페트로프-갤러킨 자연요소법을 이용한 비선형 동해석

이 홍 우† · 조 진 래*

Nonlinear Dynamic Analysis using Petrov-Galerkin Natural Element Method

Hong-Woo Lee and Jin-Rae Cho

Key Words : Petrov-Galerkin Natrual Element Method(페트로프 갤러킨 자연요소법), Implicit Time Discretization (내재적 시간 이산화), Total Lagrangian Formulation (토탈 라그랑지 정식화), Constant Average Acceleration Method(일정 평균 가속도법).

Abstract

According to our previous study, it is confirmed that the Petrov-Galerkin natural element method (PG-NEM) completely resolves the numerical integration inaccuracy in the conventional Bubnov-Galerkin natural element method (BG-NEM). This paper is an extension of PG-NEM to two-dimensional nonlinear dynamic problem. For the analysis, a constant average acceleration method and a linearized total Lagrangian formulation is introduced with the PG-NEM. At every time step, the grid points are updated and the shape functions are reproduced from the relocated nodal distribution. This process enables the PG-NEM to provide more accurate and robust approximations. The representative numerical experiments performed by the test Fortran program, and the numerical results confirmed that the PG-NEM effectively and accurately approximates the nonlinear dynamic problem.

1. 서 론

초기의 부브노프-갤러킨(Bubnov-Galerkin) 개념에 기초한 자연요소법(NEM)은 Sibson 또는 Laplace 보간함수의 선형 일관성(linear consistency)에도 불구하고 조각시험에서 선형 변위장을 정확히 재구성하지 못하였을 뿐만 아니라 해의 수렴 특성에도 영향을 끼쳐 점근적 수렴(asymptotic convergence)이 보장되지 않았다.[1-2] 이러한 BG-NEM 의 문제점은 약형식의 수치적분 오차에 기인하며, 이는 형상함수의 지지영역과 배경격자(background mesh) 경계의 불일치가 가장 큰 요인이 되고 있음이 참고문헌 [3])을 통하여 밝혀졌다. 이에 저자들은 논문 [3-5])에서 수치적분 오차를 감소시키기 위한 방안을 제시하고, 선형 정탄성 문제에 대한 수치 예제를 통하여 그 성능을 검증하였다. 제안된 방법이 시험함수(test function)와 시도함수(trial function)가 다르게 적용되는 페트로프-갤러킨(Petrov-Galerkin) 개념에 기반을 두고 있으므로 기존의 자연요소법이 부브노프-갤러킨 개념에 기초한 정식화인 것에 대비해 페트로프-갤러킨 자연요소법(PG-NEM)이라 명명하였다.[3-5)]

본 논문에서는 PG-NEM 을 이용하여 기하학적 비선형(geometrical nonlinearity)을 포함한 동해석 문제의 해법을 제시하고, 다양한 수치 예제를 통하여 비선형 동해석 문제에서 PG-NEM 의 타당성 및 정확성을 검증하도록 한다.

† 부산대학교 기계설계공학과 대학원
E-mail : leehongw@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-3206 FAX : (051)514-7640
* 부산대학교 기계공학부

2. Natural Neighbor Interpolation Function

2.1 Natural neighbor interpolation

본 논문에서 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화는 2 차원 유클리드(Euclide) 공간 $\Re^2$ 에서 정의한다. 먼저, 평면상의 서로 다른 점 집합 로

부터 1 차 보로노이 다이어그램 V_I 는 다음과 같은 수학적 표현으로 나타내어 진다.[1-2)]

$$V_I = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J), \forall J \neq I \right\} \qquad (1)$$

여기서, $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$는 서로 다른 두점 사이의 거리를 나타내는 유클리드 메트릭(Euclide metric)이다. **Fig. 1** 에 7 개의 절점에 대한 보로노이 다이어그램을 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 보로노이 다이어그램은 각 점을 닫힌 부영역 또는 경계가 없는 부공간으로 분할하게 되며, 자세한 내용은 참고문헌 [1-2)]에서 확인할 수 있다.

