

2 단계 축소기법에 의한 축소시스템의 구성과 동하중에 의한 구조물의 동적 거동에 관한 연구

김 현 기[†] · 조 맹 효^{*}

Construction of the reduced system by two-level scheme and time integration in the reduced system under arbitrary loading

Hyun Gi Kim, Maenghyo Cho

Key Words : Ritz vector(리츠벡터), Sequential Elimination Scheme (순차적 소거법), Time integration method (시간적분법), Two-level scheme (2 단계 축소법)

Abstract

This study proposes a new two-level condensation scheme for the construction of a reduced system. In the first step, the candidate area is selected for the construction of the reduced system by energy estimation in element-level. In the second step, primary degrees of freedom are selected by sequential elimination from the candidate degrees of freedom linked to the selected elements. Numerical examples demonstrate that the proposed method saves the computational cost effectively and provides a reduced system which predicts the eigenvalues accurately. Moreover, the well-constructed reduced system can present the reliable behavior of the structure under arbitrary dynamic loads comparing to that of global system. Time integration in a reduced system can save the computing time remarkably. Through a few numerical examples, the efficiency and reliability of the proposed scheme are verified.

1. 서 론

일반적으로, 대형 구조물의 고유치 및 동적 해석을 위해서는 많은 전산자원과 계산 시간이 요구된다. 과거부터 이 문제를 보다 효율적으로 해결하기 위한 많은 기법들이 제안되어 왔다. 제안된 기법들은 대부분 구조물의 거동은 몇 개의 중요 저차모드에 의해 지배된다는 것을 이용한다. 이러한 특성을 이용하여 중요 저차모드를 추출하여 축소시스템을 구성함으로써 연산시간과 전산자원을 줄이기 위한 방법들이 제안되었다[1~4]. 주자유도 선정을 통해 축소시스템이 구성되면,

고유치 해석을 위한 시간비용의 절감은 확연하다. 또한, 선정된 주자유도들로부터 보다 정확하고, 효율적인 시스템 구성을 위한 연산 기법도 제안되어 왔으며, 대표적인 기법으로 **Guyan method**가 있다[1]. 축소시스템의 정확성과 효율성을 결정하는 요인은 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 첫째는 적절한 주자유도 선정 문제이고, 두번째는 주자유도와 부자유도 사이의 관계를 표현하는 변환행렬의 오차를 최소화하면서 시스템을 근사화하는 문제이다. 정확한 축소시스템의 구성을 위해서는 주자유도 선정이 가장 중요하며, 적절히 근사화된 행렬연산을 사용하더라도, 선정된 자유도에 따라서 그 한계를 갖게 된다.

본 연구에서는 축소시스템 구성을 위해서 2 단계 축소기법을 사용한다. 이 방법은 순차적 소거법(Sequential Elimination Scheme)의 신뢰성과 계산 측면에서 효율성을 갖고 있다.

적절히 구성된 축소시스템은 고유치 문제에 국한되지 않고, 다양한 응용분야에 적용될 수 있다.

[†] 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : shogun1@snu.ac.kr
TEL : (02)880-1645 FAX : (02)886-1693

^{*} 서울대학교 기계항공공학부 부교수

본 연구에서는 임의의 하중하에서 축소시스템을 이용한 시간적분을 통해 구조물의 거동을 살펴본다. 일반적인 정하중 하에서는 몇 개의 저차모드 만으로도 동적 거동을 잘 표현할 수 있다.

그러나, 고차모드의 영향을 무시할 수 없는 충격하중이나 짧은 주기를 갖는 동하중하에서는 입력 하중의 주파수를 포함할 수 있는 자유도의 선정이 필요하다.

본 연구에서는 축소시스템에서 동적 거동을 수행하고, 특히 짧은 주기의 동하중하에서 고려되어야 할 주자유도의 선정문제에 대해서 살펴보고자 한다.

