

# 굽힘 모멘트와 인장 하중이 작용하는 비대칭 노치 시편의 완전 소성 균열 선단 응력의 예측

오창균<sup>†</sup>, 김윤재\*, 박진무\*

Estimation of fully plastic crack tip stresses of unequally notched specimen under bending and tension

Chang-Kyun Oh, Yun-Jae Kim and Jin-Moo Park

**Key Words :** Limit load(임계하중), Crack tip stress(균열 선단 응력), Fully plastic(완전 소성), Slip line field(유동선장)

## Abstract

This paper presents a simple method to estimate fully plastic crack tip stresses of unequally notched specimen based on the equilibrium condition of the least upper bounds for plane strain deformation fields. The method is applied to unequally notched specimens under bending and tension. For various notch angle the limit loads and crack tip stresses are estimated from the present method and compared with results from finite element limit analyses.

## 1. 서론

완전 소성 조건하에서 유동선장(Slip line field) 해석은 변형과 균열 선단 응력 등의 파괴역학 매개변수들에 대한 유용한 정보를 제공한다.<sup>(1)</sup> 가공경화가 없는 평면변형률(Plane strain)에 대한 정확한 유동선장을 구하기 위해서는 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다.<sup>(2)</sup> (a) 평형을 위한 Hencky 방정식과 변형영역에서의 항복조건; (b) 비압축성을 위한 Geiringer 방정식; (c) 강체 영역에서의 평형과 항복 조건. 따라서 유동선장은 단지 제한된 기하학적 형상이나 하중조건 등에 대해서만 알려져 있으며, 대부분의 경우에 유동선장을 구하는 것은 매우 어려운 일이다. 유동선장을 구하는 다른 방법은 유한요소해석을 이용하는 것이다. 균열 선단 주위에 매우 조밀한 요소를 사용하여 구해진 유한요소해석의 해로부터 정확한 응력과 변형의 분포는 구해질 수 있다.

본 논문에서는 유동선장과 유한요소해석을 다

양한 노치 각도를 갖는 비대칭 노치 시편에 적용하여 균열 선단 응력을 예측하고자 한다.

본 논문의 목적은 완전 소성 조건하에서 굽힘 모멘트와 인장하중이 작용하는 비대칭 노치 시편의 균열 선단 응력을 예측하는 것이다. 균열 선단의 응력을 예측하기 위하여 제안된 유동선장에 대한 기하학적 조건과 평형 관계를 고려하였으며, 유한요소해석의 결과와 비교 검토하였다.

## 2. 유동선장 해석

### 2.1 인장 하중에 대한 유동선장 해석

비대칭 노치 시편에 순수 인장 하중만이 작용하는 경우에 대한 유동선장은 Fig. 1 과 같이 나타나는 것으로 알려져 있다. 이러한 유동선장으로부터 유동 각도  $\theta_s$  와 균열 선단 응력은 다음과 같이 구해질 수 있다.<sup>(1)</sup>

$$\theta_s = 45^\circ, \quad \left( \frac{\sigma_m}{2k} \right)_{\theta_s} = \frac{1}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \quad (1)$$

또한 힘의 평형 관계로부터 임계 인장 하중은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\frac{P^{SLF}}{2kb} = 1 + \frac{\pi}{2} - \phi \quad (2)$$

<sup>†</sup> 고려대학교

E-mail : kuock@korea.ac.kr

TEL : (02)929-1718 FAX : (02)929-1718

\*

고려대학교

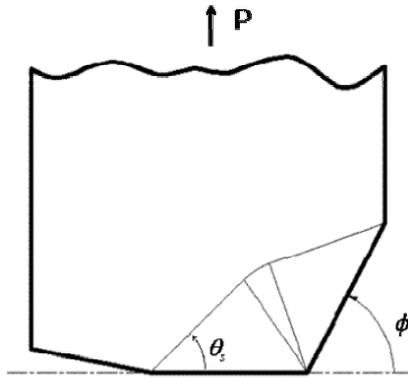


Fig. 1 Slip line field for unequally notched specimen under pure tensile load

## 2.2 굽힘 모멘트에 대한 유동선장 해석

전 절에서 묘사한 순수 인장 하중을 받는 비대칭 노치 시편의 유동선장과 인장과 굽힘 하중을 받는 한 면에만 노치가 있는 시편(Single edge notched specimen)에 대한 유동선장으로부터<sup>2)</sup>, 순수 굽힘을 받는 비대칭 노치 시편에 대한 가능한 유동선장(SLF)은 Fig. 2 와 같이 나타낼 수 있다. 그림에서와 같이 5 개의 미지수  $R, \alpha, \beta, \psi, d$  가 존재하게 되며, 기하학적 조건으로부터 다음과 같은 관계식을 도출할 수 있다.

