

Lattice Boltzmann Equation 방법을 이용한 2차원 비압축성 유동 해석에 관한 수치적 연구

정기호*. 하만영**

The Numerical Study of 2-D incompressible flow with the Lattice Boltzmann Equation method

Gi-Ho Jeong and Man-Young Ha

Key Words: Lattice Boltzmann(격자볼츠만), Channel flow(채널유동), Cavity flow(공동유동)

Abstract

This paper deals with the evaluation of several boundary conditions which are commonly used in the lattice Boltzmann equation method. 2-D channel flow(poiseuille flow) and lid-driven cavity flow was selected as a test problem of this study, because there exist an analytic solution and previous study which could be used for a benchmarking test. It was found that lattice Boltzmann method still needs more considerations of stability and physical consistency, though it could predict the flow patterns both qualitatively and quantitatively.

	기호설명		하첨자
c	입자 속도 크기	i	격자점의 번호
\hat{e}	입자 속도 벡터	w	벽면 경계 조건
f	입자 분포 함수		
p	압력, ρc_s^2		1. 서론
t	시간 [second]		
u	Macroscopic 속도		
w	가중(weighted) 함수		
	그리스 문자		
ρ	밀도		
Ω	충돌연산자		
τ	완화시간		

새로운 전산 유체 해석 기법으로서의 LBE (Lattice Boltzmann Equation) 방법은 다른 기존의 전산유체 방법에 비해 최근에 개발되었지만 그 응용성으로 인해 현재 활발한 연구가 진행 중이다. 이러한 LBE 방법은 기존의 전산 유체 해석 방법에서 적용하고 있는 연속체 개념을 사용하지 않으며 분자 운동론을 따르는 가상의 입자를 이용하여 유동을 해석하는 방법이다. LBE 방법은 Frisch et al.(1986)이 제안한 LGA(Lattice Gas Automata)에서 기인하는데, LGA 방법에서는 유동을 가상의 격자 공간과 가상의 입자로 가정한다. 가상 격자에서 움직이는 입자들의 분포는

* 부산대학교 기계공학부 연구원

** 부산대학교 기계공학부

Boolean 변수로서 0 또는 1의 값을 가지며는 분포함수에 의해 나타내어지며, 이러한 분포함수는 LGA방법에서 각 격자점에서의 밀도, 속도 등을 결정하는 종속 변수이다. 그러나 LGA 방법은 입자들의 분포함수가 Boolean 변수인 관계로 통계적인 오차가 발생하는 것으로 나타났으며, 실제 유체 유동과 유사한 정확한 결과를 얻기 위해서는 많은 격자와 평균과정이 필요한 것으로 알려져 있어 계산시간이 증가하는 단점이 있다.

2. 해석 방법

본 절에서는 LBE 방법의 일반적인 전개와 본 연구에서 사용된 D2Q9 모델에 대해 기술한다.

2.1 D2Q9 모델을 이용한 LBE 방법

LBE 방법의 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_i(\vec{x} + c \hat{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\vec{x}, t) = \Omega_i \quad (1)$$

여기서, f_i , \vec{x} , c , \hat{e}_i , Ω_i 는 각각 입자 분포함수, 격자 벡터, 입자속도의 크기, 입자의 속도 그리고 입자분포와 관련된 충돌연산자(collision operator)로서 입자 분포가 충돌에 의해 변화하는 비율을 의미한다. 일반적으로 사용되는 충돌 연산자는 Bhatnagar, Gross and Krook(1952)이 제안한 단일 완화 시간 방법을 사용하여 다음과 같이 나타낸다(LBGK 모델).