Laplace 보간함수를 정의하기 위해 보로노이 다각형 V_I 와 V_J 의 1 차원 공통 면(facet)인 ω_{IJ} 를 다음과 같이 정의한다.[2)]

$$\omega_{IJ} = \left\{ x \in \overline{V}_I \cap \overline{V}_J \,,\; J \neq I \right\}, \; \overline{V}_I = V_I \cup \partial V_I \qquad (2)$$

여기서, V_I 와 V_J 의 공통의 모서리가 존재하지 않으면 ω_{IJ} 는 공집합이 된다. **Fig. 2** 와 같은 평면상의 보로노이 다각형을 고려하자. 점 $\mathbf{x}_P$ 는 4 개의 자연 이웃점을 가지고 있으며, 절점 $\mathbf{x}_I$ 에 관련된 보로노이 모서리 길이는 $s_I(\mathbf{x}_P) = |\omega_{xI}|$로 표현되고, 절점 $\mathbf{x}_I$ 의 보로노이 모서리와 점 $\mathbf{x}_P$ 사이의 수직거리는 $h_I(\mathbf{x}_P) = 0.5 d(\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_I)$ 로 기술된다. 따라서, Laplace 형상함수 $\phi_I(\mathbf{x}_P)$ 는 식 (3)과 같이 정의된다.[2)]

$$\phi_I(\mathbf{x}_P) = \frac{\alpha_I(\mathbf{x}_P)}{\sum_{\ell=1}^{M} \alpha_\ell(\mathbf{x}_P)}, \; \alpha_I(\mathbf{x}_P) = \frac{s_I(\mathbf{x}_P)}{h_I(\mathbf{x}_P)}, \; I = 1,2,\ldots,M \qquad (3)$$

식 (3)에서 알 수 있듯이 2 차원인 경우 Laplace 형상함수는 보로노이 모서리와 관련된 길이 비로 정의된다. 한편, Laplace 형상함수는 다음의 기본적인 특성을 가지고 있다.

$$0 \le \phi_I(\mathbf{x}) \le 1 \,, \quad \phi_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ} \qquad (4)$$

$$\sum_{\ell=1}^{N} \phi_\ell(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega \,, \quad \mathbf{x} = \sum_{\ell=1}^{N} \phi_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{x}_\ell \qquad (5)$$

식 (4)-(5)의 세가지 특성은 식 (3)의 정의로부터 쉽게 유추할 수 있으며, 4 번째 특성인 선형 일관성(linear consistency)은 Laplace 보간에 의해 임의의 선형함수를 완벽히 구현할 수 있음을 의미한다. 한편, 형상함수 $\phi_I(\mathbf{x})$의 미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_{I,\beta}(\mathbf{x}) = \left[\alpha_{I,\beta}(\mathbf{x}) - \phi_I(\mathbf{x}) \sum_{\ell=1}^{M} \alpha_{\ell,\beta}(\mathbf{x}) \right] \Big/ \sum_{\ell=1}^{M} \alpha_\ell(\mathbf{x}), \quad \beta = x, y \qquad (6)$$

여기서, $\alpha_{I,\beta}(\mathbf{x}) = \left[s_{I,\beta}(\mathbf{x}) - \alpha_I h_{I,\beta}(\mathbf{x}) \right] / h_I(\mathbf{x})$ 이다.

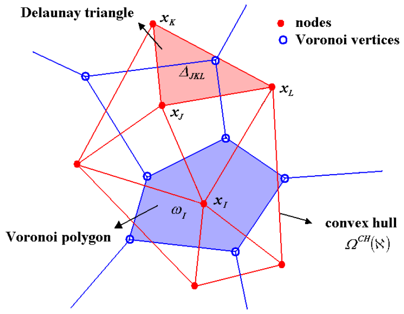


Fig. 1 Voronoi diagram and Delaunay triangulation.

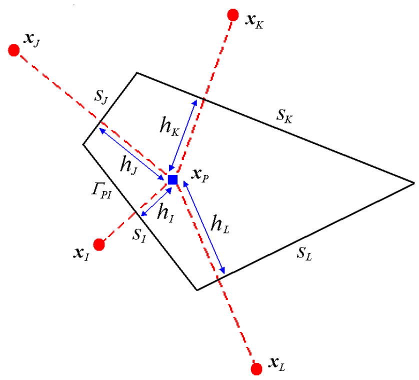


Fig. 2 Geometric definition of Voronoi polygon.