$$\psi = \frac{3}{4}\pi - \phi - \beta \quad (3)$$

$$R(\sin \alpha + \sin \beta) + d \cos \beta = b \quad (4)$$

$$R(\cos \beta - \cos \alpha) = d \sin \beta \quad (5)$$

힘의 평형 관계식으로부터 두 개의 미지수는 결정될 수 있다.  $\beta$ -line 에 대한 Hencky 의 평형 방정식으로부터 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$\sigma_B = -2k(\psi + 1) \quad (6)$$

또한  $\alpha$ -line 에 대한 Hencky 의 평형 방정식으로부터 호 AB 에 대해 다음의 관계가 성립한다.

$$\sigma(\theta) = \sigma_B + 2k(\theta + \beta) = 2k(\theta + \beta - \psi - \frac{1}{2}) \quad (7)$$

수평 방향에 대한 힘의 평형관계는 식 (6), (7) 을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum F_x = \int_{-\beta}^{\alpha} [-\sigma(\theta) \sin \theta + k \cos \theta] R d\theta + (k \cos \beta + \sigma_B \sin \beta) d = 0 \quad (8)$$

식 (4), (5), (6), (7)를 이용하여 정리하면 식 (8) 은 다음과 같이  $\alpha$  와  $\beta$  에 관한 식이 된다.

$$2\sin \beta [-(\sin \alpha + \sin \beta) + \beta(\cos \alpha - \cos \beta) + (\alpha \cos \alpha + \beta \cos \beta)] + 1 - \cos(\alpha + \beta) = 0 \quad (9)$$

수직 방향에 대한 힘의 평형관계도 수평방향과 유사한 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum F_y = \int_{-\beta}^{\alpha} [\sigma(\theta) \cos \theta + k \sin \theta] R d\theta + (\sigma_B \cos \beta - k \sin \beta) d = 0 \quad (10)$$

식 (4), (5), (6), (7)를 이용하여 정리하면 식 (10) 은 다음과 같이  $\alpha$  와  $\beta$  에 관한 식이 된다.

$$\sin \beta [(\cos \alpha - \cos \beta) + \beta(\sin \alpha + \sin \beta) + (\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta)] + (\phi + \beta - 0.5 - 0.75\pi)[1 - \cos(\alpha + \beta)] = 0 \quad (11)$$

임의의 노치 각도  $\phi$  에 대하여 두 개의 미지수  $\alpha$  와  $\beta$  는 식 (9)과 식(11)를 사용하여 구해질 수 있다. 나머지 미지수들은 식 (3), (4), (5)을 이용하여 구해질 수 있다. 또한  $0 \leq \phi \leq 30^\circ$  에 경우에는 Fig. 2 의 유동선장은 변함이 없다. 따라서 위의 미지수 들은 이 구간에서 일정하게 된다.

기하학적 조건으로부터 유동 각도(Slip angle)  $\theta_s$  는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\theta_s = \alpha \quad (12)$$

$\theta = \theta_s$  일 경우에 대한 균열 선단의 무차원화한 정수압 응력  $\sigma_m/(2k)$  은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\sigma_m}{2k}\right)_{\theta_s} = \left(\phi - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\pi\right) + \alpha + 2\beta \quad (13)$$

또한 모멘트에 관한 평형 관계식으로부터 임계 모멘트는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\frac{M^{SLF}}{0.5kb^2} = 2\left(\frac{R}{b}\right)^2 (\alpha + \beta) + \left(\frac{R}{b}\right)\left(\frac{d}{b}\right) - \left(\phi + \beta - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\pi\right)\left(\frac{d}{b}\right)^2 \quad (14)$$

Fig. 2 에서 나타낸 유동선장은  $0 \leq \phi \leq 90^\circ$  의 모든 범위를 포함하지 못한다.  $\phi = 0^\circ$  일 경우에는 알려져 있는 유동선장의 해와 정확히 일치하나,  $\phi = 90^\circ$  이 경우에는 Hencky 와 Green 에 의해 알려져 있는 해와 일치하지 않는다.<sup>6)</sup> 즉, Fig. 2 의 유동선장은  $\phi$  의 값이  $90^\circ$  에 근접한 큰 값을 갖는 경우에는 정확하지 않다. 따라서 이러한 범위에 대한 새로운 유동선장이 필요하다.

