MLS기반 변절점 유한요소 및 레벨셋 방법을 이용한 고체-유체 경계의 전산모사

임재혁†·조영삼*·임세영**

Tracking of Evolving Solid-Fluid Interface Using Level set and MLS-based finite elements with variable nodes

Jae Hyuk Lim, Young-Sam Cho and Seyoung Im

Key Words: Tracking interface(경계 추적), MLS-based element(무요소법 기반 유한 요소), Level set(레벨셋방법)

Abstract

Tracking of evolving solid-fluid interfaces is treated using level set method and MLS-based finite element with variable nodes. Several applications will be illustrated to demonstrate the effectiveness of the present scheme

1. 서 론

최근 새로운 형태의 MLS(Moving Least - Square)근사를 기반으로 한 변절점 유한요소가 개발되었다[1,2,3]. 이 유한요소는 물리량의 다양한 불연속을 요소 하나로 표현할 수 있으며, 이를 이용해서 다양한 불연속성을 가지는 문제에 적용이 가능하다. 이전 연구자들에 의해 XFEM과 레벨셋 방법을 결합시켜 고체-유체경계를 추적하는 문제 및 균열선단의 진전 등의 다양한 문제를 요소의 재구성없이 해결되었다[4,5,6]. 본 연구에서는 MLS기반 유한요소와 레벨셋 방법을 이용해서 고체-유체경계문제를 요소의 재구성없이 효율적으로 해석하려고 한다.

† KAIST 기계공학과
E-mail : ljh77@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3068 FAX : (042)869-3095
* KAIST 기계공학과
** KAIST 기계공학과

2. 방법론(Methodology)

2.1 MLS(Moving Least Square)기반 변절점 유한요소

별절점요소는 자연좌표계에서 최소이동제곱근사를 이용하여 만들어 진다. 이렇게 만들어진 변절점 요소는 전형적인 유한요소와 마찬가지로, 적분점에서의 형상함수 값과 그 미분값 만을 이용하여 실제 좌표계로 사상하여 사용된다. 본 연구에서 사용되는 변이요소는 1차 4절점요소를 바탕으로 한 변에 절점이 추가되는 경우, 요소간의 적합성과 연속성을 만족하도록 만들어진다. 요소의 한 변에 절점이 1개 추가 되는 경우, 식(1)과 같이 적을 수 있고, 가중함수를 사용하여 이동최소제곱 근사를 하면, 요소 경계에서 요소간의 적합성과 연속성을 만족시키는 모양을 갖는 형상함수를 얻게 된다.

$$w_1 = W(\xi_1, \xi_2, \xi) W(\eta_1, \eta_4, \eta)$$

$$w_2 = W(\xi_2, \xi_1, \xi) W(\eta_2, \eta_3, \eta)$$
$$w_3 = W(\xi_3, \xi_5, \xi) W(\eta_3, \eta_2, \eta)$$
$$w_4 = W(\xi_4, \xi_5, \xi) W(\eta_4, \eta_1, \eta)$$
$$w_5 = W(\xi_5, \xi_3, \xi) W(\eta_5, \eta_1, \eta) \qquad (1)$$

이 때, $W(\xi_s, \xi_e, \xi)$는 $1-6D^2+8D^3-3D^4$이고, $D = \|\xi - \xi_e\| / \|\xi_s - \xi_e\|$이다. 위의 가중함수를 사용하여 형상함수를 구할 때, 이동 최소제곱 근사에 사용하는 기저는 $\mathbf{p} = [1\, x\, y\, x^2\, y^2\, xy]$이다.

2.2 레벨 셋 방법(Level Set Method)

레벨 셋 방법은 Sethian[7]에 의해서 처음 고안되었으며, 어떤 경계의 움직임은 관찰자 시점에서 기술할 때 경계의 수직방향속도에 의해서 결정된다는 것에 착안을 둔 방법이다. 경계까지의 거리를 ϕ라고 하는 최소부호거리(Minimum Signed Distance)에 의해서 결정하며, 그 지배 방정식은 식(2)와 같다.

$$\phi_t + F|\nabla \phi| = 0 \qquad (2)$$

여기서 ϕ는 최소부호거리, F는 경계의 수직방향속도를 의미한다.

예를 들어 Fig.1 및 식(2)에서와 같이 어떤 유체와 고체의 경계가 있고 응고가 일어나 유체가 고체로 바뀌어 지는 경우, 그 경계에서 ϕ=0이며, 식(3)과 같이 유체영역에서는 ϕ를 음의 거리, 고체영역에서는 ϕ를 양의 거리로 정의한다.

