

# 추가변형을 고려한 환원판 결합 원통셀의 진동해석

김 영 완<sup>†</sup> · 정 강<sup>\*</sup>

## Vibration Analysis of Annular Plate Combined Cylindrical Shells Considering Additional Deformations

Young-Wann Kim and Kang Chung

**Key Words :** Combined Cylindrical Shell (결합셀), Annular Plate (환원판), Rotational Coupling (회전연성), Artificial Spring(가상 스프링), Rayleigh-Ritz Approach (Rayleigh-Ritz 법)

### Abstract

The theoretical method is developed to investigate the vibration characteristics of the combined cylindrical shells with an annular plate joined to the shell at any arbitrary axial position. The structural rotational coupling between shell and plate is simulated using the rotational artificial spring. For the translational coupling, the continuity conditions for the displacements of shell and plate are used. For the uncoupled annular plate, the transverse motion is considered and the in-plane motions are not. And the additional transverse and in-plane motions of the coupled annular plate by shell deformation are considered in analysis. Theoretical formulations are based on Love's thin shell theory. The frequency equation of the combined shell with an annular plate is derived using the Rayleigh-Ritz approach. The effect of inner-to-outer radius ratio, axial position and thickness of annular plate on vibration characteristics of combined cylindrical shells is studied. To demonstrate the validity of present theoretical method, the finite element analysis is performed.

### 1. 서 론

원통형 연료탱크내의 유체 출렁거림을 방지 또는 억제하기 위해 원통셀의 임의의 위치에 주로 환원판을 결합하여 사용한다. 셀에 환원판이 결합됨으로써 판이 결합되지 않은 셀에 비해 진동특성은 매우 복잡하다. 셀과 판이 결합된 원통셀에 대해 몇몇 연구자가 전달행렬법<sup>(1)</sup>, 동적 응답법<sup>(2~5)</sup>, 가상 스프링법<sup>(6~8)</sup> 및 유한요소법<sup>(9)</sup> 등을 이용하여 진동특성에 대한 연구를 수행하였다. 그러나 이전의 연구에서는 셀의 변형에 의한 환원판의 추가변형은 고려하지 않고 셀에 의해 내평면 방향으로 강제운동만 한다고 가정하여 해석한 경우가 대부분이다.<sup>(2~7)</sup> 그러나 결합되는 판의 크기가 작은 경

우 셀의 변형에 의해 판이 횡 방향 뿐만 아니라 내평면 방향으로도 변형이 일어날 수 있으므로 판의 내평면 변형을 고려하여야 한다. 단순히 원판이 결합된 경우 판이 매우 얇은 경우를 제외하고는 이와 같은 변형은 일어나지 않으나 환원판이 결합된 경우에는 판이 얇지 않아도 이와 같은 현상이 일어나므로 반드시 고려해야만 한다. 그러나 대부분의 이론연구에서 이들에 대한 영향을 고려하지 않았으며, 단순히 셀의 변형에 의해 판이 강제 운동만 한다고 가정하여 해석을 수행하였으며, Yuan 과 Dickinson<sup>(8)</sup>의 연구에서만 이와 같은 현상을 고려하였다. 그러나 이들 연구에서 다항식을 이용하여 변위식의 가정을 하였으나, 다항식의 선택이 매우 복잡하여 그다지 효과적이지 못하다.