Fig. 3 는  $\phi$  의 값이 매우 큰 경우에 대한 유동선장을 미지수들과 함께 나타낸 것이다. 제안된 유동선장으로부터 균열 선단의 응력과 임계하중을 구하는 방법은 먼저 제안한 유동선장의 경우와 동일하다. 전과 유사한 기하학적 조건으로부터 다음의 관계가 도출될 수 있다.

$$R\left(\sin \alpha + \sin \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(d_1 + d_2) = b \quad (15)$$

$$R\left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(d_1 - d_2) = 0 \quad (16)$$

Hencky 의 평형 방정식에 의해 다음의 두 가지 관계식이 도출된다.

$$\sigma_B = \sigma_C = -2k\left(\frac{1+\pi}{2} + \phi\right) \quad (17)$$

$$\sigma(\theta) = \sigma_B + 2k\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (18)$$

수평방향과 수직방향에 대한 힘의 평형 관계로부터 다음과 같이 두 개의 미지수  $\hat{R} (= R/b)$  와  $\alpha$  에 대한 비선형 방정식이 구해질 수 있다.

$$\hat{R}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}-\phi\right)\sin\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\phi\right)\cos\alpha\right]+ \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)+\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad (19)$$

$$\hat{R}\left[\frac{1}{2}\cos\alpha+\left(\alpha+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\right]-1+\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad (20)$$

식 (19), (20)로부터 두 개의 미지수  $\hat{R}(=R/b)$  와  $\alpha$  은 구해질 수 있다. 또한 나머지 미지수들은 식 (15), (16)를 이용하여 구해질 수 있다.

$\theta = \theta_s$  일 경우에 대한 균열 선단의 무차원화한 정수압 응력  $\sigma_m/(2k)$  은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\sigma_m}{2k}\right)_{\theta_s} = \left(\phi - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\pi\right) + \alpha \quad (21)$$

또한 모멘트의 평형 관계식으로부터 임계 모멘트 하중을 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\frac{M^{SLF}}{0.5kb^2} = 2\left(\frac{R}{b}\right)^2\left(\alpha + \frac{1}{4}\pi\right) + 2\left(\frac{R}{b}\right)\left(\frac{d_1-d_2}{b}\right) - \left(\frac{\sigma_B}{2k}\right)\left(\frac{d_1-d_2}{b}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{R}{b}\right)\left(\frac{d_2}{b}\right)\left(\frac{\sigma_B}{2k} + 1\right)\cos\alpha - \left(\frac{R}{b} + \frac{d_1}{b}\right)\left(\frac{d_2}{b}\right)\left(\frac{\sigma_B}{2k} - 1\right) \quad (22)$$

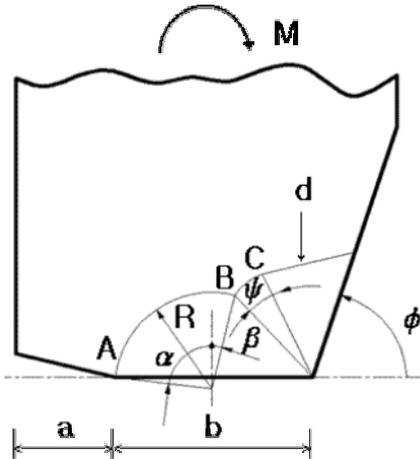


Fig. 2 Proposed SLF 1 for unequally notched specimen under pure bending

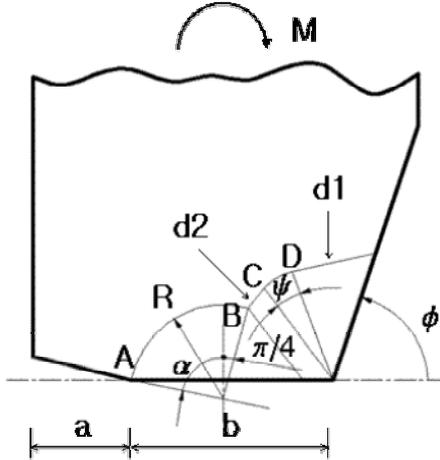


Fig. 3 Proposed SLF 2 for unequally notched specimen with large back angle under pure bending

### 2.3 유동선장 해석 결과

2.1 과 2.2 에서 묘사한 방법에 의해 인장 혹은 굽힘 하중을 받는 비대칭 노치 시편에 대하여 제안된 유동선장으로부터 균열선단의 응력과 임계하중을 구할 수 있다.