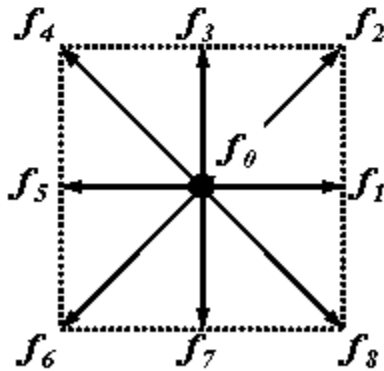


Fig 1 The D2Q9 lattice model

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} (f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)) \quad (2)$$

여기서, τ , f_i^{eq} 는 각각 완화시간, 평형분포함수를 의미한다. 여러 가지 종류의 격자에 따라 고유의 평형 분포함수가 있으며, D2Q9 모델을 적용하는 경우에는 다음의 평형 분포 함수를 사용한다.

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{3}{c^2} (\hat{e}_i \cdot \vec{u}) + \frac{4.5}{c^4} (\hat{e}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{1.5}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] \quad (3)$$

여기서, w_i 는 가중함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$w_i = \begin{cases} 4/9, & i=0 \\ 1/9, & i=1,3,5,7 \\ 1/36, & i=2,4,6,8 \end{cases} \quad (4)$$

그리고 macroscopic 유동 변수는 입자 분포 함수를 이용하여 구할 수 있으며, 다음과 같은 관계를 가지고 있다. 이러한 관계는 microscopic scale에서 정의되는 D2Q9 모델의 입자 분포 함수와 macroscopic 유동 변수의 관계를 나타내며 일종의 구속 조건(constraints)이라고 할 수 있다.

Macroscopic 밀도와 속도는

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i = \sum_{i=0}^8 f_i^{eq} \quad (5)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_{i=0}^8 \hat{e}_i f_i = \sum_{i=0}^8 \hat{e}_i f_i^{eq} \quad (6)$$

그리고 압력은 다음과 같다.

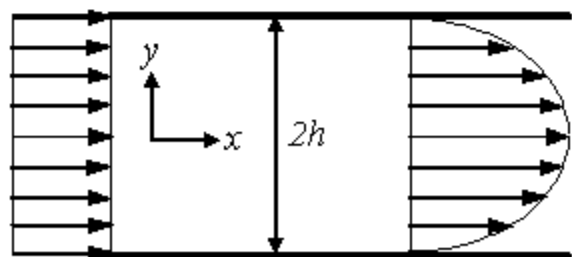


Fig 2 The specification of 2-D channel flow

$$p = \rho c_s^2 \quad (7)$$

여기서, $c_s = c/\sqrt{3}$ 이다.

Fig 1에 나타낸 바와 같이 D2Q9 격자는 하나의 정지입자와 4개의 수직/수평 방향으로 움직이는 입자 그리고 대각 방향으로 움직이는 4개의 입자로 구성되어 있다. 각 입자의 속도 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_0 &= 0 \\ \hat{e}_i &= c \cdot (\cos((i-1)\pi/4), \sin((i-1)\pi/4)) \\ &\text{for } i = 1, 3, 5, 7 \\ \hat{e}_i &= \sqrt{2}c \cdot (\cos((i-1)\pi/4), \sin((i-1)\pi/4)) \\ &\text{for } i = 2, 4, 6, 8 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $c = \delta x / \delta t$ 이며 δx 와 δt 는 각각 격자의 크기, 시간 간격을 의미한다.

2.2 Lattice Boltzmann 방법의 전개

Lattice Boltzmann 방법의 계산과정은 입자 충돌(collision) 과정과 병진(streaming) 과정의 2 단계로 나눌 수 있다. 충돌 과정은 하나의 격자 점에서 2개의 입자가 충돌하면서 입자 분포함수에 변화량이 발생하는 과정이며, 병진 과정은 충돌 후 입자가 다음의 격자점으로 이동하는 과정을 말한다. 이러한 과정은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

· 충돌 과정

$$f_i(\vec{x}, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t) + \Omega_i \quad (9)$$

· 병진 과정

$$f_i(\vec{x} + c \hat{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t + \Delta t) \quad (10)$$

식 (1)은 Chapman-Enskog 전개를 이용하여 macroscopic scale에서의 Navier-Stokes 방정식을 표현할 수 있다. 이 과정에서 동점성계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nu = (\tau - 1/2) c_s^2 \delta t \quad (11)$$

3. 해석 및 고찰

3.1 2-D 채널 유동(Poiseuille flow)

본 연구에서는 lattice Boltzmann 방법을 이용하여 2차원 채널 유동을 해석하였다. 이 유동은 완전 발달된 상태에서의 해석적인 해가 존재하므로 본 연구에서 적용한 lattice Boltzmann 방법을 이용한 결과와 정량적인 비교가 가능하다.

