R^{F \times 1}$ 는 구동력 벡터를, $\tau_c = [\tau_{c,1,1}, \dots, \tau_{c,6-C_i,1}, \dots, \tau_{c,1,m}, \dots, \tau_{c,6-C_i,m}]^T \in R^{(6-F) \times 1}$ 는 구속에 의한 반력 벡터를, $\tau = [\tau_a^T, \tau_c^T]^T \in R^{6 \times 1}$ 는 전체 조인트 힘 벡터를 나타낸다.

4. 강성 해석

본 논문에서는 모든 링크(link)를 강체로 가정하고, 기구의 순응성(compliance)의 주요 원인을 작용되는 힘 또는 모멘트에 대한 베어링, 동력전달장치 및 제어기에서 발생할 수 있는 미소변위로 가정하였다.⁽²³⁾ 한편, 역나선은 영 피치 역나선(zero-pitch reciprocal screw), 무한 피치 역나선(infinite-pitch reciprocal screw), 유한 피치 역나선(finite-pitch reciprocal screw)으로 다음과 같이 구분할 수 있다.

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} s \\ r \times s \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix}, \quad \hat{h} = \begin{bmatrix} s \\ r \times s + hs \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, s 는 나선의 단위방향벡터이고, r 은 기준 좌표계에서 나선까지의 거리벡터이며, h 는 피치(pitch)를 나타낸다. 임의의 트위스트 시스템에 대한 역나선을 고려할 때, 식 (10)중 첫 번째 및 두 번째 식의 물리적 의미는 순 힘과 순 짝힘에 해당한다. 일반적으로 역나선의 기저(base)를 순 힘 또는 순 짝힘으로 구할 수 있으므로, 본 연구에서는 유한 피치 역나선의 경우는 고려하지 않았다.

순응성을 갖는 해당 다리에 순 힘을 작용하면, 순 힘이 가해지는 직선을 따라 미소 직선변위(infinitesimal translational displacement)가 발생하게 된다. 반면, 순 짝힘을 가할 경우, 순 짝힘의 축방향에 대한 미소 회전변위(infinitesimal rotational displacement)가 발생한다. 따라서, 미소 직선변위를 순 힘의 직선상에 위치한 선형 스프링(linear spring)의 미소변위로, 미소 회전변위를 순 짝힘의 축에 대한 회전 스프링(rotational spring)의 미소변위로 모델링 할 수 있다. 앞 장에서 살펴본 바와 같이, 이동플랫폼에 작용하는 역나선은 총 6 개이므로 이동플랫폼은 총 6 개의 독립적인 스프링들로 지지되고 있다고 모델링 할 수 있다. 이 중 F 개는 구동기에 관련된 스프링이고, $6-F$ 개는 구속조건에 관련된 스프링이다. 구동기에 관련된 스프링 상수를 $k_{a,i}$ ($i=1,2,\dots,F$)로 구속조건과 관련된 스프링상수를 $k_{c,i}$ ($i=F+1,\dots,6$)로 정의하면, 스프링에 작용되는 힘과 해당되는 스프링의 미소 변위와의 관계는 다음과 같다.

$$\tau_a = [k_a] \delta q_a, \quad \tau_c = [k_c] \delta q_c \quad (11)$$

여기서, $[k_a]$ 와 $[k_c]$ 는 각각 $k_{a,i}$ 와 $k_{c,i}$ 를 대각원소로 갖는 대각행렬(diagonal matrix)이고, δq_a 와 δq_c 는 각각 구동기와 구속조건에 관련된 스프링의 미소변위 벡터이다. 가상일 원리(principle of virtual work)를 이용하여 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\hat{w}^T \delta \hat{D} = \tau_a^T \delta q_a + \tau_c^T \delta q_c \quad (12)$$

여기서, δx 와 $\delta \theta$ 를 각각 엔드이펙터의 미소 직선변위와 미소 회전변위라 할 때, $\hat{D} = [\delta x^T, \delta \theta^T]^T$ 는 축좌표계로 표현된 미소 트위스트를 나타낸다. 식 (6)을 식 (12)에 대입하면, 다음과 같다.