2. 2 단계 축소기법에 의한 축소 시스템 구성

2.1 2 단계 축소기법

주자유도 선정 방법 중에서 순차적 소거법이 가장 널리 사용되고 있다[5]. 그러나, 이 방법은 매 알고리즘마다 한 개의 자유도 만을 소거하므로, 최종적인 축소시스템을 구성하기 위해서는 상당한 시간을 요구하게 된다. 최근에는 자유도 별 에너지 평가에 의해 주자유도를 한번에 선정하는 방법이 제안되었다[6]. 이 방법은 시간 소모의 문제는 없으나, 저차모드를 강조하는 경향을 보인다. 본 연구에서 사용된 2 단계 축소기법은 순차적 소거법의 신뢰성과 시간 문제에서의 효율성을 보증한다. Fig.1 은 2 단계 축소법의 전체적인 알고리즘이다.

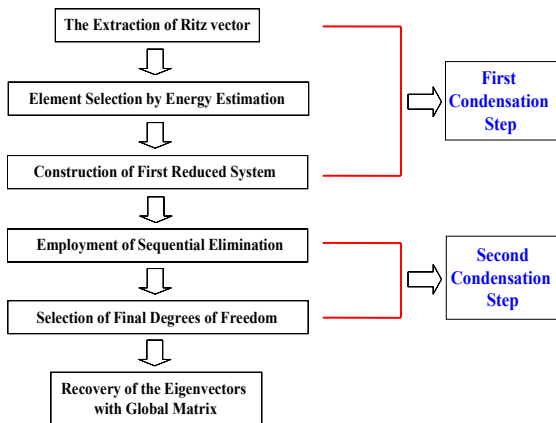


Fig. 1 Whole algorithm of Two-level condensation scheme

Fig.2 는 2 단계 축소법의 과정을 묘사한 것이다. 1 단계는 요소단위의 에너지 평가를 통해 주자유도

선정을 위한 후보 영역을 선택하고, 2 단계에서는 순차적 소거법에 의해 최종적인 축소시스템을 구성하게 된다.

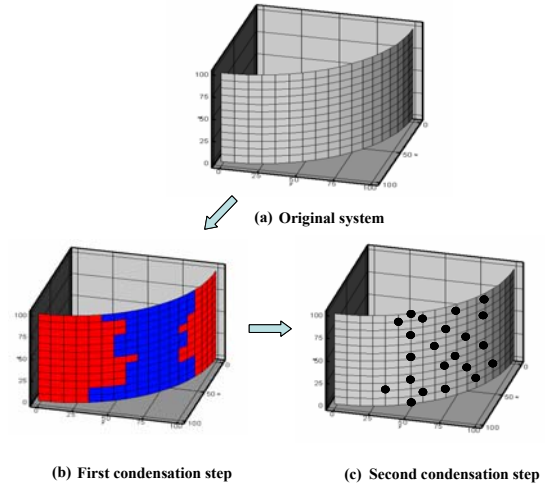


Fig.2 Configuration of two-level condensation scheme

2.2 1 단계 축소 시스템 구성

2.2.1 리츠벡터(Ritz vector)

후보영역 선정은 요소단위의 레일리(Rayleigh) 에너지 평가를 통해 이루어진다. 이를 위해 리츠벡터(Ritz vector)계산이 필요하다. 리츠벡터 계산을 위한 초기 가상하중은 질량행렬의 대각항을 통해 근사화하고, 식 (1)과 같은 정적 문제를 구성하게 된다. 구해진 해는 식(2)의 정규화 과정을 통해 첫 번째 리츠벡터가 된다.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{x}^{(1)}\} = [\mathbf{M}_i] \quad (1)$$

$$\{\mathbf{x}^{(1)}\} = \{\mathbf{x}^{(1)}\}^* / \{\mathbf{x}^{(1)}\}^{*T} [\mathbf{M}]\{\mathbf{x}^{(1)}\}^* \quad (2)$$

식 (2)에서 구해진 결과는 질량행렬과의 연산을 통해 두번째 리츠벡터를 구하기 위한 가상하중 벡터로 사용된다. 이전 단계에서 구해진 벡터들은 Gram-Schmit 직교화 과정을 통해 현재 단계의 벡터로부터 제거된다. 식 (3)은 이 과정을 보여주고 있으며, 원하는 개수의 리츠벡터를 얻을 때까지 반복된다.