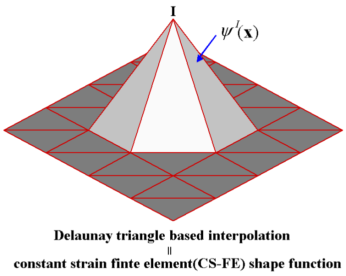
2.2 Petrov-Galerkin concepts

Sukumar 등 [1-2)]이 제시한 기존 BG-NEM (Bubnov-Galerkin Natural Element Method)에서는 시도 및 시험함수를 Laplace 기저함수를 이용하여 구성하였으며, 이는 적분함수의 지지영역과 적분영역의 불일치를 유발하여 심각한 적분정도의 저하를 야기시켰다. 이와 같은 적분오차로 인하여 BG-NEM 은 조각시험을 통과하지 못할 뿐만 아니라, 점근적 수렴(asymptotic convergence)을 보장하지 못하는 경우도 발생하게 된다. 저자들의 선행 연구에서는 이러한 적분오차를 억제하기 위하여 시험함수의 지지영역을 적분영역과 동일하게 구성하는 방법을 제시하였다.[3-5)] 이는 기존의 부브노프-갤러킨 기반의 자연요소법과는 달리 시도함수와 시험함수를 다르게 구성하기 때문에 페트로프-갤러킨 기반의 자연요소법으로 볼 수 있다. 따라서, 새로운 자연요소법을 기존의 BG-NEM 에 대비하여 PG-NEM (Petrov-Galerkin Natural Element Method)으로 명명하였다.

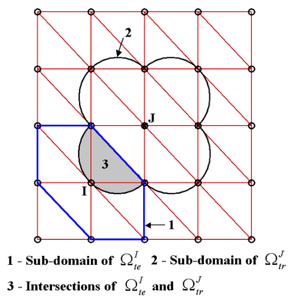
PG-NEM 에서 시험함수는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수를 이용하여 구성한다. 즉, 시도 형상함수(trial shape function)는 BG-NEM 의 형상함수인 Laplace 형상함수를 이용하고, 시험 형상함수(test shape function)는 델라우니 삼각형의 절점을

이용하여 새롭게 구성한다. 이러한 델라우니 삼각형 기반의 형상함수는 CS-FEM(Constant Strain Finite Element Method)[6]의 형상함수와 동일하며, 적분점에서의 함수계산은 면적좌표(area coordinates)를 이용하여 얻을 수 있다.

Fig. 3(a)에서 구성된 형상함수의 지지영역은 절점 를 둘러싼 델라우니 삼각형의 합 영역과 동일하며, 이는 적분영역과 적분함수 지지영역의 불일치로 인한 적분오차를 제거할 수 있는 매우 적절한 형상함수를 제공하게 됨을 의미한다. 즉, **Fig. 3**(b)에서 절점 I 의 시험함수영역 Ω_{te}^{I} 와 절점 J 의 시도함수영역 Ω_{tr}^{J} 의 교차영역은 적분영역인 Ω_{te}^{I} 내부에서만 정의됨을 알 수 있다. 따라서, 어떠한 경우에 있어서도 적분함수와 적분영역이 항상 일치하게 되며, BG-NEM 의 가장 큰 단점인 적분의 부정확성에 의한 오차를 크게 줄일 수 있게 된다. PGNEM 을 이용한 선형/비선형 정해석(linear static analysis) 및 적분오차에 대한 평가는 참고문헌 [3-5]에서 확인할 수 있다.



(a) Test shape function in PG-NEM



(b) Intersections of test and trial shape functions

Fig. 3 Supports of shape functions in PG-NEM.

