

원형 실린더를 지나는 난류 유동장의 직접수치해석과 큰 에디모사를 위한 스케일 간 상호작용 연구

김택근[†]·박노마^{*}·유정열^{**}

DNS and Analysis on the Interscale Interactions of the Turbulent Flow past a Circular Cylinder for Large Eddy Simulation

Taekkeun Kim, Noma Park and Jung Yul Yoo

Key Words: Interscale interaction (스케일간 상호작용), Subgrid scale stress (아격자응력), Turbulent flow over a circular cylinder (원형 실린더 주위의 난류 유동)

Abstract

Stochastic nature of subgrid-scale stress causes the predictability problem in large eddy simulation (LES) by which the LES solution field decorrelates with field from filtered direct numerical simulation (DNS). In order to evaluate the predictability limit in *a priori* sense, the information on the interplay between resolved scale and subgrid-scale (SGS) is required. In this study, the analysis on the inter-scale interaction is performed by applying tophat and cutoff filters to DNS database of flow over a circular cylinder at Reynolds number of 3900. The effect of filter shape is investigated on the interpretation of correlation between scales. A critique is given on the use of tophat filter for SGS analysis using DNS database. It is shown that correlations between Karman vortex and SGS kinetic energy drastically decrease when the cutoff filter is used, which implies that the small scale universality holds even in the presence of the large scale coherent structure.

1. 서 론

큰 에디모사 (large eddy simulation, LES)의 지배방정식은 공간에 대해 필터링된 Navier-Stokes 방정식으로 비압축성 유동의 경우 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i^L}{\partial t} + \frac{\partial u_i^L u_j^L}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^L}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

여기서 필터는 계산영역에 대해 $\Phi^L(x) = \int_{\Omega} G_{\Delta_f}(\xi, x) \Phi(\xi) d\xi$ 로 정의되며, 필터커널 $G_{\Delta_f}(\xi)$ 는 필터크기 Δ_f 를 가지는 커널이다. 비선형항으로 인해 아격자 응력 (subgrid scale stress) $\tau_{ij} = (u_i u_j)^L - u_i^L u_j^L$ 이 발생하고 이는 (LES에서) 해상되지 않는 스케일의 LES 해공간으로의 투영을 의미하므로 비결정론적 속성을 지닌다. 해상된 정보만으로 방정식 (1)을 완결짓기 위한 τ_{ij} 의 결정론적 모델을 $T_{ij}(u_i^L)$ 라 하면 실제 LES의 지배방정식은 방정식 (1)의 우변에 부가적인 오차항 $\epsilon_i = \partial_j \tau_{ij} - \partial_j T_{ij}$ 가 첨가된 형태가 된다. 한편, Langford와 Moser⁽¹⁾의 연구 등을 통해 가장 이상

[†] 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : club032@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1654 FAX : (02)883-0179

^{*} 서울대학교 정밀기계설계 공동연구소

^{**} 서울대학교 기계항공공학부

적인 아격자 응력 모델에 대해서도 ϵ_i 의 크기는 실제 아격자 응력의 크기에 준한다는 사실이 잘 알려져 있다. 따라서, 모델링오차는 궁극적으로 해상된 큰 스케일의 와구조 (vortical structure)에 영향을 미치게 된다. Park⁽²⁾ 등을 따르면, 이러한 이유로 정확한 초기조건을 적용한 LES의 경우에도 시간적 예측가능성 (predictability)는 약 수에디 회귀 시간 (eddy-turn over time)으로 제한되어 있다. 따라서, 시공간적으로 정확한 와구조의 재현이 요구되는 문제, 즉 기상예측, 소음, 유동제어 및 각종 유체기계 등에 적용된 LES의 신뢰성은 근본적 한계를 가진다.

그러나, 결정론적 모델에 대한 비판적인 전망은 대부분 큰 스케일의 응집와구조 (coherent vortical structure)가 존재하지 않는 등방성 난류유동의 분석으로부터 얻어진 것이다. 따라서, 아격자 응력과 응집구조의 상호작용에 관한 보다 실제적인 결론을 얻기 위해 다양한 스케일의 응집구조가 발생하는 난류유동장의 분석이 요구된다.