$$\{\mathbf{x}^{(i)}\} = \{\mathbf{x}^{(i)}\} - \sum_{k=1}^{i-1} [\{\mathbf{x}^{(k)}\}^T [\mathbf{M}]\{\mathbf{z}^{(k)}\}] \{\mathbf{z}^{(k)}\} \quad (3)$$

$$\{\mathbf{z}^{(i)}\} = \{\mathbf{x}^{(i)}\} / \sqrt{\{\mathbf{x}^{(i)}\}^T [\mathbf{M}]\{\mathbf{x}^{(i)}\}}$$

여기서, i 는 현재의 리츠벡터를 의미하고, k 는 이전 단계에서 구해진 리츠벡터를 의미한다.

2.2.2 요소단위의 에너지 평가

앞에서 구해진 리츠벡터는 요소단위의 에너지 평가를 수행하는데 사용된다. 식(4)가 요소단위 레일리 에너지 계산을 나타낸다.

$$\lambda_e^i = \sum_{k=1}^n \frac{\left\{ \mathbf{z}^{(k)} \right\}^T \left[\mathbf{K}_e^i \right] \left\{ \mathbf{z}^{(k)} \right\}}{\left\{ \mathbf{z}^{(k)} \right\}^T \left[\mathbf{M}_e^i \right] \left\{ \mathbf{z}^{(k)} \right\}} \quad (4)$$

여기서, $[\mathbf{K}_e^i], [\mathbf{M}_e^i]$ 은 각각 요소단위의 강성, 질량행렬이고, $\{\mathbf{z}^{(k)}\}$ 는 k 번째 리츠벡터를 의미한다. m 개의 요소를 선택하는 경우 요소단위의 레일리 에너지 값이 작은 순서대로 선택된다.

2.2.3 가중치의 고려

가중치는 저차모드만을 강조하는 경향으로 선택되는 것을 피하기 위해 사용된다. 가중치는 강성 및 질량 행렬의 대각항으로 부터 얻어진다. $[\mathbf{K}], [\mathbf{M}]$ 이 $n \times n$ 행렬일 경우, 강성과 질량행렬의 대각항으로 구성된 벡터의 크기는 $n \times 1$ 이 된다. 이 벡터로부터 각 요소의 자유도에 해당되는 성분을 추출하여 내적을 수행한 후, 가중치를 계산하게 된다. 계산식은 식 (5)와 같다.

$$w_e^i = (\psi_i / \psi_{\max})^2, \psi_i = [\mathbf{K}_{ii}^e / \mathbf{M}_{ii}^e]^T [\mathbf{K}_{ii}^e / \mathbf{M}_{ii}^e] \quad (5)$$

가중치를 고려한 요소단위의 레일리 에너지 값은 식 (6)과 같다.

$$\Pi_e^i = \sum_{i=1}^k \lambda_e^i w_e^i \quad (6)$$

2.3 2 단계 축소 시스템 구성

1단계 축소결과로부터 얻어진 후보 영역에 순차적 소거법을 적용하여 최종적인 축소시스템을 구성하게 된다. 기존의 순차적 소거법은 상당히 많은 연산시간을 필요로 한다. 2단계 축소법에서의 순차적 소거법은 1단계 축소과정을 거친 축소시스템에 적용되므로, 많은 시간을 요구하지 않을 뿐만 아니라, 순차적 소거법의 신뢰성을 확보할 수 있는 장점이 있다. Fig.3 은 2단계에서 적용되는 순차적 소거법의 전체적인 알고리즘을 보여주고 있다.

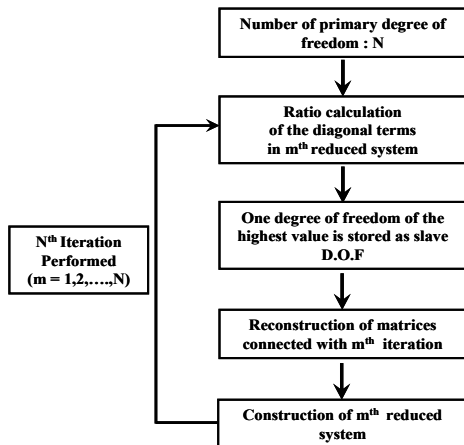


Fig.3 Sequential elimination algorithm in the 2nd step of the proposed scheme

3. 수치예제

몇 가지 수치예제의 고유치 해석을 통해 제안된 방법을 검증한다.