3. Nonlinear Dynamic Problem

3.1 토탈 라그랑지 정식화

미리 규정된 변위 $\hat{u}_i^{t+\Delta t}$ 이 필수경계 $\Gamma_D^{t+\Delta t}$ 에서 정의되고, 표면력 $t_i^{t+\Delta t}$ 이 자연경계 $\Gamma_N^{t+\Delta t}$ 에 부여된 경우에 대한 변형 후의 2 차원 탄성체를 고려하자. 주어진 동적탄성모델(elasto-dynamic model)의 운동량 보존식(momentum equation)으로부터 다음의 약형식(weak form)을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega^{t+\Delta t}} \rho^{t+\Delta t} v_i \ddot{u}_i^{t+\Delta t} d\Omega^{t+\Delta t} + \int_{\Omega^{t+\Delta t}} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j^{t+\Delta t}} d\Omega^{t+\Delta t}$$
$$+ \int_{\Omega^{t+\Delta t}} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j^{t+\Delta t}} d\Omega^{t+\Delta t} = \int_{\Gamma_N^{t+\Delta t}} t_i^{t+\Delta t} v_i \, d\Gamma^{t+\Delta t} + \int_{\Omega^{t+\Delta t}} b_i^{t+\Delta t} v_i \, d\Omega^{t+\Delta t} \tag{7}$$

여기서, $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ 은 시간 $t+\Delta t$ 에서의 Caucy 응력 텐서(stress tensor)를 의미하며, $b_i^{t+\Delta t}$ 은 체적력(body force)을 나타낸다.

대변형 문제에서 변형후 형상 $\Omega^{t+\Delta t}$ 는 미지의 상태이기 때문에 식 (7)의 적분이 가능하도록 알려져 있는 참조형상(reference configuration)으로 사상시키는 과정(mapping procedure)이 필요하다. 본 논문에서는 참조형상으로 초기형상 Ω^0 를 선정하였으며, 이는 일반적인 토탈 라그랑지 정식화(total Lagrangian formulation)가 된다. 따라서, 식 (7)의 적분식은 다음과 같이 정리된다.

$$\int_{\Omega^0} \rho^0 v_i \ddot{u}_i^{t+\Delta t} \, d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} S_{ij}^{t+\Delta t} \tilde{E}_{ij}^{t+\Delta t} \, d\Omega^0 = \int_{\Gamma_N^0} t_i^0 v_i \, d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^0 v_i \, d\Omega^0 \tag{8}$$

여기서, 변형후 체적과 초기 체적 사이의 관계는 변형증분율(deformation gradient) $F_{ij}^{t+\Delta t}$ 의 행렬식(determinant)에 의해 표현된다.[7]

$$d\Omega^{t+\Delta t} = J^{t+\Delta t} d\Omega^0 = \left| F_{ij}^{t+\Delta t} \right| d\Omega^0 = \left| \frac{\partial x_i^{t+\Delta t}}{\partial x_j^0} \right| d\Omega^0 \tag{9}$$

$S_{ij}^{t+\Delta t}$ 은 초기형상에 대한 변형후 상태의 2 차 Piola-Kirchhoff(PK2) 응력을 의미하며, 다음의 관계에 의해 정의된다.[7]

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{1}{J^{t+\Delta t}} F_{ik}^{t+\Delta t} S_{kl}^{t+\Delta t} F_{jl}^{t+\Delta t} \tag{10}$$

$E_{ij}^{t+\Delta t}$ 은 Green-Lagrange(GL) 변형률 텐서 (strain tensor)이며, $\tilde{E}_{ij}^{t+\Delta t}$ 은 변형률과 관련된 텐서로서 GL 변형률의 변분(variation)으로 해석되어 진다.

$$E_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i^{t+\Delta t}}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j^{t+\Delta t}}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{t+\Delta t}}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{t+\Delta t}}{\partial x_j^0} \right] \tag{11}$$

$$\tilde{E}_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{t+\Delta t}}{\partial x_i^0} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{t+\Delta t}}{\partial x_j^0} \right] \tag{12}$$

t_i^0 는 $d\Gamma^{t+\Delta t}$ 과 $d\Gamma^0$ 의 면적비에 의해 조정된 표면력이며, b_i^0 는 $d\Omega^{t+\Delta t}$ 과 $d\Omega^0$ 의 체적비에 의해 조정된 체적력이다. 따라서, t_i^0 와 b_i^0 는 식 (13)과 같은 관계를 가진다

$$t_i^0 = A^{t+\Delta t} t_i^{t+\Delta t}\ ,\quad b_i^0 = J^{t+\Delta t} b_i^{t+\Delta t}\ ,\quad A^{t+\Delta t} = J^{t+\Delta t} \left\| \left[F_{ij}^{t+\Delta t} \right]^{-1} n_j^0 \right\| \tag{13}$$

여기서, n_i^0 는 $d\Gamma^0$ 에 수직인 단위벡터이며, $A^{t+\Delta t}$ 은 Nanson 의 관계 [7])로부터 정의되는 면적비이다.