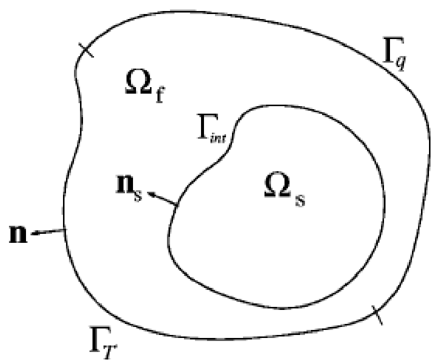

Fig.1 Level Set

$$\phi(\mathbf{x}, t) \begin{cases} >0 & \mathbf{x} \in \Omega_f \\ =0 & \mathbf{x} \in \Gamma_{int} \\ <0 & \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases} \qquad (3)$$

3. 고체 유체 경계의 전산모사

3.1 Stefan problem(스테판 문제)

고체재료에 열을 가하면 용융이 일어나 일부는 유체가 되고, 고체와 유체가 같이 움직이는 거동을 하게 된다. 대류에 의한 유체의 이동이 작다고 가정하면 고체-유체 경계에서는 온도는 녹는점을 만족하고, 또한 잠열에 의해 고체 유체경계 사이에 온도구배의 불연속이 생기게 된다. 이러한 문제를 Stefan problem(스테판 문제)라고 하며, 이의 지배 방정식 및 경계조건은 식 (4),(5)와 같으며, 식(6)은 경계에서 만족시켜야할 경계조건이다.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(cT) = \nabla \cdot (k \nabla T) + s \qquad (4)$$

$$T = T^p \quad \text{on } \Gamma_T$$
$$-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = q^p \quad \text{on } \Gamma_q \qquad (5)$$

$$T_s = T_f = T_m \quad \text{on } \Gamma_{int}$$
$$[\![q]\!] = -Hv \quad \text{on } \Gamma_{int} \qquad (6)$$

3.2 해석방법

요소 내에 유체와 고체가 같이 존재할 때 노드위의 최소부호거리에 의해 유체와 고체사이의 위치가 결정이 된다. 이때 MLS기반의 유한요소 경계에 Fig.2와 같이 새로운 노드를 추가하게 되며, MLS기반의 유한요소의 특징에 의해 두개의 선형 유한요소 효과가 나타나게 된다. 그래서 식(6)에 조건을 만족시킬 수 있으며, 이를 통해 요소의 재구성(Remeshing)없이 문제를 풀 수 있다.

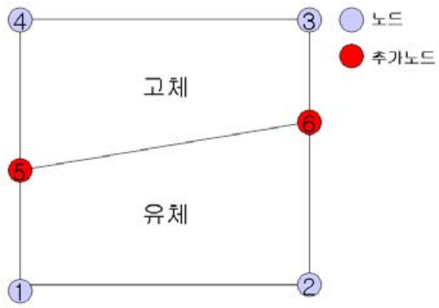

Fig.2 MLS based element for solid-fluid interface

4. 결 론

본 연구에서는 MLS법을 기반으로 한 유한요소와 레벨셋 방법을 이용해서 요소의 재구성 없이 다양한 불연속조건을 만족시키는 유한요소법을 제시하였다.

후 기

본 연구는 2002년도 한국과학재단의 지원에 의하여 연구되었음.(R01-2002-000-00230-0)

참고문헌

(1)Cho Y.-S., Jun S.,Im S. and Kim H.-G., "An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, accepted.

(2)Cho Y.-S. and Im S., "MLS-based variable-node elements compatible quadratic elements: Part I. non-matching meshes," *Int. J. Numer. Methods Engrg*, submitted.

(3)Cho Y.-S. and Im S., "MLS-based variable-node elements compatible quadratic elements: Part II. finite 'crack' element," *Int. J. Numer. Methods Engrg*, submitted.

(4)Belytschko T., Moes N., Usi S., Parimi C., 2001, "Arbitrary discontinuities in finite elements", *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 50(2001), 993-1013.

(5) Chessa J., Smolinski P., Belytschko T., 2002, "The extended finite element method(XFEM) for solidification problems", *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 53(2002), 1959-1977.

(6) Stolarska M., Chopp D.L., Moes N., Belytschko T., 2001, "Modelling crack by level sets in the extended finite element method", *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 51(2001), 943-960.

(7) Sethian J.A., 1999, Level Set Methods and Fast Marching Methods, *CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.*