3.1 원뿔형 구조물

첫 번째 예제는 원뿔 형상의 구조물이다. 아래면이 고정되어 있고, 해석 조건은 Fig.4에 주어져 있다. 축소시스템을 구성하기 위해 주자유도 50개가 선정되었으며, 이것은 전체시스템의 2.5%의 시스템이다. 1단계 과정을 통한 후보 영역과 최종적으로 선정된 주자유도가 Fig.5에 주어졌다.

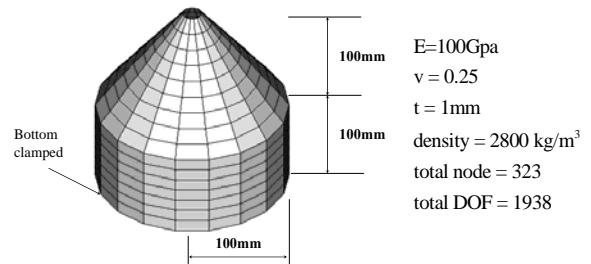


Fig.4 configuration of clamped conical structure

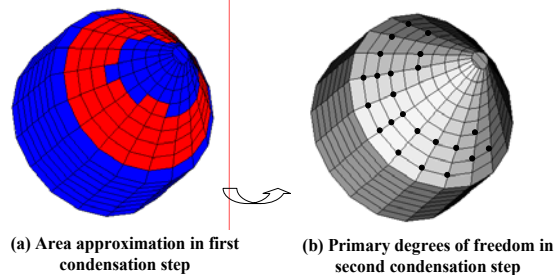


Fig.5 Selection results of the primary degrees of freedom by the proposed scheme

Table 1 은 전체시스템과의 고유치 비교를 통한 검증결과를 보여주고 있다. 10 개의 고유치를 비교하였으며 최대 오차값이 0.02%를 나타내고 있다. 이를 통해 제안된 방법의 신뢰성을 확인할 수 있다.

Table 1 Eigenvalue comparison between reduced system and global system in conical structure

Mode No.	Reduced system	Global system	Error(%)
1	11.680	11.680	0.000
2	15.043	15.043	0.000
3	21.475	21.474	0.004
4	23.695	23.695	0.000
5	24.886	24.886	0.000
6	28.522	28.522	0.000
7	35.324	35.323	0.003
8	37.214	37.214	0.000
9	41.687	41.687	0.000
10	54.854	54.886	0.020

3.2 샤프트 구조물

Fig.6 은 샤프트 예제이다. 4 절점 사면체 요소들

사용하였으며, 3705 개의 요소와 1193 개의 절점으로 구성되어 있다.

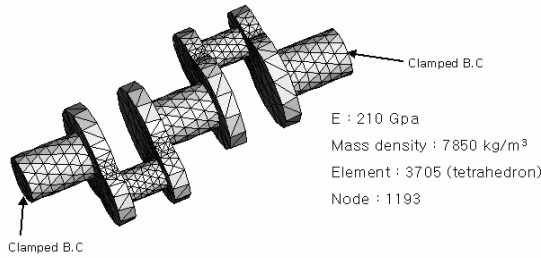


Fig.6 Configuration and analysis condition of shaft

Fig 7은 1 단계과정의 후보영역과 2 단계과정을 통한 최종적인 주자유도 선정 결과이다. 고유치 해석결과는 Fig. 8 에 주어졌다. 15 차 모드까지 구한 오차값을 나타내고 있으며, (a)는 최종적으로 60 개의 주자유도를 선정한 결과이고, (b)는 80 개의 주자유도를 선정한 결과이다. 결과에서 최대 오차값은 0.4% 이하이며, 제안된 방법의 신뢰성을 잘 나타내고 있다.

