

고무의 피로 수명 예측을 위한 찢김에너지 수식화

김 호[†]·김현영*

Estimation of Tearing Energy for Fatigue Life Prediction of Rubber Material

Ho Kim, Heon-young Kim

Key Words: Tearing Energy(찢김에너지), Fatigue Life(피로수명), Rubber(고무), Virtual Crack(가상크랙), Energy Release Rate(에너지해방율), Fracture Criterion(파괴기준)

Abstract

Fatigue life prediction is based on fracture mechanics and database which is established from experimental method. Rubber material also uses the same way for fatigue life prediction. But the absence of standardization of rubber material, various way of composition by each rubber company and uncertainty of fracture criterion makes the design of fatigue life by experimental method almost impossible. Tearing energy which has its origin in energy release rate is evaluated as fracture criterion of rubber material and the applicability of fatigue life prediction method are considered. The system of measuring tearing energy using the principal of virtual crack extension method and fatigue life prediction by the minimum number of experiments are proposed.

기호설명

T : 찢김에너지
 W : 변형률 에너지
 w : 단위체적당 변형률 에너지
 ϵ : 변형률
 c : 균열길이
 u : 변위
 N : 반복하중 주기

1. 서론

고무의 파괴 이론은 1950년대부터 시작되어 많은 발전이 있었지만 제안된 파괴 이론이 현재의 고무 개발에 깊게 적용되지 않은 것은 고무를 파괴 이론은 실험적인 성격이 매우 강하고 파괴의 현상에만 치우쳤기 때문에 실제적으로 사용이 가능한 이론적인 뒷받침이 부족했었기 때문이다.

고무 파괴 기준으로서의 인자는 1952년 Rivlin⁽¹⁾에 의해 “찢김에너지(tearing energy)”가 제안되었으며 Andrew등⁽²⁾은 탄성과 점탄성간의 찢김에너지 차이를 “히스테리시스 손실계수(hysteris loss factor)”로 나타내었다. 점탄성 성질에 의한 히스테리시스 손실은 후카오리⁽³⁾에 의해 정성, 정량적으로 평가 되었고 임계찢김에너지(critical tearing energy)의 계산을 탄소-탄소 결합의 분해에너지를 이용하여 제안하였다. 찢김에너지를 이용한 고무를 내구 수명 평가식은 1958년 Thomas⁽⁴⁻⁵⁾에 의해 실험식으로 제안되었다. 그의 논문에서 고무의 찢김을 정적균열진전(static cut growth)과 동적균열진전(dynamic cut growth)으로 구분하였으며 거친균열진전(rough cut growth)영역에 대해 진

† 강원대학교 기계메카트로닉스공학과
 E-mail : ho@andt.co.kr
 TEL : (033)252-6317 FAX : (033)242-6013

* 강원대학교 기계메카트로닉스공학부

전량과 진전속도에 대한 실험식을 균열진전상수를 사용하여 나타내었다.

찢김에너지가 제안된 후, 실제 고무 제품에서 균열 진전량 측정의 모호함과 에너지의 변화 계산 방법이 제안되지 않아 고무 파괴 기준의 인자로서는 역할을 담당하지 못하였다. 1972년 Blackburn⁽⁶⁾은 균열선단요소(crack tip special element)를 이용하여 에너지 해방률을 계산하는 가상크랙진전(VCE, Virtual Crack Extension)법을 제안하였다. Rice⁽⁷⁾는 균열선단요소의 강성배열(stiffness matrix)로부터 에너지 해방률을 계산하여 해석시간에 불리한 점이 있었으나 Hellen⁽⁸⁾의 경우 균열선단요소의 에너지 변화를 직접 고려하기 때문에 해석의 시간의 손실이 거의 없었다.

찢김에너지를 이용한 고무 파괴나 내구 수명 평가에 관한 논문은 활발히 발표되지 않았으며 주로 실험에 의한 평가⁽⁹⁻¹⁰⁾나 타이어의 카카스(cacas)와 같은 고무 평판에 철심이 일정한 간격으로 배열되어 있는 제품에 대해 평균 에너지를 이용하여 에너지해방률을 계산하고 실험적으로 균열의 진전속도를 측정하여 에너지해방률과 균열의 진전속도 관계를 분석한 Lake⁽¹¹⁾의 논문과 같이 간접적으로 찢김에너지를 이용하는 논문이 주를 이루고 있다.