3.2 Linearization of weak form

식 (8)에 정리된 약형식의 선형화를 위해 각 적분소(integrand)를 Taylor 급수 전개시키면 다음과 같은 선형화된 양형식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^0} \rho^0 v_i \ddot{u}_i^t \, d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} C_{ijpq}^t E_{pq}^\Delta \widetilde{E}_{ij}^t \, d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} S_{ij}^t \widetilde{E}_{ij}^\Delta \, d\Omega^0 \\ &= \int_{\Gamma_N^0} t_i^0 v_i \, d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^0 v_i \, d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} S_{ij}^t \widetilde{E}_{ij}^t \, d\Omega^0\end{aligned} \tag{14}$$

여기서, u_m^Δ 는 변위 증분이며, C_{ij}^n 은 right Cauchy-Green(rCG) 텐서로서 $C_{ij}^t = F_{ki}^t F_{kj}^t$ 에 의해 계산되며, C_{ijpq}^t 는 시간 t 에서의 접선 물성텐서(tangent modulus tensor)를 의미한다. 한편, E_{ij}^Δ 와 $\widetilde{E}_{ij}^\Delta$ 는 변형률의 증분에 관련된 텐서로서 다음과 같이 정의된다.

$$E_{ij}^\Delta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i^\Delta}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j^\Delta}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^\Delta}{\partial x_i^0}\frac{\partial u_m^n}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_m^n}{\partial x_i^0}\frac{\partial u_m^\Delta}{\partial x_j^0} \right] \tag{15}$$

$$\widetilde{E}_{ij}^\Delta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_m}{\partial x_i^0}\frac{\partial u_m^\Delta}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_m^\Delta}{\partial x_i^0}\frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} \right] \tag{16}$$

선형화된 식 (14)를 반복형식(iteration form)으로 다시 정리하면, 다음 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^0} \rho^0 v_i \ddot{u}_i^t \, d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} C_{ijpq}^{(k)} E_{pq}^{\Delta(k+1)} \widetilde{E}_{ij}^{(k)} \, d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} S_{ij}^{(k)} \widetilde{E}_{ij}^{\Delta(k+1)} \, d\Omega^0 \\ &= \int_{\Gamma_N^0} t_i^{(k)} v_i \, d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^{(k)} v_i \, d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} S_{ij}^{(k)} \widetilde{E}_{ij}^{(k)} \, d\Omega^0\end{aligned} \tag{17}$$

여기서, 상첨자 (k)는 시간 $t+\Delta t$ 의 (k)번째 반복을 나타내며, 상첨자 $\Delta^{(k+1)}$ 은 (k+1)번째 증분을 의미한다. 식 (17)에서 알 수 있듯이 수식의 간소화를 위해 시간을 나타내는 첨자는 생략하였다. 약형식의 적분은 델라우니 삼각형에서 3 점 Gauss 규칙에 의해 이루어진다.

3.3 Discretization of weak form

식 (17)의 선형화된 약형식의 근사해를 구하기 위해 변위 증분 $\mathbf{u}^{\Delta(k+1)}$, 변위 시험함수 $\mathbf{v}$ 를 다음 식과 같이 공간 이산화한다.

$$\mathbf{u}^{\Delta(k+1)} = \sum_{I=1}^{NTR} \phi_I \overline{\mathbf{u}}_I^{\Delta(k+1)}\ ,\quad \mathbf{v} = \sum_{I=1}^{NTE} \psi_I \overline{v}_I \tag{18}$$

여기서, ϕ_I 는 보로노이 다이어그램으로부터 구성되는 Laplace 기저함수로서 변위 함수의 근사에 적용되며, ψ_I 는 델라우니 삼각형 기반의 일정변형률 유한요소 기저 함수이다. NTR 과 NTE 는 각각 Gauss 적분점에서의 자연 이웃점과 델라우니 삼각형 꼭지점 개수를 의미한다. 각각의 형상함수는 n 번째 하중단계의 평형상태 좌표를 기준으로 계산된다.