Fig 2에 나타낸 완전 발달된 채널 유동에서의 해석 해는 다음과 같다.

$$u(y) = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (12)$$

Lattice Boltzmann 방법을 이용한 계산에서의 경계조건은 다음과 같다. 입구와 출구는 periodic 경계 조건을 지정하였고, 채널 벽면에서는 점착 조건을 만족시키기 위해 bounce back 조건과 외삽법 그리고 비평형항 계산을 포함하는 외삽법을 적용하였다.

Fig 3, 4, 5는 해석 결과의 속도 분포와 각각 bounce back 조건, 외삽법, 비평형항을 포함하는 외삽법(hybrid extrapolation)을 사용한 본 연구에서의 결과를 Reynolds 수에 따라 비교한 것이다. 본 연구의 결과가 전체적으로 해석 결과와 매우 유사하다는 것을 알 수 있으나 bounce back 경계 조건의 경우 속도 분포가 해석 결과와 약간의 차이를 보이고 있다는 사실을 알 수 있다. 이는 1차 정확도를 가지는 bounce back 조건을 사용하였기 때문으로 사료되며 이를 해결하기 위해, 2차 정확도를 가지는 외삽법을 이용하였을 경우 해석 결과와 거의 일치하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 여전히 미세한 오차가 발생하고 있음을 알 수 있으며 비평형항을 포함한 외삽법을 사용하였을 경우에는 해석 결과와 정확하게 일치하고 있는 것을 확인할 수 있다. 따라서 비평형항을 포함하는 경계조건을 적용하는 것이 정확도 면에서는 우수하다는 결론을 얻을 수 있다.

그러나 비평형항을 포함하는 외삽법은 계산의 안정성 측면에서는 단점이 있다는 사실을 Fig 6

을 통해 알 수 있다. 충돌 완화 시간인 τ 의 값이 커질수록 계산은 불안정해질 가능성이 커지는데, bounce back 조건이나 외삽법을 사용한 경우에는 $\tau=5$ 일 때 결과에 오차가 많지만 수렴이 가능하다 그러나 비평형항을 포함한 외삽법의 경우에는 $\tau=5$ 일 때 수렴이 되지 않는다. 즉 bounce back이나 외삽법의 경우에는 τ 가 큰 경우에도 안정적인 예측은 가능하나 비평형항을 포함한 외삽법의 경우에는 계산이 불안정하다.

3.2 Lid-driven 캐비티 유동

또한 본 연구에서는 비압축성 유동 해석에 있어 가장 기본이 되는 lid driven cavity 유동에

lattice Boltzmann 방법을 적용하였다. Lid driven cavity 유동은 Reynolds 수의 변화에 따라 다양한 형태의 유동 현상이 발생하기 때문에 많은 연구자들에 의해 다루어졌고 Ghia et al.(1982) 등의 신뢰할 만한 연구가 존재한다. 따라서 본 연구에서 개발된 lattice Boltzmann 방법을 lid-driven cavity 유동에 적용하고 Ghia et al.의 결과와 비교하였다. 식 (13)으로 정의되는 Reynolds 수는 100, 400, 1000, 3200이며 계산에 사용된 격자수는 각각 51×51, 101×101, 201×201, 251×251 이다.