Fig. 4 는 굽힘 모멘트를 받는 비대칭 노치 시편의 유동선장 매개변수  $\hat{R}$  을 노치 각도  $\phi$  에 대하여 나타낸 것이다. 유동선장 해석을 하기 위해서는  $\hat{R}$  이외에  $\alpha, \beta, \psi, d$  등의 변수를 구해야 한다. 이중 유동각도  $\theta_s(=\alpha)$  에 대한 결과는 4 장에서 유한요소해석의 결과와 함께 비교하여 나타낼 것이다.

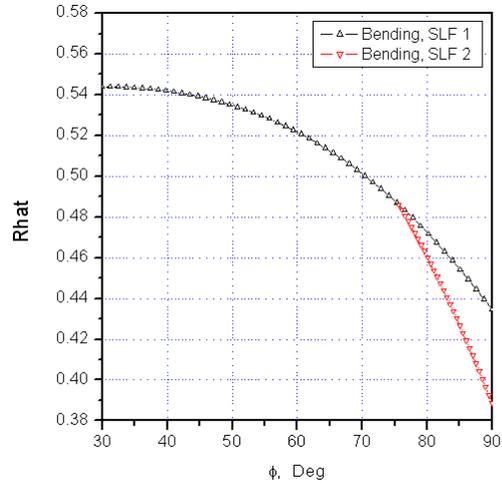


Fig. 4 Field parameter  $\hat{R}(=R/b)$  of unequally notched specimens under pure bending

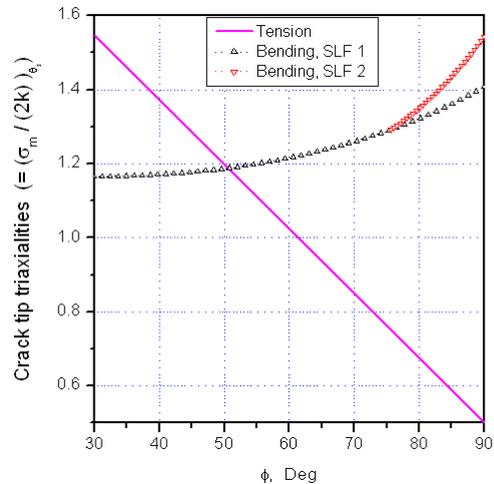


Fig. 5 Crack tip triaxiality  $\sigma_m/(2k)$  of unequally notched specimens under tension and bending

Fig. 5는 유동선장 해석에 의한 균열 선단의 무차원화된 정수압 응력  $\sigma_m/(2k)$  을 나타낸 것이다. 굽힘 모멘트가 작용하는 경우에는 유동선장의 형태에 따라 결과가 달라진다. Fig. 4와 5의 결과에 나타난 것과 같이  $\phi=75.6^\circ$ 에서 두 유동선장의 구분되어 짐을 알 수 있었다.

### 3. FE 해석 및 결과

#### 3.1 FE 해석 조건

굽힘 모멘트 및 인장 하중을 받는 비대칭 노치 시편의 균열선단응력을 유한요소해석으로 구하기 위해 Fig. 6과 같은 형상을 고려하였다. 그림에서와 같이 균열의 길이는 시편 폭의 0.4 배로 하였으며, 시편의 상부에서 하중을 받도록 하였다. 노치 각도  $\phi$ 는  $30^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ 와 같이 구분하여 해석을 수행하였다.

유한요소해석은 상용 프로그램인 ABAQUS 6.4를 사용하였으며, 2차원 평면응력을 가정하여 CPE8R 요소를 사용하였다. 해석에 사용된 요소 형상은 Fig. 7과 같다. 선열 선단 부분의 요소를 그림에서와 같이 매우 조밀하게 하여 해석을 수행하였다.

재료는 탄성-완전소성의 응력-변형률을 가정하였으며, 해석에 사용된 물성치는 Table 1에 나타내었다.