Remark 본 논문에서는 Laplace 기저함수를 시도 및 시험 형상함수로 사용하는 기존의 자연요소법과는 달리 시험 형상함수로 델라우니 삼각형 기반의 기저함수를 적용하며, 이는 수치적분영역인 델라우니 삼각형과 적분함수 지지영역의 경계 불일치로 인해 유발되는 심각한 적분오차의 발생을 억제하기 위해 제안된 방법이다. 이러한 기법은 기존의 자연요소법이 부브노프-갤러킨 개념에 기반을 둔 것과는 달리 시도와 시험함수의 기저를 다르게 선택하는 페트로프-갤러킨 개념에 기반을 두고 있으므로 PG-NEM 이라 명명되었다.

한편, 식 (18)의 공간 이산화와는 별도로 가속도와 변위 사이의 관계를 유한개의 시간간격을 이용하여 이산화(time discretization) 한다. 본 논문에서는 Newmark 법 중에 시간간격에 상관없이 안정적인 일정 평균 가속도(constant average acceleration) 기법을 도입한다.[8]) 일정 평균 가속도법은 대표적인 내재적(implicit) 기법으로 다음 식에 의해 정의된다.

$$\ddot{u}_i^{t+\Delta t} = \frac{2}{\gamma \Delta t}\left[u_i^{t+\Delta t} - u_i^t - \dot{u}_i^t \Delta t - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 (1-\gamma) \ddot{u}_i^t \right] \tag{19}$$

$$\dot{u}_i^{t+\Delta t} = \dot{u}_i^t + \ddot{u}_i^t (1-\delta)\Delta t + \ddot{u}_i^{t+\Delta t} \delta \Delta t \tag{20}$$

여기서, γ 와 δ 는 Newmark 파라미터로서 무조건적 안정(unconditional stability)을 보장하기 위해 $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$ 를 선정한다.

식 (18)-(20)을 식 (17)에 대입하여 이산화시키면 최종적으로 선형 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[\frac{2}{\gamma (\Delta t)^2} \mathbf{M}^{(k)} + \mathbf{K}_M^{(k)} + \mathbf{K}_G^{(k)} \right] \overline{\mathbf{u}}^{\Delta(k+1)} = \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{(k)} - \mathbf{f}_{\mathrm{int}}^{(k)} - \mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{(k)} \tag{21}$$

여기서, $\mathbf{K}_M^{(k)}$ 및 $\mathbf{K}_G^{(k)}$ 는 각각 물성 접선 강성행렬(material tangent stiffness matrix) 및 기하 접선 강성행렬(geometric tangent stiffness matrix)을 의미한다. $\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{(k)}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{int}}^{(k)}$ 및 $\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{(k)}$ 는 각각 외력 벡터(external force vector),내력 벡터(internal force vector) 및 관성력 벡터(inertia force vector)를 나타낸다.

식 (21)의 적절한 수렴상태를 판단하기 위해 식 (22)-(23)과 같이 변위와 하중에 관련된 수렴조건

(convergence condition)을 동시에 적용한다.

$$\Delta\bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{rel}} = \left|\mathbf{u}^{\Delta(k+1)}\right| \Big/ \left|\mathbf{u}^{(k+1)}\right| \le \alpha_{\mathrm{u}} \left|\bar{\mathbf{u}}^{(k+1)}\right| \tag{22}$$

$$\Delta\bar{\mathrm{f}}_{\mathrm{rel}} = \left|\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{(k+1)} - \mathbf{f}_{\mathrm{int}}^{(k+1)}\right| \Big/ \left|\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{(k+1)}\right| \le \alpha_{\mathrm{f}} \left|\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}^{(k+1)}\right| \tag{23}$$

여기서, $\Delta\bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{rel}}$ 와 $\Delta\bar{\mathrm{f}}_{\mathrm{rel}}$ 은 상대 변위 증분(relative displacement increment)과 상대 하중잔여(relative force residual)를 나타내며, α_{u} 와 α_{f} 는 각각 변위와 하중의 수렴오차(convergent tolerance)로 1×10^{-5} 을 적용한다. 반복 후에 계산된 변위 증분으로부터 (k+1)번째 반복 후의 변위를 계산할 수 있다.