본 논문에서는 찢김에너지의 고무 재료 파괴 기준으로서 적용성과 찢김에너지를 이용한 수명 계산식의 적용성을 평가하였고 수학적으로 계산 가능한 임계찢김에너지의 계산 방법을 소개하였다. 일반적인 2차원 및 3차원 제품에서 찢김에너지를 계산하기 위해 유한요소코드에 적용 가능한 정식화를 수행하였으며 최소 시험 횟수를 이용한 고무 수명 예측 방법을 제안하였다.

2. 찢김에너지의 고무 적용성

2.1 고무 재료 파괴 기준

금속의 선형 탄성 범위내에서는 응력확대계수, 에너지해방률, 응력, 변형률이 서로 관계식을 가지며 파괴 기준으로 사용이 가능하지만 고무의 경우 응력확대계수는 미소변위와 선형탄성을 기본가정으로 하는 Irwin의 국부응력식으로부터 유도 되었고, 형상계수와 같은 시편의 형상에 대한 제약이 따르므로, 대변형, 비선형의 성질을 가지고 있어 복잡한 형상의 제품이 대다수인 고무에

는 적용이 불가능하다. 그러나, 에너지해방률의 경우 재료에 대한 제약 없이 균열의 진전에 따른 에너지 감소라는 일반적인 사실로부터 유도가 되었으므로 선형, 비선형, 탄성, 소성, 형상에 상관 없이 적용이 가능하며 고무에도 적용이 가능하다. J적분도 에너지해방률과 동일한 개념을 가지고 있지만 균열 선단의 응력장에 대한 개념이 필요하고 시편의 형상에 의존적 이므로 고무에는 적용이 힘들다. 에너지해방률 이론을 고무에 적용하여 Rivlin에 의해 제안된 찢김에너지 식은 (1) 식과 같다.

$$T = -\frac{1}{t} \frac{\partial W}{\partial c} \text{ or } -\frac{\partial W}{\partial A} \quad (1)$$

t 는 시편의 두께를 의미하고, 아래첨자 l 은 시편의 고정된 신장 길이를 의미한다. Rivlin은 NR(천연고무)재료 중 한가지 배합 상태에서 서로 다른 형태의 균열시편을 이용하여 찢김에너지를 측정하였으며 급격한 찢김(catastrophic tearing)상태와 초기 찢김(incipient tearing)상태에서 각각 1.3×10^7 , 3.7×10^6 ergs/cm²의 동일한 임계찢김에너지 값이 측정됨을 보였다. 또한, (2)식의 순수 전단 균열 시편에 대한 이론적 찢김에너지 계산식과 단축 인장 재료 시험의 응력-변형률 곡선으로부터 결정된 (3)식의 체적당 변형률 에너지식을 서로 다른 배합 조건의 NR 재료에 적용하여 찢김에너지를 계산한 결과 이론식으로부터 찢김에너지 계산이 가능함을 나타내었다. (2)식에서 l_0 와 w_0 는 각각 균열 시편의 신장된 길이와 저장된 체적당 변형률 에너지를 나타낸다. (3)식에서 C_1 은 재료 상수이며 λ 는 신장율을 나타낸다. Fig. 1에 2 가지 NR재료에 대한 신장율에 따른 찢김에너지를 측정된 결과와 이론식의 함수를 동시에 나타내었다.

$$T = w_0 l_0 \quad (2)$$

$$w_0 = C_1 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right) \quad (3)$$

Fig. 1에서 실선은 이론식을 나타내며 원형과 십자가로 표시된 점은 서로 다른 두 배합재의 측정값을 나타낸다. Rivlin의 시험은 찢김에너지가

형상과 하중에 독립적이고 서로 다른 배합의 NR 재료에 대해 $2\sim 6 \times 10^6$ 의 임계찢김에너지 분포를 보여 큰 편차가 없음을 증명한 것과. 고무의 초탄성 에너지 식으로부터 찢김에너지가 계산될 수 있음을 나타낸 것은 형상이 복잡하며 표준화가 되어 있지 않고 배합조건에 따라 쉽게 바뀌는 고무 재료의 특성에 대한 파괴 기준으로서 적용 가능성을 가지게 한다.