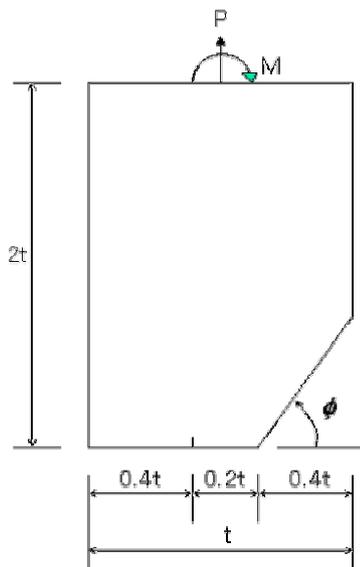


Fig. 6 Model of unequally notched specimen

Table 1 Material properties

| E (GPa) | $\nu$ | $\sigma_y$ (MPa) |
|---------|-------|------------------|
| 200     | 0.3   | 165              |

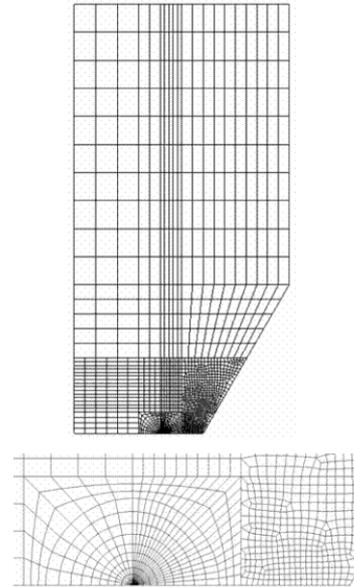


Fig. 7 FE modeling of unequally notched specimen for  $\phi=60^\circ$

#### 3.2 FE 해석 결과

##### 3.2.1 인장 하중에 대한 FE 해석 결과

인장 하중을 받는 비대칭 노치 시편에 대한 유한요소해석의 결과를 Fig. 8, 9에 나타내었다. Fig. 8은 균열 선단의 정수압 응력을 항복강도로 무차원화하여, 노치 각도에 대해 나타낸 것이다. Fig. 9는 균열 선단의 후프응력(Hoop stress)을 같은 방식으로 나타낸 것이다. Fig. 8과 9로부터 정수압 응력과 후프 응력의 연관관계를 알 수 있다. 정수압 응력은 인장 하중의 유동 각도인  $45^\circ$  미만에서는 일정한 값을 갖게 됨을 알 수 있다.

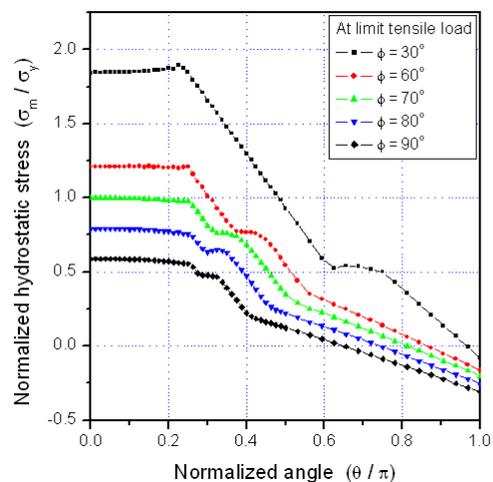


Fig. 8 Hydrostatic stresses of unequally notched specimens under pure tensile load

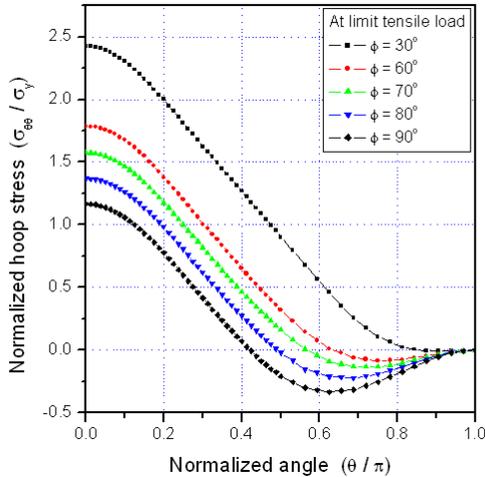


Fig. 9 Hoop stresses of unequally notched specimens under pure tensile load

Green 등<sup>(3)</sup>과 Ewing<sup>(5)</sup>은 Hencky 방정식을 사용하여 균열 유동 각도  $\theta_s (= \alpha)$ 의 응력으로부터  $\theta = 0^\circ$ 의 응력을 유추할 수 있음을 보였다. 다음은  $\theta = 0^\circ$ 에서의 균열 선단 응력에 관한 요약이다.