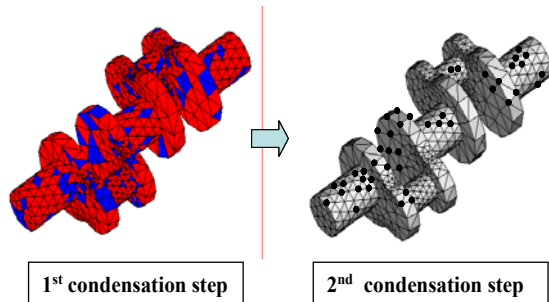


Fig.7 Selection result of primary degrees of freedom by two-level scheme in shaft

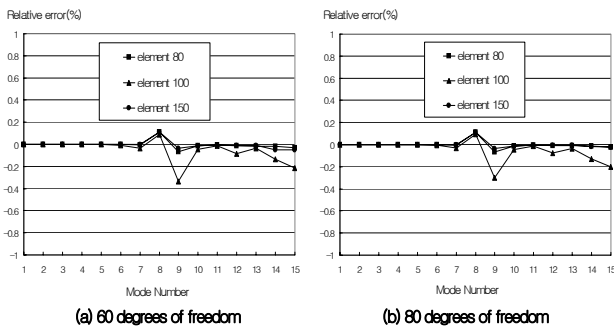


Fig.8 Error estimation of reduced system by two-level scheme in shaft

4 축소시스템에 의한 구조물의 동적 거동

앞에서 2 단계 축소법을 이용한 축소시스템 구성에 관하여 설명하였다. 축소시스템이 잘 구성되면, 전체 시스템으로부터 구해진 고유치 값과 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있으며, 시간 비용면에서는 매우 효율적인 방법이 된다. 또한, 전산자원과 시간이 많이 소요되는 대용량 구조물의 동적

거동 구현을 위한 시간 적분법에도 적용될 수 있다. 몇 가지 수치예제를 통해 그 신뢰성을 살펴보고자 한다.

4.1 정현파 하중하의 단순지지된 평판

첫 번째 예제는 단순 지지된 평판 문제이다. 정현파 하중이 가해지고 있으며, 동하중 위치는 평판의 중앙점이다. 전체시스템과의 비교는 절점 두곳에서 수행되었고, 위치는 Fig.9 에 나타내었다. 축소시스템을 구성을 하기 위해 주자유도는 40 개가 선정되었으며, 선정결과는 Fig.10 에 주어졌다. 동하중의 주기 $T=1s(6.28Hz)$ 로 주어지는 경우는 입력하중이 저주파영역이므로 저차모드만으로도 구조물의 거동을 잘 표현할 수가 있다. Fig.11 은 Fig.10 에서 선정된 주자유도만으로 구성된 축소시스템으로 시간 적분을 수행한 결과를 나타낸 것이다. 시간 간격은 0.004 초이며, 시간 범위는 0 ~ 4 초까지이다. 결과로부터, 하중위치를 고려하지 않았으나, 저차모드만을 고려한 축소시스템만으로도 동적 거동을 잘 나타낼 수가 있음을 알 수 있다.

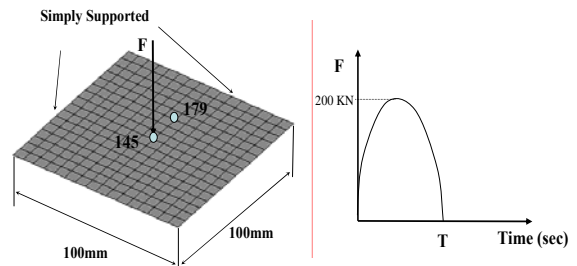


Fig.9 Configuration of plate model and dynamic loading

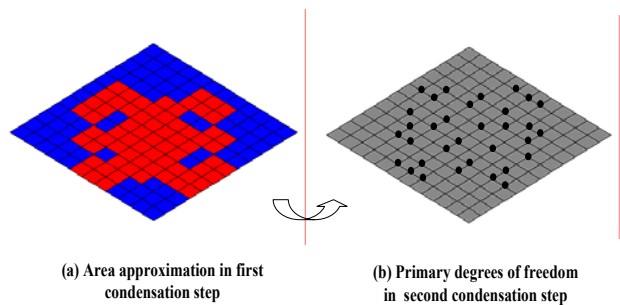


Fig.10 Selection result of primary degrees of freedom by two-level scheme in plate