$$Re = \frac{u_w \cdot N}{\nu} \tag{13}$$

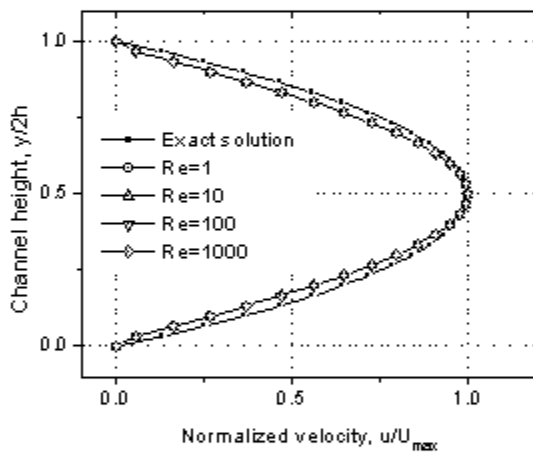


Fig 3 The u(y) profile for various Re. (Bounce back B.C)

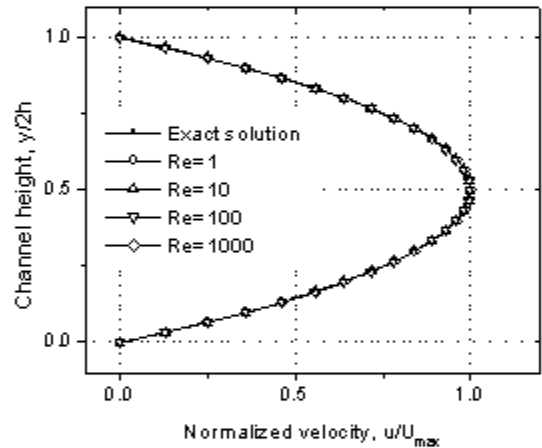


Fig 5 The u(y) profile for various Re. (Hybrid extrapolation B.C)

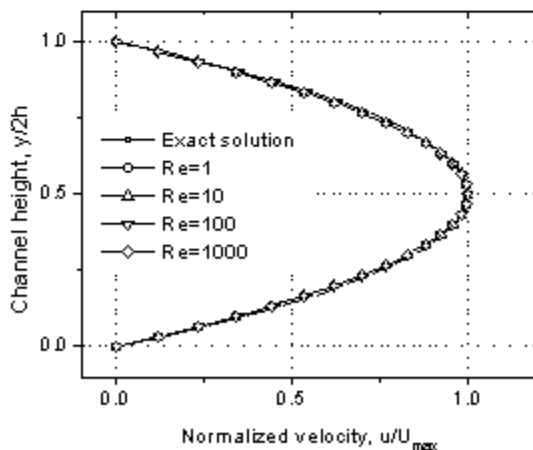


Fig 4 The u(y) profile for various Re. (Extrapolation B.C)

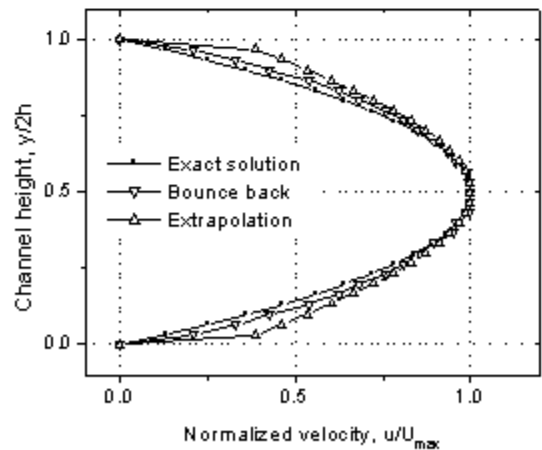


Fig 6 The u(y) profile for $\tau=5$ and $Re=1000$

여기서, u_w , N 은 각각 벽면 속도와 격자수를 의미한다.