O'Neil 과 Meneveau⁽³⁾는 난류 혼합류의 실험적 측정과 조건부 평균기법을 이용하여 Karman 와열 (Karman vortex street)과 아격자소산 ($\tau_{ij}S_{ij}$)의 강한 상관관계를 관찰하였는데, 특히 최대 아격자 소산은 항상 큰 롤러 (roller)구조에 앞서 발생함을 보였다. 최근 Silva 와 Metais⁽⁴⁾는 슬롯 너비 기준의 레이놀즈 수 3000의 제트 유동의 DNS 데이터 베이스와 유동 가시화를 이용하여 가장 강한 격자/아격자 운동에너지의 교환은 공간적으로 무질서하게 발생하지 않으며 응집구조의 주변에서 발생함을 보였다. 이러한 강한 상관관계를 발생시키는 주된 요인이 격자/아격자 확산항 $\partial_k(\tau_{ik}\overline{u_i})$ 및 아격자 운동에너지의 대류항에 있음을 보였다. 이러한 결과들은 아격자 모델의 근간이 되는 '작은 스케일의 보편성 가설 (hypothesis of small scales universality)'에 위배되는 것으로 아격자 응력의 강한 비등방성을 암시하는 것이다. 그러나 그들의 연구에서 결정적으로 문제가 되는 부분은 격자/아격자 스케일을 분리하기 위해 각각 가우시안 (Gaussian)필터와 박스 (tophat)필터를 적용했다는 점이다. 이러한 필터들은 본질적으로 같은 해 공간으로의 선형 투

영함수이며, 역산이 가능하다.^(1,2) 따라서 이러한 필터들은 어떤 정보도 손실시키지 않기 때문에 실제 LES가 적용되는 성긴 격자계를 모사할 수 없다.⁽¹⁾ 따라서 DNS 유동장에 이러한 필터를 적용해 얻어진 $\tau_{ij} = (u_i u_j)^L - u_i^L u_j^L$ 는 아격자 응력이 아니라 해상된 아필터 응력 (resolved subfilter scale stress)으로 해석되어야 한다.⁽²⁾ 그러므로 이 응력은 해상된 해의 와구조와 높은 상관관계를 가질 수 밖에 없다. 한편, 오직 절단 필터 (cutoff filter)만이 해공간의 축소와 이로 인한 아격자 응력의 발생을 보장한다.

2. 해석방법론 및 수치기법

2.1 필터링 및 격자/아격자 스케일 운동에너지

선형 필터를 적용하여 유동장을 격자 (grid scale, GS) 및 아격자 스케일 (subgrid scale, SGS)로 분리한다.

$$u_i = u_i^L + u_i^S, \quad p = p^L + p^S \quad (2)$$

격자/아격자 스케일의 상호작용을 분석하기 위해 각 스케일의 운동에너지의 전달 방정식을 생각한다. Silva 와 Metais⁽⁴⁾와 같이 격자 스케일의 운동에너지 $2q = u_i^L u_i^L$ 의 전달 방정식은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^L u_i^L}{\partial t} + \frac{\partial u_i^L u_i^L u_k^L}{\partial x_k} &= -2 \frac{\partial}{\partial x_k} (p^L u_i^L) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i^L u_i^L) \right) \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial u_i^L}{\partial x_k} \frac{\partial u_i^L}{\partial x_k} - 2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} u_i^L) + 2\tau_{ik} S_{ik}^L \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 GT, GC는 격자스케일 운동에너지의 국소 시간 변화 및 대류항, GPV는 압력/속도 상호작용에 의한 재분포항, GVR는 점성에 의한 재분포 확산항, GVD는 점성으로 인한 국소 소산항을 각각 나타낸다. G/SR항과 SGSD항은 격자/아격자 스케일 간의 에너지 전달에 직접적으로 관여하는 항들로서 각각 격자/아격자 확산 및 아격자 소산을 의미한다. 따라서 아격자 응력 모델에 의한 오차는 해상된 운동에너지에 직접적인 영향을 미친다. 한편, 아격자 스케일의 운동에너지는