$$\tau_a^T J_a^T \delta \hat{D} + \tau_c^T J_c^T \delta \hat{D} = \tau_a^T \delta q_a + \tau_c^T \delta q_c \quad (13)$$

임의의 τ_a 및 τ_c 벡터에 대하여 식 (13)이 성립하여야 하므로, $\delta \hat{D}$ 와 δq_a 및 δq_c 와의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta q_a = J_a^T \delta \hat{D}, \quad \delta q_c = J_c^T \delta \hat{D} \quad (14)$$

식 (11)을 식 (12)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{w}^T \delta \hat{D} = \delta q_a^T [k_a] \delta q_a + \delta q_c^T [k_c] \delta q_c \quad (15)$$

식 (14)를 이용하여 식 (15)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{w}^T \delta \hat{D} = \delta \hat{D}^T J_a [k_a] J_a^T \delta \hat{D} + \delta \hat{D}^T J_c [k_c] J_c^T \delta \hat{D} \quad (16)$$

임의의 $\delta \hat{D}$ 에 대하여 식 (16)이 성립하여야 하므로, 이동플랫폼의 미소 트위스트와 작용된 렌치와의 관계는 직교 강성행렬에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{w} = K \delta \hat{D} \quad (17)$$

여기서, 직교 강성행렬은 구동부의 직교 강성행렬과 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 다음과 같다.

$$K = J_a [k_a] J_a^T + J_c [k_c] J_c^T \quad (18)$$

전체 자코비안 행렬을 이용하여 위의 직교 강성행렬을 다음과 같이 간략히 나타낼 수 있다.

$$K = J [k] J^T \quad (19)$$

여기서, $J = [J_a \quad J_c]$ 이고 $[k] = \begin{bmatrix} [k_a] & 0 \\ 0 & [k_c] \end{bmatrix}$ 이고, J 는 양의 반한정 행렬이고 $[k]$ 는 양의 한정 대칭행렬이므로, 직교 강성행렬은 양의 반한정 대칭행렬이 된다.

식 (19)의 직교 강성행렬은 6 자유도 평행구조 기구의 직교 강성행렬과 비슷한 구조를 갖는다.⁽¹³⁻¹⁵⁾ 즉, 6 자유도 평행구조 기구의 경우, 구속조건이 존재하지 않으므로 직교 강성행렬은 구동부의 직교 강성행렬로만 표현된다. 반면, 저자유도 평행구조 기구의 경우 직교 강성행렬은 구동부 및 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 표현되어야 한다.

5. 강성 해석 예

본 장에서는 4 장에서 개발한 강성해석 방법의 유효성을 보이기 위하여, 3 자유도 3-UPU 평행구조 기구의 강성해석을 수행하였다. 예시된 기구의 i 번째 다리는 A_i 점에서 고정 플랫폼에 연결되고 B_i 점에서 이동플랫폼에 연결된다고 가정하였다. 해석을 위하여 3 개의 좌표계를 설정하였다. 먼저, 고정 좌표계($A:xyz$)는 고정 플랫폼상의 O 점에 고정된 좌표계로, 이동 좌표계($B:uvw$)는 이동 플랫폼상의 P 점에 고정된 좌표계로 정의하였으며, 해석의 편의성을 위하여 순간 참조 좌표계($C:x'y'z'$)⁽²³⁾를 정의하였다. 이 좌표계의 원점은 P 점에 있고, x' , y' , z' 축은 각각 x , y , z 축과 평행 하다고 정의하였다. 모든 나선들은 순간 참조 좌표계에 관하여 표현되었다.