2.2 임계찢김에너지 계산

임계찢김에너지는 금속의 임계응력확대계수 K_C 와 동일한 의미로 고무의 찢김 기준을 나타낸다. 즉, 고무재료에서

$$T > T_C \quad (4)$$

이면 균열이 진전됨을 의미한다. Rivlin에 의해 실험적으로 측정된 찢김에너지는 임계찢김에너지이며 NR 재료에서도 배합조건에 따라 약간의 편차를 가진다. NR재료를 포함하여 다른 고무 재료에서도 적용 가능한 임계찢김에너지를 이론적으로 계산하는 방법을 후카오리에 의해 (5)식으로 제안되었다.

$$T_0 = bJ\zeta\mu^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

(5)식에서 ζ 는 단결합(monomer unit)의 길이, μ 는 cross link 사이의 단결합의 수, b 는 체적당 단

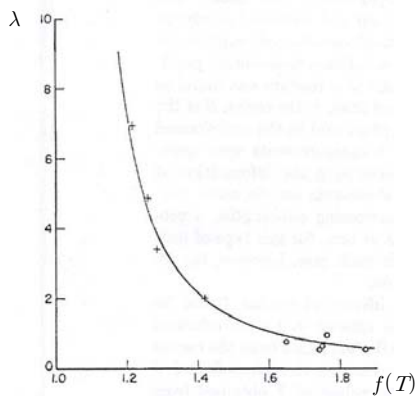


Fig. 1 Experimental and theoretical relation between tearing energy and extension ratio⁽¹⁾

결합의 수, J 는 파단점에서 각 단결합에 의해 저장된 에너지의 양을 나타낸다. 실험적으로 측정된 임계찢김에너지의 값과 (5)식에 의해 계산된 값은 각각 0.4~1.0와 0.004~0.01 J/cm^2 으로 10^2 의 차이를 보였으며 Andrew와 후카오리는 점탄성에 의한 히스테리손실계수 Φ 를 사용하여 (6)식과 같이 보정하였고 NR에서 $10^2\sim 10^3$ 사이의 값을 계산하였다. 고무의 찢김 시작을 고려하기 위해서는 초기 임계찢김에너지가 타당하므로 10^2 을 사용해야 하며, 이론적 임계찢김에너지의 계산식은 재고무 재료의 미시적 특성을 다루고 있으므로 배합이나 고무의 종류에 따른 거시적 특성에 대해 독립성을 가진다.

$$T_C = \Phi T_0 \quad (6)$$

3. 수명계산식 적용성 평가

3.1 고무 재료의 파괴 현상

일반적으로 고무 재료는 탄소와 탄소가 지그재그(zigzag)형태로 결합되어 있는 고분자 사슬 구조의 형태로 이루어져 있어 하중을 받게 되면 분자 고리가 인장 방향으로 재배열 되며 인장 상태의 고리는 재료의 불균일성으로 인해 부분적으로 끊어지게 된다. 이는 연쇄 끊어짐 현상으로 이어져 미소 크기의 공동(cavity)을 형성하게 되고 공동의 크기가 임계 크기보다 크게 되면 균열(crack)로서의 기능을 가지게 되어 성장을 하는 파괴 과정으로 이어진다. 실린더 형의 고무 양면을 금속에 접착하여 하중을 가해 파괴 단면을 관찰한 Gent⁽¹²⁾의 논문에서는 시편에 인장하중을 가한 후 단면을 절단하여 관찰한 결과 고무 내부에 내포하고 있는 카본블랙(carbon black)이 임계크랙