따라서 본 연구에서는 환원판이 결합된 원통셀에 대해 고전적인 변위식의 한 형태인 보합수를 수정하지 않고 진동형상에서의 결합특성을 표현하였으며, 가상스프링과 기하학적 연속조건을 만족시키는 방법을 이용하여 결합지점에서의 셀의 변형에

<sup>†</sup> 여수대학교 기계공학과  
E-mail : ywkim@yosu.ac.kr  
TEL : (061)659-3285 FAX : (061)652-3655

<sup>\*</sup> 여수대학교 기계공학과

의한 판의 모든 방향에 대한 추가 변형을 고려하였다. 사용된 가상 스프링은 원주방향으로 균일하게 분포되며 두 구조물간의 상대회전이 일어나지 않도록 연성시킨다. 이론해석에서 진동수 방정식을 얻기 위해 Rayleigh-Ritz 법이 이용되었다. 본 연구에서 유도된 이론적 방법의 타당성을 검증하기 위해 유한요소 프로그램인 ANSYS<sup>(10)</sup>를 이용한 2 차원 유한요소해석을 통하여 비교, 검토하였으며, 셀의 변형에 의한 판의 내평면 변형을 고려하지 않은 자료<sup>(8)</sup>와 비교, 검토하였다.

### 2. 수 식 화

Fig. 1 에서처럼 축방향 임의의 위치  $x^*$ 에 환원판이 결합된 원통셀이 고려되었다. 여기서  $R$ ,  $L$  과  $t_s$  는 각각 셀의 반지름, 길이 및 두께이며,  $a$ ,  $t_p$  는 환원판의 안쪽 반지름 및 두께이다. 원통셀의 좌표계는 축 방향을  $x$ , 원주 방향을  $\theta$ , 수직 방향을  $z$  로 표현하였으며, 좌표계의 원점은 셀 끝단 중앙면의 임의의 지점에 위치한다.

원통셀 및 환원판에 대한 변형에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_1 = \frac{1}{2} \{X_s\}^T [\bar{K}_s] \{X_s\} \tag{1}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \{p_k\}^T [\bar{K}_p] \{p_k\} \tag{2}$$

여기서  $\{X_s\} = \{U_{mn} \ V_{mn} \ W_{mn}\}$  로 원통셀의 각 방향에 대한 변위성분  $u_s, v_s$  및  $w_s$  를 구성하는 미정계수이며,  $\{p_k\}$  는 환원판의 횡 방향 변위  $u_p$  를 구성하는 미정계수이다.  $[\bar{K}_s]$  와  $[\bar{K}_p]$  는 원통셀 및 환원판에 대한 강성행렬이다. 또한 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

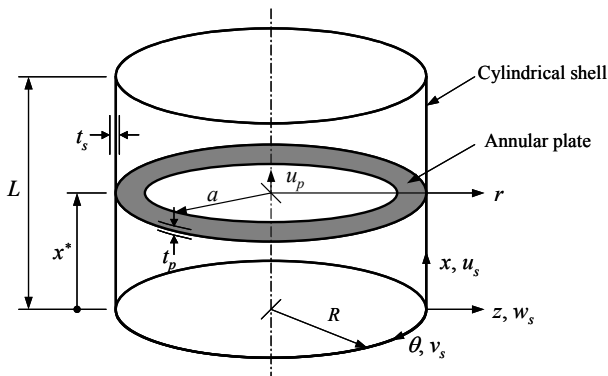


Fig. 1 Combined cylindrical shell with an annular plate

$$T_1 = \frac{1}{2} \{X_s\}^T [\bar{M}_s] \{X_s\} \tag{3}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \{p_k\}^T [\bar{M}_p] \{p_k\} \tag{4}$$

여기서  $[\bar{M}_s]$  와  $[\bar{M}_p]$  는 원통셀 및 환원판에 대한 질량행렬이다. 식(1~4)의 유도 과정은 참고문헌 [8]에 자세히 제시되었다.

한편 판은 셀의 변형에 의해 추가적으로 변형될 수 있다. 셀의 중앙면에서 수직방향으로  $z$  또는  $(r-R)$ 만큼 떨어진 지점에 대한 판의 추가 변형  $u_a, v_a$  및  $w_a$  는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_a &= u_s - (r-R)w_{s,z} \\ v_a &= \frac{r}{R}(v_s - w_{s,\theta}) + w_{s,\theta} \\ w_a &= w_s \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 하첨자  $a$  는 판의 추가 변형을 의미한다.