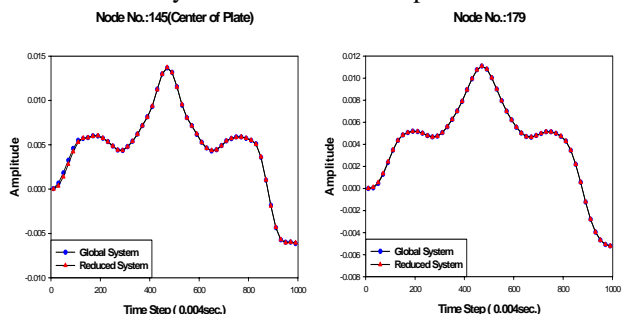


Fig.11 Time response by reduced system at the position number 145 and 179

그러나, 입력하중의 주기가 짧아지거나 충격하중이 되면 고차 모드의 영향을 무시할 수 없기 때문에, 이를 고려하는 자유도의 포함이 필요하다. Fig. 11 은 정하중 해석에 의해 입력하중의 영향을 고려할 수 있는 자유도를 추가적으로 선정한 결과이다. Fig.11 에서 선정된 주자유도를 통해 축소시스템을 구성하였고, 그것에 의한 시간 적분 결과가 Fig.12 에 주어진다. 가해진 입력하중의 주파수는 157.1Hz 이다. Fig.12 는 전체시스템과 각 주자유도 개수에 따라 나타나는 거동을 비교한 것으로, 주자유도 선정이 충분하지 못한 경우는 고주파의 영향을 나타내지 못하고 있음을 알 수 있다.

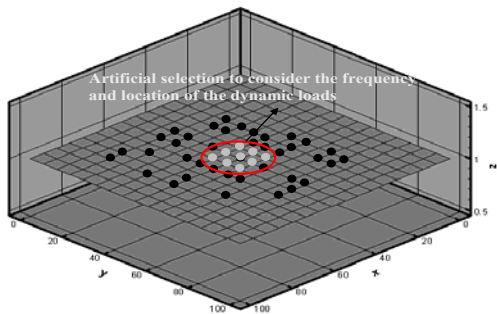


Fig.11 Selection of the primary DOFs and the artificial DOFs for loading frequency

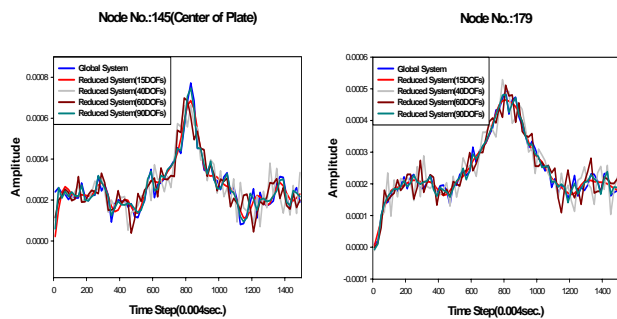


Fig.12 Time response comparison of 15DOFs, 40DOFs, 60DOFs and 90 DOFs reduced system and global system in 157.1Hz loading frequency (position number: 149 and 179)

주자유도 선정 개수의 기준은 리츠벡터의 계산에 의해 이루어진다. 축소시스템을 구성하기 위해 사용된 리츠벡터는 구성된 축소시스템이 포함할 수 있는 주파수 값에 대한 근사화된 정보를 제공할 수 있다. 따라서, 입력 주파수와와의 비교를 통해 축소시스템이 해당 주파수 범위를 포함하는지 여부를 예측할 수 있다. 만약, 축소시스템의 최대 주파수값이 입력주파수보다 작은 경우는 Fig.11 과 같은 정하중 해석작업을 통한 인위적인 주자유도 추가가 필요하다. Table 2 는 리츠벡터 계산을 통한 축소시스템의 자유도 개수 선정 기준을 보여주