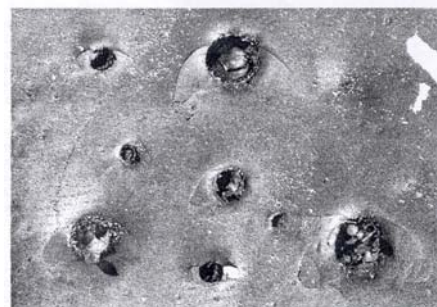


Fig. 2 Detailed section plot of cracked specimen⁽¹⁰⁾

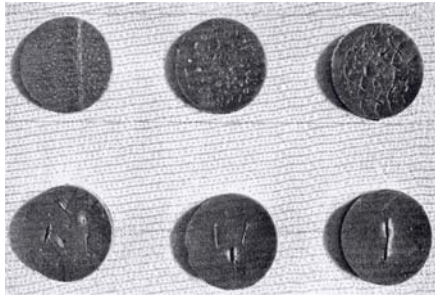


Fig. 3 Cross section plot of cracked specimen⁽¹⁰⁾

의 역할을 하여 주위로 균열이 전파하는 과정을 관찰하였고 단면 전체에 걸쳐 균열이 분포된 형상을 확인하였다. Fig. 2에 카본블랙을 기점으로 균열이 전파된 단면의 현미경 사진을 나타내었고 Fig. 3에 두께에 따른 균열 생성 양상을 나타내었다. 제조된 고무 재료의 내부에는 카본 블랙을 포함한 많은 종류의 결함이 내포되어 있으며 임계크기 이상의 균열이 곳곳에 존재할 가능성이 있다. 이로 인해 공동의 성장에 의한 균열의 생성과정이 생략되고 균열의 성장 또는 멈춤을 고무 재료의 파괴 과정으로 생각할 수 있다.

3.2 균열 성장속도식

고무 재료의 동적 균열 성장(dynamic cut growth)은 부드러운 균열성장(smooth cut growth) 영역과 거친 균열성장(rough cut growth)영역, 급

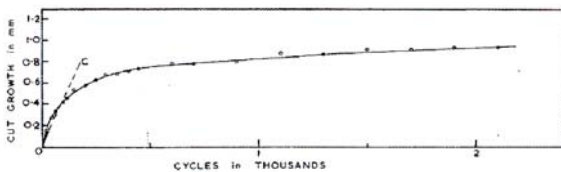


Fig. 4 Dynamic cut growth curve⁽⁴⁾

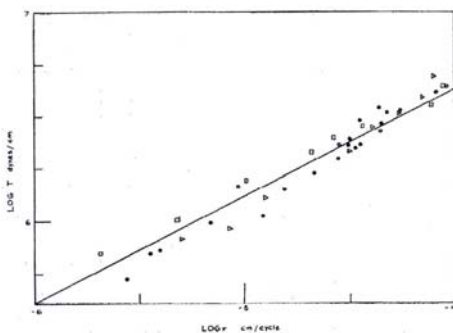


Fig. 5 Relation between rate of cut growth and T for various mix⁽⁴⁾

격한 균열성장(catastrophic cur growth)영역으로 구분한다. 변형과 풀어짐(relaxing)의 반복하중을 가하면, 급격한 찢김 하중보다 작은 하중에서도 크랙의 길이가 증가하며 초기의 빠른 성장률이 *백 cycle 이후 일정하게 느린 성장률로 변화하는 것은 크랙 팁의 거칠어짐(roughening)에 의한 것이다. Fig. 4에 동적 균열 성장 곡선을 나타내었다. 시험에 사용된 서로 다른 고무 재료의 크랙 성장률 관계식은 Fig. 5에서 보는 것과 같이 거의 차이가 없으며, 실험적으로 크랙 성장률은 T^2 에 비례한다. Thomas는 실험에 의한 정적(static)과 동적 균열성장식을 제안하였다.

(7), (8)식에서 G_s 와 G_d 는 각각 정적, 동적 균열성장계수를 나타내며 대략 $G_d/G_s = 10$ 의 관계를 가진다. Thomas가 제안한 성장속도식은 금속에서의 Paris law와 유사한 형태로 균열의 안정 성장영역에 해당한다. 금속의 경우 균열 생성과

$$\Delta c = \frac{1}{G_s} T^2 \quad (7)$$

$$\frac{dc}{dN} = \frac{1}{G_d} T^2 \quad (8)$$

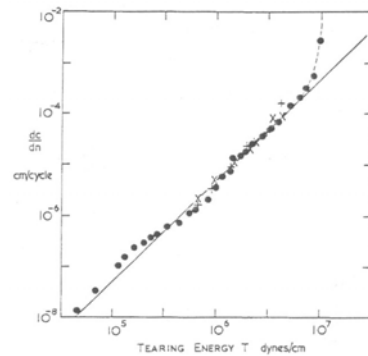


Fig. 6 Relation between rate of cut growth for various type of specimen⁽⁵⁾

Table 1 Calculated and observed fatigue lives⁽⁵⁾

λ	$c_0 (\times 10^{-3})$	N, keycycles	
		Observed	Calculated
2.36	36	3.0	4.4
2.08	46	6.5	7.2
1.47	43	78	88
1.205	70	700	760
1.098	78	8600	9500

지의 수명이 안정적 성장 영역의 수명에 비해 큰 비중을 차지하지만, 고무의 경우 균열의 안정적 성장 영역인 거친 균열성장 영역이 Fig. 6과 같이 균열 성장의 대부분을 차지하며 균열 성장식에 의해 계산된 수명의 결과와 실험적으로 측정된 수명이 표 1과 같이 20% 미만의 차이를 보였다. 또한 찢김에너지를 변수로 사용하였기 때문에 형상에서도 독립성을 나타내었다. 이는 원론적으로 임의의 형상의 시편에 대한 크랙 성장률은 다른 형상의 시편으로부터 측정이 가능함을 나타낸다.