판의 추가적인 변형에 의한 판의 변형에너지 및 기준운동에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_{V_p} \{\epsilon_a\}^T [S_T] \{\epsilon_a\} dV_p \tag{6}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \rho \int_{V_p} [u_a^2 + v_a^2 + w_a^2] dV_p \tag{7}$$

여기서  $dV_p = dxrd\theta dr$  이다. 추가변형에 의해 판의 변형 형태는 링요소로 취급할 수 있기 때문에  $u_a$  는 무시된다. 따라서 추가변형에 대한 변형률-변위 관계식은 다음과 같이 된다.

$$\{\epsilon_a\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{ar} \\ \epsilon_{a\theta} \\ \epsilon_{ar\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{a,r} \\ (w_a + v_{a,\theta})/r \\ (w_{a,\theta} - v_a)/r + v_{a,r} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

따라서 판에 발생하는 추가 변형에 의한 변형 및 기준운동에너지를 다음과 같이 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$U_3 = \frac{1}{2} \{X_s\}^T [\bar{K}_a] \{X_s\} \tag{9}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \{X_s\}^T [\bar{M}_a] \{X_s\} \tag{10}$$

여기서  $[\bar{K}_a]$  과  $[\bar{M}_a]$  은 판의 추가변형에 대한 판의 강성 및 질량행렬이다. 참고문헌[8]의 경우

이와 같은 판의 추가변형에 대해서는 고려하지 않았으며, 내평면 방향으로 환원판이 단지 강제 운동만을 하는 것으로 가정하여 해석을 수행하였다.

판과 셸의 완전한 결합을 위해 부가적으로 가상의 회전 스프링을 이용하여 상대 회전이 연성되도록 하였다. 이 때  $k_R$  의 스프링 상수를 갖는 가상 스프링은 원주 방향으로 균일하게 분포된다. 가상스프링에 저장되는 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_4 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k_R [(w_{s,x})_{x=x^*} + (u_{p,r})_{r=R}]^2 R d\theta \quad (11)$$

이 식은 다음과 같이 행렬형태로 쓸 수 있다.

$$U_4 = \frac{1}{2} \{X_{sp}\}^T [\bar{K}_{sp}] \{X_{sp}\} \quad (12)$$

여기서  $\{X_{sp}\} = \{W_{mn} \ p_k\}$  이고,  $[\bar{K}_{sp}]$  는 스프링의 강성행렬이다.

환원판이 결합된 원통셸에 대한 진동수방정식을 얻기 위해 다음의 Rayleigh-Ritz 법을 적용하자.

$$\frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^4 (U_i - \omega^2 T_i) = 0, \quad (13)$$

$$\{X\} = \{U_{mn} \ V_{mn} \ W_{mn} \ p_{nk}\}$$

여기서  $\omega$  는 결합셸의 고유진동수이다.

식 (13)으로부터 다음과 같이 진동수방정식을 행렬형태로 얻을 수 있다.

$$\det\{[\bar{K}_i] - \omega^2 [\bar{M}_i]\} = 0 \quad (14)$$

여기서  $[\bar{K}_i]$  와  $[\bar{M}_i]$  는 결합셸의 강성 및 질량행렬이다.