고 있다. 결과에서 입력 주파수 157.1Hz 는 87 번째 모드에서 나타나며, 이를 위해서는 적어도 90 개 이상의 주자유도 선정이 필요함을 예측할 수 있다. Fig.12 의 결과에서도 주자유도 90 개로 구성된 축소시스템의 전체시스템의 거동과 잘 일치하고 있으며, 충분하지 않은 주자유도 개수로 구성된 축소시스템은 고차의 영향을 잘 표현하지 못함을 알 수 있다.

Table 2 Exact Ritz vector and selection estimation of primary DOFs in 157.1Hz loading case

Mode	Frequency(Hz)	Mode	Frequency(Hz)
76	86.37	86	153.29
77	90.08	87	156.12
78	97.10	88	162.83
79	97.52	89	171.93
80	100.14	90	187.08
81	108.60	91	207.65
82	115.65	92	234.42
83	119.23	93	264.00
84	124.41	94	297.57
85	133.70	95	316.91

4.2 원뿔형 구조물

두 번째 예제는 원뿔형 구조물에 삼각파형 동하중이 가해지는 경우이다. 하단부분에 고정되어 있고, 비교 위치는 절점 19 와 290 이다.

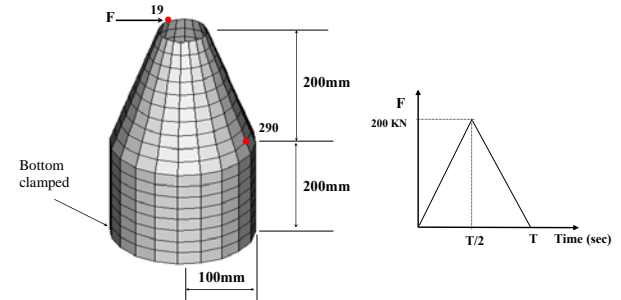


Fig.13 configuration of cone structure and loading type

Fig.14 는 62.8Hz 의 입력하중이 가해질 때, 2 단계 축소법에 의한 주자유도 선정 결과이다. Table 3 은 리츠벡터에 의한 주자유도 선정 개수를 나타내고 있다.

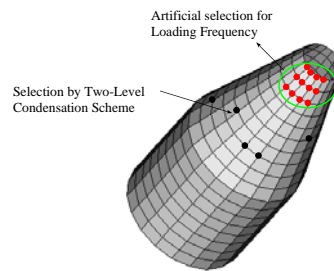


Fig.14 Selection of the primary DOFs and the artificial DOFs for loading frequency (T = 0.1s)

Table 3. Exact Ritz vector and selection estimation of primary DOFs in 62.8Hz loading case

Mode	Frequency(Hz)	Mode	Frequency(Hz)
1	41.42	11	116.38
2	41.42	12	116.38
3	52.49	13	123.55
4	52.49	14	123.55
5	78.55	15	131.69
6	78.55	16	131.68
7	95.33	17	133.51
8	95.33	18	133.51
9	112.10	19	139.79
10	112.10	20	139.79

위의 결과로부터 10 개의 주자유도를 선정하였으며, 하중위치를 포함시킨 경우와 그렇지 않은 경우의 축소시스템에서의 거동을 비교하였다. 결과는 Fig.15 에 주어져 있다.

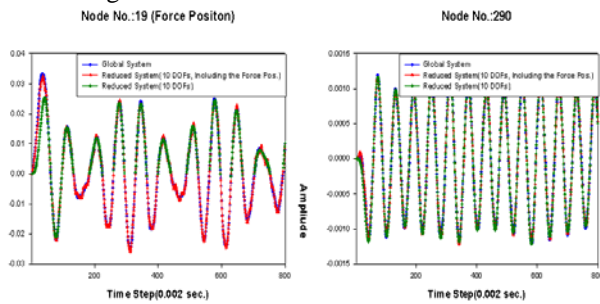


Fig. 15 Time response comparison of reduced system and global system in 62.8Hz loading frequency

하중위치를 포함시키지 않은 경우는 초기시간에서 약간의 오차를 보이고 있으나, 입력주파수를 고려한 주자유도를 추가한 경우는 매우 신뢰성 있는 동적 거동 결과를 보여주고 있다.