$$\left(\frac{\sigma_m}{2k}\right)_{\theta=0^\circ} = \left(\frac{\sigma_m}{2k}\right)_{\theta_s} + \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad (23)$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=0^\circ} = (\sigma_m)_{\theta=0^\circ} + k \quad (24)$$

여기서, k는 전단강도(shear strength)로  $\sigma_y/\sqrt{3}$ 와 동일하다. Fig. 8, 9에서  $\theta = 0^\circ$ 인 경우에 대한 무차원화된 정수압 응력과 후프 응력의 차이는 식 (24)에서 유추할 수 있는 바와 같이  $1/\sqrt{3}$  정도임을 알 수 있다.

### 3.2.2 굽힘 모멘트에 대한 FE 해석 결과

굽힘 모멘트를 받는 비대칭 노치 시편에 대한 유한요소해석의 결과를 Fig. 10, 11에 나타내었다. 인장 하중을 받는 경우와 유사하게 정수압 응력은 유동 각도인  $45^\circ$  미망에서는 일정한 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 또한  $\theta = 0^\circ$ 인 경우에 대한 무차원화된 정수압 응력과 후프 응력의 차이는 인장의 경우와 마찬가지로  $1/\sqrt{3}$  정도임을 알 수 있다.

추가적인 유한요소해석의 결과는 4장에서 유동선장 해석의 결과와 비교하여 나타낼 것이다.

## 4. 결과 및 고찰

이장에서는 2장의 유동선장 해석의 결과와 3장의 유한요소해석의 결과를 비교하여 나타낼 것이다.

Fig. 12는 인장 및 굽힘 모멘트를 받는 비대칭

노치 시편의 무차원화된 임계하중에 대한 유동선장 해석과 유한요소해석의 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 인장의 경우에는 두 해석의 차이가 거의 없는 것으로 나타났고, 굽힘의 경우에는 최대 약 2% 정도의 오차만을 나타내었다.

Fig. 13은 유동 각도에 대한 유동선장 해석의 결과와 유한요소해석의 결과를 비교한 것이다. 인장과 굽힘 두 경우에서 모두 유동선장 해석과 유사한 경향을 보임을 알 수 있다.

Fig. 14는 식 (23)에 의한  $\theta = 0^\circ$ 에서의 무차원화된 정수압 응력의 결과를 유동선장 해석과 유한요소해석을 비교하여 나타낸 것이다. 인장의 경우에는 두 해석의 차이가 거의 없음을 알 수 있으며, 굽힘 모멘트의 경우에는 최대 약 10% 정도까지 오차가 발생함을 알 수 있다.

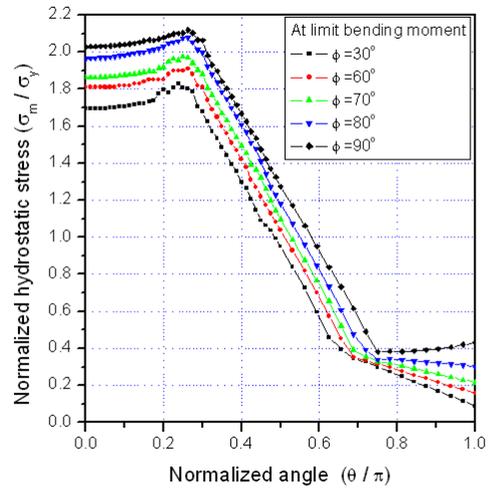


Fig. 10 Hydrostatic stresses of unequally notched specimens under pure bending moment