$$[\bar{K}_i] = [K_s] + [K_p] + [K_a] + [K_{sp}] \quad (15a)$$

$$[\bar{M}_i] = [M_s] + [M_p] + [M_a] \quad (15b)$$

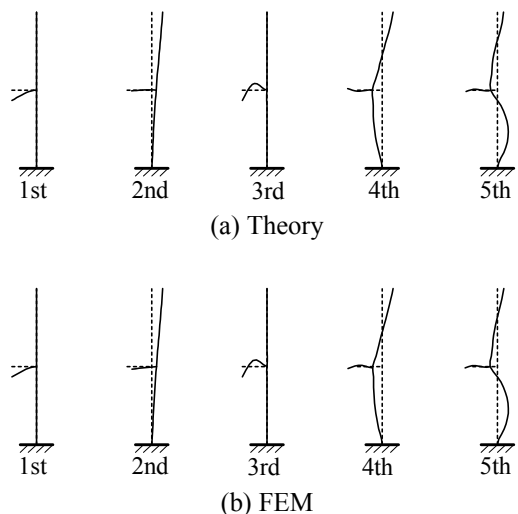
결과적으로 식(14)는 고유치 문제로써 수치적으로 풀면 구하고자 하는 고유진동수 및 고유벡터를 얻을 수 있다.

### 3. 결과 및 토의

본 연구에서는 탄성계수  $E=72\text{GPa}$ , 프와송 비  $\nu=0.3$ , 밀도  $\rho=2780\text{kg/m}^3$  의 물성을 갖는 알루미늄으로 구성된 결합셸을 고려하였다. 본 연구에서 제시한 이론적 방법의 타당성을 검증하기 위해 유한요소프로그램인 ANSYS<sup>[10]</sup>에서 제공하는 2 차원 축대칭 구조 셸요소(SHELL61)를 이용한 2 차원 해석을 통해 얻은 유한요소결과 및 추가 내평면 변형을 고려하지 않은 참고문헌[8]의 결과를 Table 1 에 제시하여 이론해와 비교, 검토하였다. 고려된 결합셸은  $R=0.2\text{m}$ ,  $L=2R$ ,  $t_s=2\text{mm}$ ,  $t_p=t_s$ ,  $a/R=0.5$  의 기하형상을 갖으며, 환원판은  $x^*=0.5L$  의 축방향 위치에 결합되어 있다. Table 1 에서  $f_{th}$  및  $f_{FEM}$  은 각각 이론 및 유한요소해석을 통해 얻은 진동수이다.

**Table 1** Comparison study with FEM

n	Method	Natural frequency (Hz)				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
1	Theory	269.23	1098.8	1189.0	2769.5	3068.2
	FEM	255.93	1083.2	1123.7	2679.9	2908.6
	Ref.[8]	267.27	1147.3	1179.0	2949.5	3070.0
2	Theory	392.67	931.25	1267.7	2259.4	3088.3
	FEM	377.67	919.71	1242.2	2152.5	2925.4
	Ref.[8]	390.66	928.51	1298.0	2301.6	3111.3
3	Theory	558.96	666.38	1498.7	2017.5	2586.0
	FEM	541.78	644.73	1430.0	1952.1	2530.1
	Ref.[8]	557.75	639.72	1499.0	1923.0	2505.1
4	Theory	483.90	770.20	1679.6	1752.4	2078.9
	FEM	477.19	747.84	1619.9	1677.6	2025.3
	Ref.[8]	468.62	772.22	1593.8	1738.5	2014.1
5	Theory	442.70	1021.7	1424.1	1711.8	2035.0
	FEM	440.20	995.68	1381.0	1665.2	1961.7
	Ref.[8]	445.20	1021.4	1391.5	1653.8	2032.9
6	Theory	504.30	1240.4	1323.0	1497.8	2336.0
	FEM	503.76	1216.6	1288.1	1452.1	2279.3
	Ref.[8]	498.39	1232.0	1323.0	1470.1	2331.3



**Fig. 2** Comparison of axial vibration mode shapes of  $n=2$  mode for combined shell used in Table 1.

제시된 것처럼 이론해가 유한요소해보다 큰 값을 갖으며, 전반적으로 모든 모드에 대해 서로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. Fig. 2는 Table 1의 결과 중 원주방향 반파수  $n=2$  모드에 대해 이론 및 유한요소해석 결과로부터 얻은 축 방향 진동형상을 제시한 것으로 모든 모드에 대해 잘 일치한다. 1차 진동형상의 경우 판만 변형되는 판 지배(PD) 모드이고, 2차 진동형상의 경우는 셸의 변형에 의해 진동형상이 결정되는 셸 지배(SD) 모드이며, 3차 진동형상의 경우는 PD 모드, 4차 진동형상의 경우 SD 모드이다. 한편 5차 진동형상의 경우 셸의 변형량에 비해 판의 변형량이 상대적으로 작게 나타나지만 셸뿐만 아니라 판에서도 변형이 동시에 일어나는 혼합 (CP) 모드라 할 수 있다. 참고