하중위치를 고려하지 않은 경우, 초기 오차는 구성된 축소시스템이 입력주파수를 포함하지 못하고 있기 때문으로 사료된다. 물론, Table 3 에서 주어지는 모드들을 포함하기 위해 그 보다 많은 10 개의 주자유도를 선정하였으나, 반드시 선정된 주자유도가 입력 하중의 주파수를 포함한다는 보장은 없다. 따라서, 신뢰성 있는 동적 거동을 나타내기 위해서는 구조물의 고유모드와 입력 하중 주파수를 동시에 고려한 주자유도 선정이 필요할 것으로 사료된다.

5. 결론

본 연구에서는 효율적이고, 신뢰성있게 축소시스템을 구성할 수 있는 2 단계 축소기법을 사용하였다. 이 방법은 요소단위의 레일리 에너지를 평가하여 후보 영역을 선정하는 첫 번째 단계와 순

차적 소거법이 적용되는 두 번째 단계로 나뉘어진다. 순차적 소거법이 한번의 축소과정을 거친 시스템에 적용되므로 많은 시간을 필요로 하지 않으며, 신뢰성 높은 순차적 소거법을 적용하므로 최종적인 고유치 해석 결과도 매우 정확하다. 몇 가지 수치예제를 통해 제안된 방법을 검증하였다. 축소시스템은 고유치 해석 뿐만 아니라, 시간 적분법에 의한 구조물의 동적 거동을 표현할 수 있다. 잘 구성된 축소시스템은 전산자원과 시간비용을 절감할 수 있을 뿐만 아니라, 전체 시스템의 해석결과에 상응하는 정확한 결과를 얻을 수 있다.

본 연구에서는 리츠벡터 계산을 통해 선택해야 하는 주자유도 수를 가늠한 후, 축소시스템을 구성하였다. 가해진 하중의 입력 주파수가 축소시스템에 의해 포함되는 저주파일 경우는 축소시스템만으로도 신뢰성 있는 동적 거동을 나타낼 수 있다. 그러나, 입력 하중의 주파수가 축소시스템이 포함하지 못하는 고주파 영역일 경우는 고차 모드의 영향을 나타내지 못하기 때문에 이에 대한 고려가 필요하다. 이를 위해 가해진 하중을 정하중으로 간주하고, 정적 해석을 수행한 후 이를 토대로 영향력있는 자유도를 인위적으로 선정하였다. 그리고, 선정된 자유도를 주자유도로 추가하여 축소시스템을 구성함으로써, 신뢰성있는 동적 거동을 나타낼 수 있다.

본 연구는 동적 해석 뿐만 아니라, 축소시스템을 통한 최적화 문제, 대용량 구조물에서의 영역분할을 통한 축소시스템 구성 문제등으로 확장할 계획이다.

참고문헌

- (1) Guyan, R.J., 1978, "Reduction of stiffness and mass matrices," *AIAA Journal*, Vol.3, p. 380
- (2) Andrew, Leung.Y.T, 1978, "An accurate method of dynamic condensation in structural analysis," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol.12, pp.1705-1715
- (3) O'Callahan, J., 1989, "A procedure for an improved reduced system(IRS) model," *Proceedings of the 7th international modal analysis conference*, Union college, Schenectady, NY. pp. 17-21
- (4) Zhang,D,W., Li,S., 1995, "Succession-level approximate reduction(SAR) technique for structural dynamic model," *Analysis conference(Nashville,TN)*, Union college press, Schenectady, NY, pp.435-441
- (5) Shah,V.N., Raymund,M.,1982, "Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol.18, pp.89-98
- (6) Kim,K.O., Y.J.Choi, 2000, "Energy method for selection of degrees of freedom in condensation," *AIAA Journal*, Vol.38, pp.1253-1259