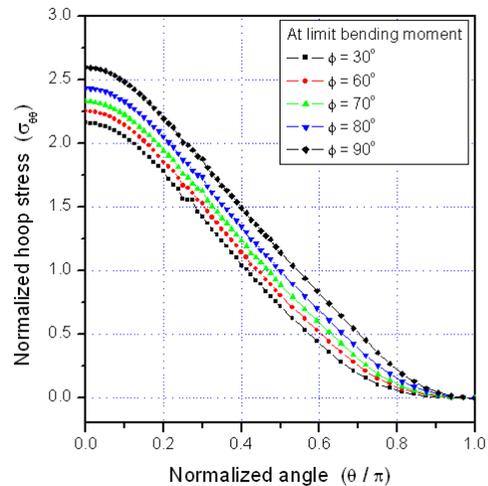


Fig. 11 Hoop stresses of unequally notched specimens under pure bending moment

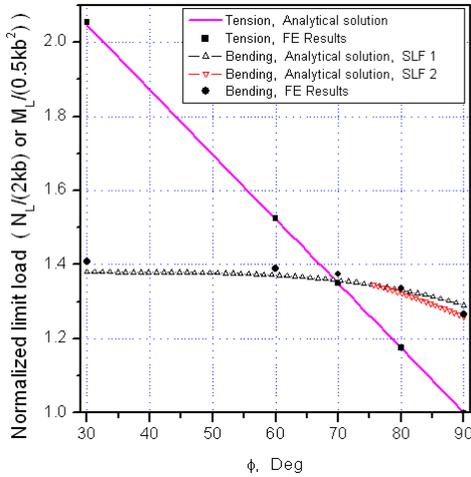


Fig. 12 Limit loads of unequally notched specimens under tension and bending

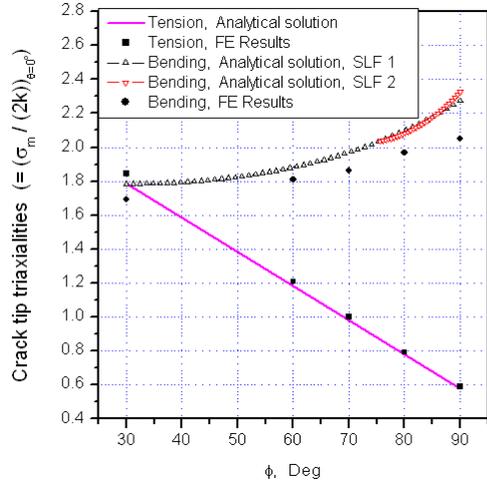


Fig. 14 Crack tip triaxialities  $(\sigma_m / (2k))_{\theta=0}$  of unequally notched specimens under tension and bending

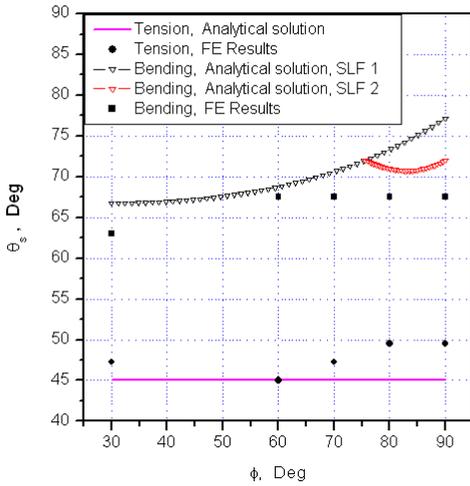


Fig. 13 Slip angle of unequally notched specimens under tension and bending

### 5. 결론

인장 및 굽힘 모멘트를 받는 비대칭 노치 시편의 균열 선단 응력의 예측하기 위해 유동선장 해석과 유한요소해석을 수행하였으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 제안된 유동선장의 임계 노치 각도  $\phi_c$  는  $75.6^\circ$  이다.
2. 굽힘 모멘트를 받는 경우에 최대 유동 각도  $(\theta_s)_{max}$  는 약  $72^\circ$  이고, 무차원화한 임계하중은  $\phi$  에 따라 1.380 ~ 1.261 의 값을 갖는다.
3. 유동선장 해석과 유한요소해석은 매우 유사한 결과를 나타냈다.

### 후기

본 논문은 한국과학재단 산하 SAFE 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

### 참고문헌

- (1) McClintock FA, 1971, Plasticity aspects of fracture, New York: Academic Press, pp. 47-225
- (2) Yun-Jae Kim, 2002, "Estimation of fully plastic crack tip stresses from equilibrium of least upper bound circular arcs", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, pp. 881-889
- (3) Green A.P. and Hundy B.B., 1956, "Initial plastic yielding in Notch Bend tests", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 4, pp. 128-144
- (4) Hibbitt, Karlsson & Sorensen INC, 2003, ABAQUS User's manual
- (5) Ewing DGF, 1968, "Calculation on the bending of rigid/plastic notched bars", 16, pp. 205-213