Fig. 2 는 3-UPU(Universal-Prismatic-Universal) 평행구조 기구의 기구학적 모델을 나타낸다. 각 다리는 고정 플랫폼에 부착된 유니버설 조인트, 직선 조인트, 그리고 이동 플랫폼에 연결된 유니버설 조인트로 구성된다. 이 기구는 대표적인 3 자유도 직선운동기구이고, 일반적으로 선형 구동기가 직선 조인트를 구동한다.⁽⁶⁾ 앞에서 설명한 바와 같이, 유니버설 조인트는 두 개의 회전 조인트로 모델링 할 수 있으므로, 모든 다리의 연결도는 $C_i=5$ 임을 알 수 있다. 따라서, 이동 플랫폼의 트위스트는 5 개의 조인트 단위나선들의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{T}_p = \dot{\theta}_{1,i} \hat{S}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i} \hat{S}_{2,i} + \dot{d}_{3,i} \hat{S}_{3,i} + \dot{\theta}_{4,i} \hat{S}_{4,i} + \dot{\theta}_{5,i} \hat{S}_{5,i} \quad (20)$$

여기서, 각 조인트 단위나선은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{S}_{1,i} = \begin{bmatrix} (b_i - d_i) \times s_{1,i} \\ s_{1,i} \end{bmatrix}, \hat{S}_{2,i} = \begin{bmatrix} (b_i - d_i) \times s_{2,i} \\ s_{2,i} \end{bmatrix}, \hat{S}_{3,i} = \begin{bmatrix} s_{3,i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{S}_{4,i} = \begin{bmatrix} b_i \times s_{4,i} \\ s_{4,i} \end{bmatrix}, \hat{S}_{5,i} = \begin{bmatrix} b_i \times s_{5,i} \\ s_{5,i} \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서, $s_{j,i}$ 는 i 번째 다리의 j 번째 조인트의 단위방향벡터이고, $b_i = \overline{PB_i}$ 이며, $d_i = \overline{AB_i} = d_{3,i} s_{3,i}$ 이다. 3-UPU 평행구조 기구가 직선운동만 가능하기 위해서는, $s_{1,i} = s_{5,i}$ 와 $s_{2,i} = s_{4,i}$ 조건을 만족하여야 한다.⁽²⁰⁾

$C_i=5$ 이므로 모든 조인트 나선에 역의 관계에 있는 구속 역나선은 1 차 시스템을 이룬다. 이 구속 역나선은 첫 번째 및 두 번째 유니버설 조인트의 두 축과 수직 방향인 무한 피치 나선이다.