문헌[8]에서 셸에 변형에 의한 판의 운동은 강제 운동만 한다고 가정하였다. 즉 셸의 변형에 의해 판이 반경방향으로  $n=1$  모드로만 강제운동하는 것으로 가정하였으나, 본 연구의 이론 및 유한요소 결과의 2차 및 4차 진동형상에서 나타난 것처럼  $n=2$  에서도 셸의 변형에 의해 반경방향으로 변형되는 것을 볼 수 있어 모든 모드에 대해 내평면 거동을 고려해야만 정확한 결과를 얻을 수 있다.

판의 결합위치가 결합셸의 1차 고유진동수 및 진동형상에 미치는 영향을 알아보기 위해 Fig. 3이 제시되었다. 고려된 결합셸의 기하자료는 앞의 예에서 이용된 것과 동일하다. 판이 결합되지 않은 셸의 경우 진동수는 원주방향 반파수에 따라 최소값까지 감소한 후 다시 증가하는 거동을 하나 결합셸의 경우 다소 복잡한 거동을 하고 있다. 모든 결합셸에 대해 원주방향 반파수(이하 반파수)가 작은 경우 반파수의 변화에 따라 진동수가 증가를 한다. 그러나  $x^*=0.25L$  과  $0.5L$  의 경우 진동수가 어느 반파수까지는 증가하다가 감소한 후 다시 증가하는 거동을 한다. 이와 같은 이유는 진동형상에서 나타난 것처럼 작은 반파수에서는 진동형상이 판의 지배를 받다가 어느 반파수 이상이 되면 셸의 지배를 받기 때문에 나타나는 현상이다.  $x^*=0.75L$  의 경우 진동형상에 나타난 것처럼 반파수에 관계없이 진동형상이 항상 PD 모드이기 때문에 진동수는 항상 증가 한다.  $x^*=L$  의 경우 진동형상이  $n=5$  까지는 판의 지배를 받다가 그 이상이 되면 셸의 지배를 받기 때문에 진동수 변화에서도  $n=5$  를 기준으로 증가하는 거동이 약간 다르게 나타나고 있다. 1차 진동형상은 반파수가 작은 경우 PD 모드를 갖다가 반파수가 커지면 SD 모드로 전환됨을 알 수 있다. 결합위치에 따라 진동수의 변화가 다양하게 나타나므로 결합구조물 설계시 결합위치에 따른 영향을 충분히 검토하여야 한다.

Fig. 4는 판의 반경비( $a/R$ )에 따른 1차 진동수 및 진동형상의 변화를 나타낸 것이다. 고려된 셸은 앞의 경우와 같으며 단지 환원판은  $x^*=0.75L$  에 결합되어 있다.  $a/R=0.9$  의 환원판 결합셸을 제외한 모든 셸의 경우 진동형상이 반파수의 증가에 관계없이 PD 모드를 갖기 때문에 반파수에 따라 진동수가 증가하며, 반파수가 큰 경우 셸에서도 변형이 발생되기 때문에  $n=7$  이후  $a/R<0.7$  인 결합셸의 경우 진동형상이 SD 모드로 전환될 것으로 판단되기 때문에 진동수가 감소할 것으로 예측된다.  $a/R=0.9$  의 환원판이 결합된 셸의 경우 진동형상이 반파수의 변화에 따라 절점이 나타나지 않는 1차 셸모드에서 판이 결합되는 지점에 절점이 형성되