Fig 7, 8은 각각 $Re=100, 400, 1000, 3200$ 일 때의 결과로서 $x=0.5$ 인 지점에서의 u -속도와 $y=0.5$ 인 지점에서의 v -속도를 나타낸 것이다. 각 Reynolds 수에 따라 Ghia et al.(1982)의 결과와 비교하여 나타내었는데, 두 결과가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Ghia et al.은 $Re=5000, 7500, 10000$ 인 경우에도 속도 결과를 제시하고 있으나 본 연구에서의 결과는 $Re=3200$ 이상의 경우는 계산의 불안정성으로 인해 나타내지 못하였다.

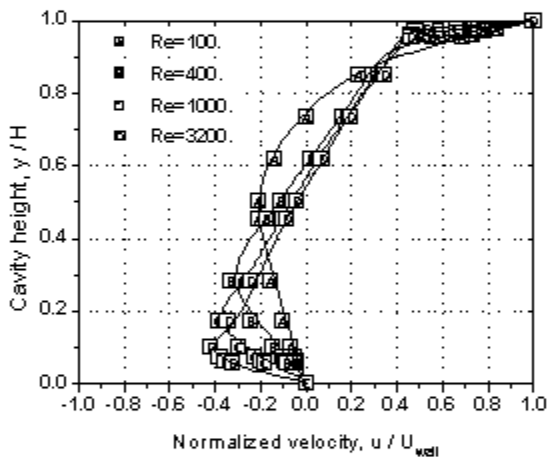


Fig 7 u-velocity at $x=0.5$ for various Re .
(Symbol: Ghia et al.,1982, Line: current)

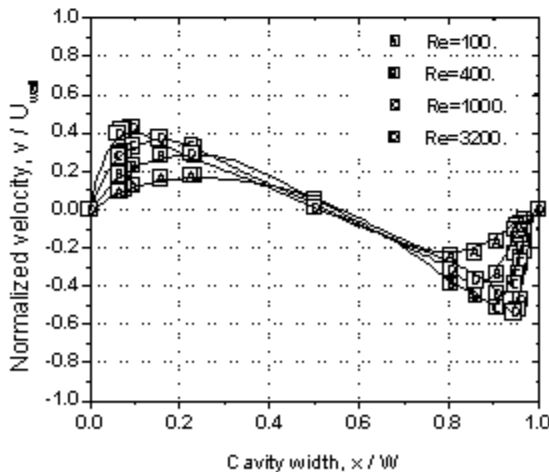


Fig 8 v-velocity at $y=0.5$ for various Re .
(Symbol: Ghia et al.,1982, Line: current)

4. 결 론

본 연구에서는 전산유체해석 방법으로서 최근에 많이 사용되고 있는 lattice Boltzmann 방법을 이용하여 2차원 유동 해석을 수행하였다. 해석적인 결과가 존재하는 완전 발달된 채널 유동과 캐비티 유동을 대상으로 하여 본 연구에서 개발된 전산 해석 도구를 검증함과 동시에 여러 가지의 경계 조건을 적용하여 경계조건이 결과에 미치는 영향을 고찰하였다.

Lattice Boltzmann 방법은 해석 과정이 간단하고 병렬 컴퓨팅에 이상적인 관계로 최근 활발히 연구되고 있지만 아직 경계 조건이나 계산 안정성과 관련된 많은 연구가 필요하다. 본 연구에서는 비록 간단한 문제에 대해서 결과론적으로 그 영향을 고찰하였지만 차후 이론적인 해석과 정량화된 연구가 요구된다.

후 기

본 연구는 에너지관리공단의 에너지 학술 진흥 사업 및 NRL 사업 지원에 의한 결과임을 밝히며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) U. Frisch, B. Hasslacher and Y. Pomeau, 1986, Lattice gas automata for Navier-Stokes equation, Physical Review Letters 56 (14), pp 1505-1508.
- (2) U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, 1982, High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. of Comp. Phys, 48, pp 387-411.
- (3) P. Bhatnagar, E. Gross and M. Krook, 1954, A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems, Physical Review 94 (3), pp 511-525.