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + u_i^{\Delta(k+1)}, \quad k \ge 0 \tag{24}$$

수렴한 후의 속도와 가속도 성분은 식 (19)-(20) 으로부터 얻을 수 있다.

4. Numerical Examples

앞절에서 전개된 이론을 바탕으로 비선형 동해석에 대한 PG-NEM 의 적용 가능성 및 성능을 검증하도록 한다. 이를 위한 예제로서 Fig. 3 에 도시된 외팔 보를 도입한다. 해석을 위한 물성 모델로서 Saint Venant-Krichhoff 탄성 재료 [7]를 도입하였으며, 적용된 물성모델의 변형률 에너지 밀도 함수(strain energy density function), PK2 응력 및 접선 물성 텐서는 다음 식과 같이 주어진다.

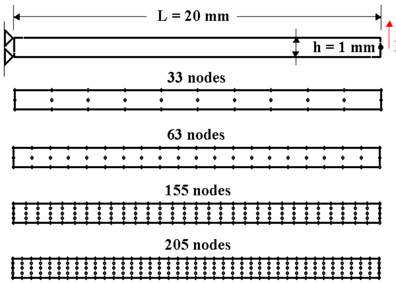


Fig. 4 Models for beam vibration

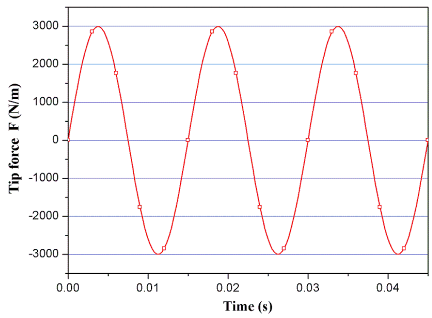
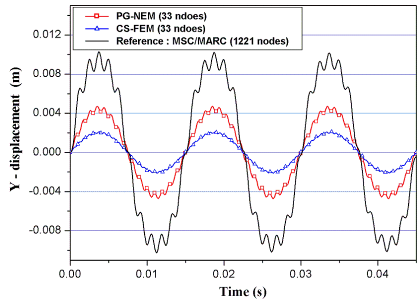
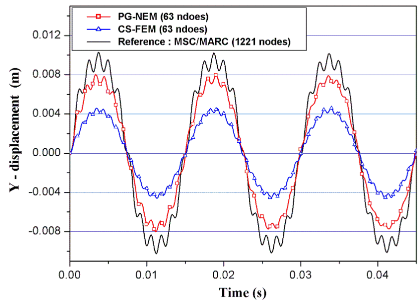


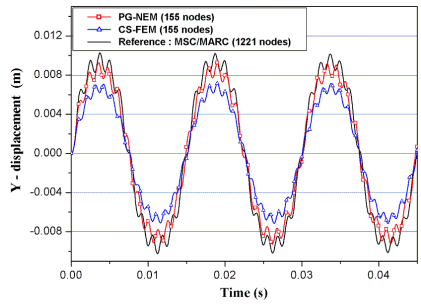
Fig. 5 Time variation of input force



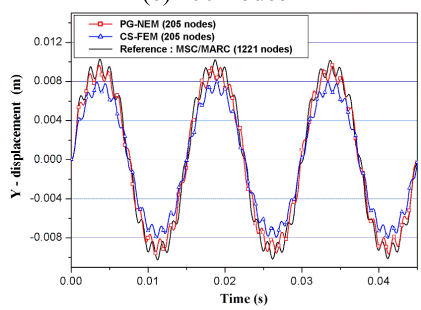
(a) 33 nodes



(b) 63 nodes



(c) 155 nodes



(d) 205 nodes

Fig. 6 Time variation of tip displacement

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \tag{25}$$

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \tag{26}$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{27}$$

여기서, λ 와 μ 는 Lame’ 상수이다. 해석에 적용된 재료의 물성은 탄성계수 $E = 7.24E9\ Pa$, 프와송 비 $\nu = 0.25$, 밀도 $\rho = 2780\ kg/m^3$ 이다.