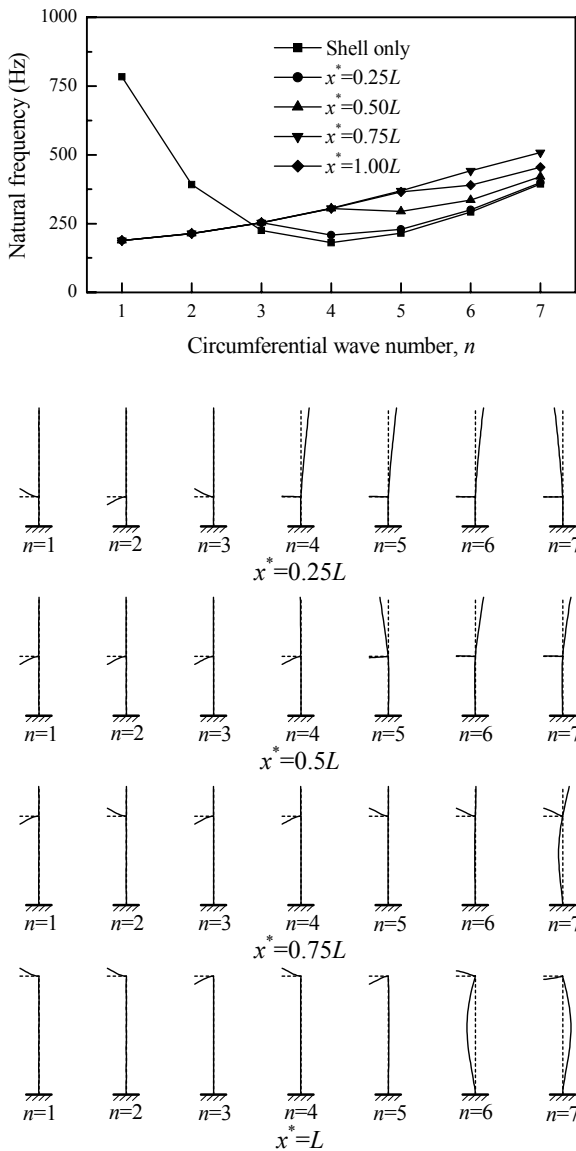


Fig. 3 Effect of axial position of annular plate for the first modes of combined shell

는 2 차 셸모드로 변환되기 때문에 진동수도 감소-증가-감소-증가 거동을 하며 진동차수에 관계없이 진동수가 결합되지 않은 셸에 비해 항상 큰 값을 갖는다. 이와 같은 현상은 반경비가 큰 환원판이 존재함으로써 환원판이 보강재 역할을 하여 셸의 강성을 증가시키기 때문이다. 반경비가 0.9 인 결합셸의 경우 작은 반파수에서 진동형상이 반경 방향으로 변형이 나타나는 것을 볼 수 있다. 참고 문헌 [8]의 경우와 같이 반경 방향으로 강제운동만 한다고 가정할 경우 이와 같은 형상을 구현할 수 없다.

판 및 셸의 두께비( $t_p/t_s$ )에 대한 영향을 알아보기 위해 Fig. 5 가 제시되었다. 고려된 셸은 앞의 경우와 동일하며, 단지  $x^*=0.75L$  및  $a/R=0.7$  이다. 1 차

진동특성을 나타내는 Fig. 7 에서처럼 두께비가 작은 경우 반파수에 관계없이 진동형상이 항상 PD 모드를 갖기 때문에 진동수가 증가하는 거동을 한다. 그러나 두께비가 커지면 진동형상이 PD 모드에서 SD 모드로 전환되기 때문에 진동수 거동도 증가-감소-증가 거동을 하게 된다. 두께비가 커질수록 진동형상에서 PD 모드에서 SD 모드로 전환되는 반파수가 작아지는 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 판의 두께가 두꺼워지면 판의 강성이 상대적으로 커지기 때문에 나타나는 현상이다. 두께비가 커지면 반파수  $n=5$  이상인 경우 진동수가 거의 같게 나타나고 있으며, 이 때 진동형상이 서로 같고 환원판의 강성 및 질량효과가 환원판의 두께에 관계없이 거의 동일하게 작용하기 때문 이