4. 찢김에너지 계산

균열길이의 변화에 의해서 찢김에너지를 정의하였기 때문에 찢김에너지의 계산은 균열이 존재하고 균열의 길이가 증가할 경우에 값이 존재한다. 따라서 제품에 임계 균열이 이미 존재한다는 가정과 초기 균열 길이의 극 미소 증가라는 가정을 해야 한다. 제품의 제조 과정에서 임계균열크기 c_0 이상의 균열은 존재하는 것으로 Gent의 논문에서 증명하였으므로 제품의 전체적인 수명은 균열의 성장과 밀접한 관련이 있다. 또한 c_0 크기 이하의 공동만이 존재하는 제품의 경우 c_0 크기의 미소공동이 존재하는 제품보다 수명이 길 것이므로 여러 샘플(sample)에서 측정된 수명 중 '최저 수명'이라는 개념에서 의미가 있다. 측정된 임계 찢김길이 중 거친 찢김영역에서는 $10 \mu m$ 이고 후 카오리는 균열이 둥근 형상에서는 $100 \mu m$ 정도를 임계치로 생각하였다. 최소값인 $10 \mu m$ 이상의 균열이 충분히 존재하므로 임계 균열의 존재 가정이 의미가 있다. 본 논문에서는 가상 크랙 개념과 일반적인 요소를 이용하여 찢김에너지를 계산하는 방법에 대해 논의하며 이를 위해 몇 가지 가정을 사용한다. 먼저 고무의 경우 제조상의 특성상 $10\mu m$ 의 균열을 내재하고 있으며 이를 초기 균열 크기 c_0 임을 가정한다. 거친 찢김영역의 특징인 거친 과단면, 균열의 진전은 초기진전에 해당하는 임계찢김에너지를 기준으로하며, 상당량의 찢김에너지에 해당하는 NR의 Δc 값을 초기 가상 크랙 진전량으로 사용한다.

에너지 포텐셜을 Π 라고 하면, 단위길이당 에너지 감소율 T 는 (9)식과 같이 쓸 수 있다.

$$T = - \frac{d\Pi}{dc} \quad (9)$$

정적 거동에 있어서 Π 는 일반적으로 유한요소 형태로 (10)식과 같다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (10)$$

\mathbf{F} 는 증가의 절점 벡터, \mathbf{u} 는 변위벡터, \mathbf{K} 는 강성행렬이다. 첫 번째 항이 내부 에너지 항을 의미하므로 모델 내부 임의의 점 i 에서의 변형률 에너지 W_i 를 이용하여 (10)식을 다시 쓰고 $\delta\Pi$ 를 정리하면

$$\Pi = \sum_i W_i - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (11)$$

(11)식에서 에너지 평형 조건과 \mathbf{F} 와 관련된 항은 크랙이 발생하는 점 주변에 하중이 정의되어 있지 않거나 일정하다는 가정 하에 (12)식과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\delta\Pi}{\delta c} = \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial c} \quad (12)$$

균열진전이 되지 않는 모든 점에서 균열 진전량 Δc 에 대한 에너지 변화는 없다. 인덱스 i 는 크랙이 진전되는 점에만 해당된다. (12)식을 미분 형태가 아닌 해석 과정에서의 증분 형태로 바꿔 쓰면 (13)식과 같다.

$$\frac{\delta\Pi}{\delta c} = \sum_i \frac{\Delta W_i}{\Delta c} \quad (13)$$

따라서, 찢김에너지는 일반적으로 균열 증분에 따른 균열 표면적 미소증분 δA 또는 증분 ΔA 를 이용하여 (14)식과 같이 표현 가능하다.

$$T = \frac{\delta\Pi}{\delta A} = \sum_i \frac{\Delta W_i}{\Delta A_i} \quad (14)$$