Fig. 4 에 나타낸 것처럼 외팔 보의 길이는 20 mm, 두께는 1 mm 이며, 평면응력 상태를 가정

하였다. 해석에 사용된 모델은 11×3, 21×3, 31×5 및 41×5 개의 4 가지 균일 절점 분포를 적용하였으며, 해석 결과는 범용 유한요소 해석 프로그램인 MSC/MARC (1221 절점)의 결과와 비교하였다. **Fig. 5** 에 가해지는 하중의 시간함수를 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 하중은 1.5 초를 주기로 하는 sine 함수이며, 최대 하중은 3000 N/m 로 3 번의 주기동안 해석을 수행한다.

Fig. 6 에 하중을 가하는 외팔 보 끝단의 수직 방향 변위의 시간 변화를 도시하였다. 입력 하중과는 달리 변위의 시간 변동은 응답에서 국부적 진동을 관찰할 수 있으며, 이는 동적거동에 나타나는 관성의 효과로 보인다. 절점의 수가 작은 경우 CS-FEM 의 굽힘운동에 대한 취약성이 뚜렷이 드러나는 것을 알 수 있다. 절점의 수가 증가할수록 조밀한 격자를 적용한 MSC/MARC 의 결과에 근접해가는 것을 확인할 수 있다. 전체적으로 볼 때 PG-NEM 이 CS-FEM 에 비해 월등히 향상된 결과를 제공하고 있다. 이상의 결과는 이전의 선형 및 비선형 정해석에서 검증한 것과 같이 동해석에서도 PG-NEM 이 적절한 근사공간을 제공하며, 해석 결과의 정확도 면에서도 충분한 신뢰성을 확보할 수 있다는 것을 보여준다.

5. 결 론

Laplace 보간기법을 채용한 PG-NEM 을 적용한 비선형 동해석을 위해 토탈 라그랑지 정식화와 일정 평균 가속도법을 도입하였다. 전개된 이론 및 알고리즘을 바탕으로 시험 포트란 프로그램을 작성하였으며, 수치예제를 통하여 비선형 동해석 문제에 대한 PG-NEM 의 성능 및 타당성을 검증하였다. 수치결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

- 매 하중증분 마다 갱신된 절점 좌표로부터 최적의 Laplace 기저함수를 구성함으로 인해 CS-FEM 의 결과에 비해 뚜렷하게 향상된 성능을 보여주고 있다. 즉, 자연이웃 기반의 Laplace 형상함수는 해당 절점분포로부터 최적의 형상함수를 제공하게 되므로, 해석비용의 증가를 고려할 지라도 매우 효율적인 근사공간을 제공한다고 볼 수 있다.

- PG-NEM 은 격자 변형이 유발되는 대변형 동해석에서도 안정적인 해를 제공할 수 있으며, 수치적분 정확도의 향상에 PG-NEM 의 개념이 충분히 성능을 발휘하고 있다고 판단된다.

후 기

본 연구는 산자부 지역전략산업 석·박사 인력양성사업(2003.6-2006.4)지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Sukumar, N., Moran, B. and Belytschko, T., 1998, "The natural element method in solid mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp. 839-887.

(2) Sukumar, N, Moran, B., Semenov, A. Yu and Belikov, V. V., 2001, "Natural neighbor Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 1-27.

(3) Lee, H. W. and Cho, J. R., submitted, "The Petrov-Galerkin Natural Element Method : I. Concepts," *Computational Structural Engineering Institute of Korea*.

(4) Lee, H. W. and Cho, J. R., submitted, "The Petrov-Galerkin Natural Element Method : II. Linear Elastostatic Analyses," *Computational Structural Engineering Institute of Korea*.

(5) Lee, H. W. and Cho, J. R., submitted, "The Petrov-Galerkin Natural Element Method : III. Geometrically Nonlinear Analyses," *Computational Structural Engineering Institute of Korea*.

(6) Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T., 1981, *Finite Elements: An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J..

(7) Holzapfel, G. A., 2000, *Nonlinear Solid Mechanics; A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, England.

(8) Hughes, T. J. R. 1987, *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.