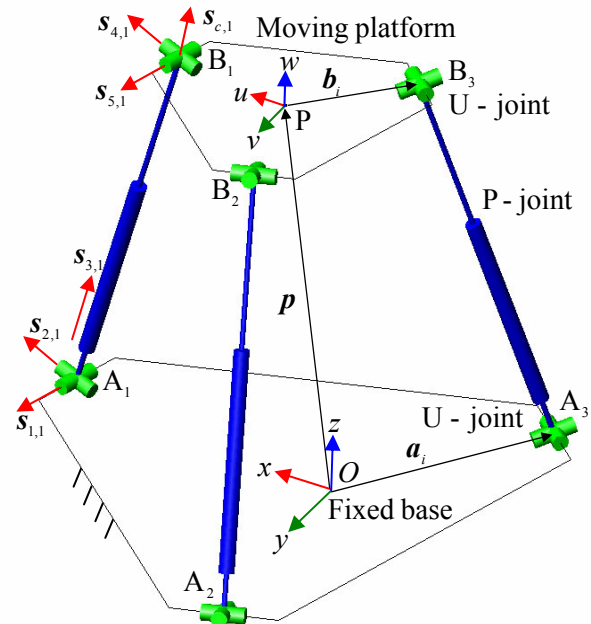


Fig. 2 Kinematic model of a 3-UPU parallel manipulator

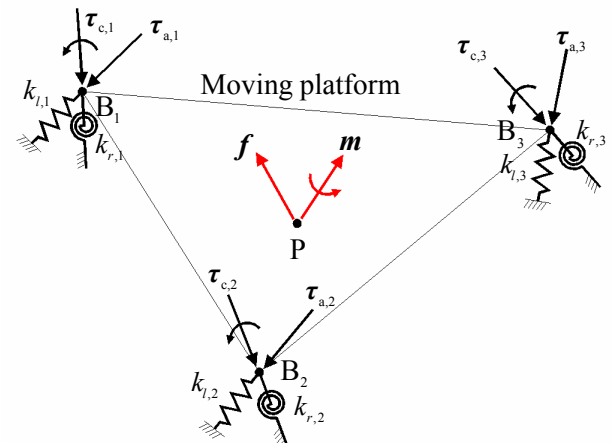


Fig. 3 Statics relation and stiffness model of a 3-UPU parallel manipulator

$$\hat{s}_{c,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ n_i \end{bmatrix} \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

여기서, $n_i = s_{2,i} \times s_{1,i}$ (또는, $n_i = s_{4,i} \times s_{5,i}$) 이다.

그리고, 구동기가 고정되어 있을 때, 역나선은 2 차 시스템을 이룬다. 하나의 추가 구동 역나선은 두 개의 유니버설 조인트를 잇는 선 벡터이다.

$$\hat{s}_{a,i} = \begin{bmatrix} s_{3,i} \\ b_i \times s_{3,i} \end{bmatrix} \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

따라서, 구동 및 구속 자코비안 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_a = \begin{bmatrix} s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_{3,1} & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_{3,2} & \mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_{3,3} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$J_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

구동 및 구속 역나선의 물리적 의미는 각각 순힘과 순 짝힘이므로, Fig. 3 과 같이 각 다리를 선형 스프링과 회전 스프링으로 모델링 할 수 있다. 선형 스프링은 두 개의 유니버설 조인트의 중심점을 통과하는 선상에 위치하고, 회전 스프링의 축은 유니버설 조인트의 두 축과 직교한다. 식 (19)로부터, 직교 강성행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 s_{3,i} [k_i] s_{3,i}^T & \sum_{i=1}^3 s_{3,i} [k_i] (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_{3,i})^T \\ \sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_{3,i}) [k_i] s_{3,i}^T & \sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_{3,i}) [k_i] (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_{3,i})^T + \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i [k_r] \mathbf{n}_i^T \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서, $k_{i,j}$ 와 $k_{r,i}$ 는 선형 및 회전 스프링 상수이고, $[k_i] = \text{diag}[k_{i,1}, k_{i,2}, k_{i,3}]$ 과 $[k_r] = \text{diag}[k_{r,1}, k_{r,2}, k_{r,3}]$ 은 대각행렬이다.

6. 결론

역나선 이론을 이용하여, 저자유도 평행구조 기구의 정역학적 해석 및 강성해석 방법을 제시하였다. F -DOF 기구의 경우, F 개의 구동 역나선과 $6-F$ 개의 구속 역나선을 이용하여 정역학적 관계를 유도하였다. 역나선의 방향과 위치에 따라, 저자유도 평행구조 기구 다리의 강성을 모델링 하였고, 6×6 직교 강성행렬은 구동부 및 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 구성됨을 유도하였다. 개발된 방법의 유효성을 증명하기 위하여, 3-UPU 평행구조 기구의 강성해석을 수행하였다.

참고문헌

- (1) Stewart, D., 1965, "A Platform with Six Degrees of Freedom." *Proc. Institute of Mechanical Engr.*, London, England, Vol. 180, pp. 371-386.
- (2) Gough V. E., and Whitehall S. G., 1962, "Universal Tire Test Machine," *Proceedings 9th Int. Technical Congress F.I.S.I.T.A.*, Vol. 117, pp.117-135.
- (3) Clavel, R. 1988, "Delta, a Fast Robot with Parallel Geometry," *18th International Symposium on Industrial Robots*, Sydney, Australia, pp. 91-100.
- (4) Pierrot, F., Reynaud, C., and Fournier, A., 1990, "DELTA: A Simple and Efficient Parallel Robot," *Robotica*, Vol. 8, pp. 105-109.
- (5) Siciliano, B., 1999, "The Tricept Robot: Inverse Kinematics, Manipulability Analysis and Closed-Loop Direct Kinematics Algorithm," *Robotica*, Vol. 17, pp. 437-445.
- (6) Tsai, L. W. and Joshi, S., 2000, "Kinematics and Optimization of a Spatial 3-UPU Parallel Manipulator," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, No. 4, pp. 439-446.