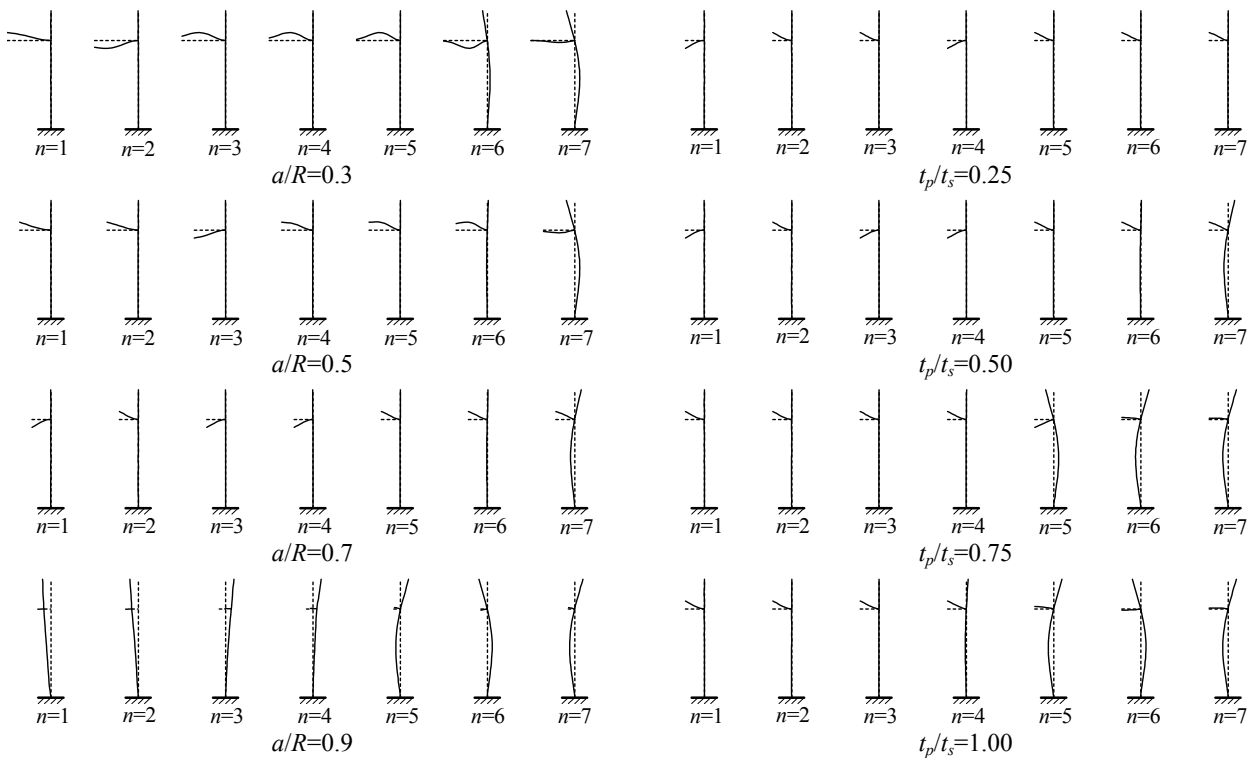
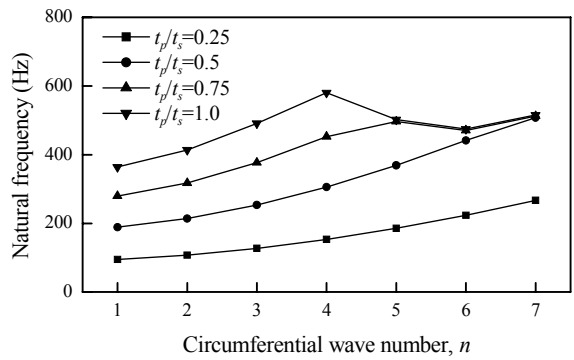
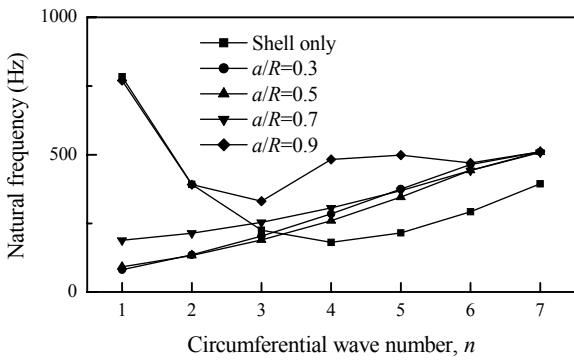