임의의 점 i 를 유한요소에서 각 적분점의 위치로 대신하고, 적분점에서의 가상 균열 체적 v_i 와 체적당 변형률에너지 w_i 를 이용하여 (14)식을 정리하면 (15)식과 같이 표현이 가능하며 v_j 와 A_j

는 Δc 의 함수이므로 (16)식과 Δc 의 일차함수 형태로 쓸 수 있다.

$$T = \sum_j \frac{v_j w_j}{\Delta A_j} \quad (15)$$

$$T = \sum_j h(\Delta c) w_j \quad (16)$$

가장 간단한 형태인 상수 곱의 형태를 취하여 최종적인 찢김에너지 계산식은 (17)식과 같아 적분점에서의 체적당 변형률 에너지와 가상 균열진전량의 곱으로 표현할 수 있다.

$$T = \sum_j \alpha \Delta c w_j \quad (17)$$

Rivlin의 논문에서 찢김에너지를 계산하기 위해 사용된 인장시편을 모델링하여 시험과 동일한 하중 조건과 경계조건을 부여하여 변형해석을 실시한 결과 실험적으로 측정된 찢김에너지는 1.3 J/cm^2 이며 해석적으로 0.5 의 균열진전량을 사용하였을 경우 1.38 J/cm^2 의 찢김에너지를 나타내었다.

4. 결 론

찢김에너지의 형상과 하중에 대한 독립성과 재료에 대한 편차가 적은 점은 고무 재료 파괴 기준으로서 가능성을 가지며 임계찢김에너지의 이론적 평가식은 재료의 미시적 특성을 다루고 있으므로 배합이나 고무의 종류에 따른 거시적 특성에 대해 독립성을 가진다. 고무 재료의 수명평가는 거친 찢김영역의 균열 성장 속도식을 이용하여 20%의 오차로 예측이 가능하며, 형상과 재료에 대한 독립성을 가지고 있다. 일반 고무 제품의 수명평가를 위해 찢김에너지의 평가 방안을 유효요소 정식화 내의 수식화 과정으로 정리하였으며 Rivlin의 균열 인장시편 모델에 대해 찢김에너지의 시험값과 간이 계산값을 비교하여 가능성을 점검하였다.

참고문헌

- (1) R. S. Rivlin, A. G. Thomas, 1952, "Rupture of Rubber. I. Characteristic Energy for Tearing", *Journal of Polymer Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 291-318
- (2) E. H. Andrews, 1974, "A generalized theory of fracture mechanics", *Journal of Materials Science*, Vol. 9
- (3) Y. Fukahori, 1998, "Fatigue failure of elastomers", *Nippon Gomu Kyokaishi*, No. 11
- (4) A. G. Thomas, 1958, "Rupture of Rubber. V. Cut Growth in Natural Rubber Vulcanizates", *Journal of Polymer Science*, Vol. 31, pp. 467-480,
- (5) A. N. Gent, P. B. Lindley, A. G. Thomas, 1964, "Cut Growth and Fatigue of Rubbers. I. The Relationship between Cut Growth and Fatigue", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 8, pp. 455-466
- (6) W. S. Blackburn, 1972, "Calculation of Stress Intensity Factors at Crack Tips using Special Finite Elements", in *The Mathematics of the Finite Element Method*, Brunel University
- (7) J. R. Rice, 1968, "Mathematical analysis in the mechanics of fracture", Chap. 3 in *Fracture*, Vol. II (Ed. H. Liebowitz), Academic Press
- (8) T. K. Hellen, 1975, "On the Method of Virtual Crack Extensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 187-207
- (9) H. Y. Kim, J. J. Kim, 1996, "Optimized Shape Design and Prediction of Endurance Life for Engine Mount Rubber", *Journal of KSAE*, pp. 40-50
- (10) W. D. Kim, C. S. Woo and S. W. Han, "Finite Element Analysis and Fatigue Life Evaluation of Automotive Rubber Insulator", *Elastomer*, Vol. 33, No. 3, pp. 168-176
- (11) G. J. Lake, 2001, "Application of Fracture Mechanics to Crack Growth in Rubber-Cord Laminates", *Rubber Chemistry and Technology*
- (12) A. N. Gent, P. B. Lindley, 1958, "Internal Rupture of bonded rubber cylinders in Tension", *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 249