- (7) Wenger, P., and Chablat, D., 2000, "Kinematic Analysis of a New Parallel Machine Tool: The Orthoglide," *Advances in Robot Kinematics*, Edited by J. Lenarcic and M. L. Stanisic, Kluwer Academic Publishers, London, pp 305-314.
- (8) Kim, H. S., and Tsai, L. W., 2003, "Design Optimization of a Cartesian Parallel Manipulator," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, No. 1, pp. 43-51.
- (9) Kim, H. S., and Tsai, L. W., 2002, "Evaluation of a Cartesian Parallel Manipulator," *8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, 24-28 June, Caldes de Malavella, Spain, pp. 21-28.
- (10) Gosselin, C. M., and Angeles, J., 1989, "The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 111, No. 2, pp. 202-207.
- (11) Fang, Y. F., and Tsai, L. W., 2004, "Structure Synthesis of a Class of 3-DOF Rotational Parallel Manipulators," *IEEE Trans. on Robotics Automation*, Vol. 20, No. 1, pp. 117-121.
- (12) Fang, Y. F., and Tsai, L. W., 2002, "Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DOF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures," *Int. J. of Robotic Research*, Vol. 21, No. 9, pp. 799-810.
- (13) Gosselin, C., 1990, "Stiffness Mapping of Parallel Manipulators," *IEEE Transaction on Robotics and Automations*, Vol. 6, pp. 377-382.
- (14) Griffis, M., and Duffy, J., 1993, "Global Stiffness Modeling of a Class of Simple Compliant Couplings," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 28, No. 2, pp. 207-224.
- (15) Tahmasebi, F. and Tsai, L. W., 1995, "On the Stiffness of a Novel Six-Degrees-of-Freedom Parallel Manipulator," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 12, No. 12, pp. 845-856.
- (16) Zhang, D., and Gosselin, C. M., 2001, "Kinetostatic Modeling of N-DOF Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Prismatic Actuators," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, pp. 375-381.
- (17) Zhang, D., and Gosselin, C. M., 2002, "Kinetostatic Modeling of Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Revolute Actuators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 599-617.
- (18) Zhang, D., and Gosselin, C. M., 2002, "Kinetostatic Analysis and Design Optimization of the Tricept Machine Tool Family," *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 124, pp. 725-733.
- (19) Zhang, D., and Gosselin, C. M., 2002, "Parallel Kinematic Machine Design with Kinetostatic Model," *Robotica*, Vol. 20, pp. 429-438.
- (20) Joshi, S. A., and Tsai, L. W., 2002, "Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 124, pp. 254-258.
- (21) Zlatanove, D., Bonev, I., and Gosselin, C., 2002, "Constraint Singularities as C-Space Singularities," *Proceedings of the 8th Advances in Robot Kinematics*, edited by J. Lenarcic and F. Thomas, Kluwer Academic Publishers, pp. 183-192.
- (22) Han, C., Kim, J., Kim J., and Park, F. C., 2002, "Kinematic Sensitivity Analysis of the 3-UPU Parallel Mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 787-798.
- (23) Tsai, L. W., 1999, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, New York, NY.
- (24) Tsai, L. W., 2000, *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*, CRC Press, pp. 221-247.
- (25) Duffy, J., 1996, *Statics and Kinematics with applications to Robotics*, Cambridge University Press.
- (26) Ball, R. S., 1990, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (27) Mohamed, M. G., and Duffy, J., 1985, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators," *ASME J. Mech., Transm., Autom. Des.*, Vol. 107, pp. 226-229.