Fig. 4 Effect of radius ratio of annular plate for the first modes of combined shell

Fig. 5 Effect of thickness of annular plate for the first modes of combined shell

와 같은 현상이 나타난다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 하나의 환원판이 임의의 위치에 결합된 원통셀에 대한 진동특성을 분석하기 위한 이론적 해법이 제시되었다. 셸과 판의 연결은 상대회전에 대해서는 가상 회전스프링을 상대변위에 대해서는 기하학적 연속조건을 이용하여 모사하였다. 변위식에 이용된 보합수를 수정하지 않고 진동특성, 특히 진동형상에서의 결합특성을 정확히 표현할 수 있었다. 또한 결합지점에서 셸의 변형에 의한 판의 추가 변형을 고려함으로써 결합셀의 진동특성을 정확히 예측할 수 있었다. 유한요소해석을 통해 해를 비교, 검토함으로써 이론적 방법의 타당성을 검증하였다. 환원판의 위치, 크기 및 셸에 대한 판의 두께비가 진동특성에 미치는 영향이 매우 크다는 것을 확인하였다.

#### 후 기

이 논문은 2003 년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2003-041-D00032).

#### 참고문헌

- (1) Yamada, G., Irie, T. and Tamiya, T., 1986, "Free Vibration of a Circular Cylindrical Double-Shell System Closed by End Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, pp.297~304.
- (2) Huang, D.T. and Soedel, W., 1993, "Study of the Forced Vibration of Shell-Plate Combinations Using the Receptance Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, pp.341~369.
- (3) Huang, D.T. and Soedel, W., 1993, "Natural Frequencies and Modes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, pp.403~427.
- (4) Huang, D.T., 2001, "Approximate Modal Characteristics of Shell-Plate Combined Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246, pp. 942~952.
- (5) Yim, J.S. and Sohn, D.S., 1998, "Analysis of Free Vibration of a Cylindrical Shell with a Circular Plate under Various Kinds of Boundary Conditions," *Trans. of KSNVE*, Vol. 8, No. 5, pp. 936~948.
- (6) Cheng, L. and Nicolas, J., 1992, "Free Vibration Analysis of a Cylindrical Shell-Circular System with General Coupling and Various Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, pp.231~

247.

- (7) Kim, Y.-W. and Chung, K., 2003, "Vibration Analysis of Combined Cylindrical Shells with an Annular Plate," *Trans. of KSNVE*, Vol. 13, No. 10, pp.767~776.
- (8) Yuan, J. and Dickinson, S. M., 1994, "The Free Vibration of Circularly Cylindrical Shell and Plate Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, pp. 241~263.
- (9) Cho, J.R., Lee, H.W. and Kim, K.W., 2002, "Free Vibration Analysis of Baffled Liquid-Storage Tank by The Structural-Acoustic Finite Element Formulation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, pp.847~866.
- (10) SASI, 2000, "ANSYS User's Manual," Swanson Analysis System Inc., Houston.