$\tau_{ii} = (u_i u_i)^L - u_i^L u_i^L$ 로 정의되며, 다음의 전달 방정식으로 기술된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{ii}}{\partial t} + \frac{\partial (\tau_{ii} u_k^L)}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} ((u \mu)^L u_k^L - (u \mu \mu_k)^L) \\
 &+ 2 \frac{\partial}{\partial x_k} (p^L u_k^L - (p u)^L) + \frac{\partial}{\partial x_k} (v \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{ii}) \\
 &- 2 \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^L - \frac{\partial u_i^L}{\partial x_k} \frac{\partial u_i^L}{\partial x_k} \\
 &+ 2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ii} u_k^L) - 2 \tau_{ii} S_{ik} \\
 &- C / SR \quad - SCSD
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서도 마찬가지로 ST와 SC항은 아격자스케일 운동에너지의 국소 시간 변화 및 대류항, SPV는 아격자 스케일의 압력/속도 상호작용에 의한 재분포항, SVR은 점성에 의한 재분포 확산항, SVD는 점성으로 인한 아격자 스케일의 소산항을 각각 나타낸다. 마지막 두 항 -G/SR 과 -SGSD는 격자스케일 운동에너지식에 나타난 항과 부호만 다른 같은 항이며, 따라서 격자/아격자 스케일의 운동에너지의 교환을 담당한다.

2.2 수치기법

레이놀즈 수 3900의 실린더 주위유동의 DNS를 수행하기 위해 사용된 수치해석 코드는 3차원 비정상 압축성 Navier-Stokes 방정식을 지배방정식으로 하며, 공간에 대해 4차 정확도를 가지는 콤팩트 차분기법⁽⁵⁾, 시간에 대해 완전내재적 기법인 2차정확도의 Crank-Nicolson 기법을 채택하였고 내재적 시간전진기법의 선형화 오차를 제거하기 위해 매 시간간격마다 Newton반복해법이 적용되었다. DNS에 사용된 계산 격자는 원주, 반경 및 폭방향으로 각각 $320 \times 301 \times 72 \approx 7 \times 10^6$ 의 격자점을 가지는 O-형의 격자계이다. 원주 및 폭방향으로는 등간격의 격자가, 반경방향은 실린더 주위에 밀집된 비균일 격자를 적용하였다. 원주방향으로 등간격의 격자를 적용한 것은 절단 필터의 적용이 용이해 지기 때문이다. 계산 영역은 실린더 직경 D에 대해, 실린더 단면에 평행한 평면 (xy 평면)으로 약 24D 이고, 폭방향 (z-방향)으로 πD 이다. 폭방향 및 원주 방향으로는 주기 경

계조건을 주었으며, 실린더 표면에는 점착조건과 단열조건을 주었다. 반경방향의 바깥쪽 경계는 원주방향의 위치에 따라 입구 (inflow), 원방 (far-field), 출구 (outflow) 및 흔적류 (wake)영역으로 나뉜다. 흔적류 영역은 출구 경계에서 와구조의 부드러운 유출을 위해 속도에 대한 대류 경계조건 과 압력에 대한 Neumann 조건을 주었으며, 입출구 영역은 Riemann 불변량을 이용하는 통상적인 압축성 유동의 경계조건을 주었다.

3. 직접 수치모사의 검증

난류통계처리를 수행하기 위해 Karman 와열의 shedding주기 T에 대해 총 10T까지 계산을 수행하였으며, Strouhal 수는 약 0.21 이다. 0.04T마다 계산된 데이터를 샘플링하여 총 250개의 데이터를 획득하였다. 본 연구의 결과를 다양한 실험 및 LES 결과들과 비교하였다. 이들 실험 및 LES결과들은 참고문헌 (6)에서 발췌된 것이다.

먼저 채택된 격자계의 해상력을 검토하기 위해 $x/D = 5, 7$ 및 10 ($y/D = 0$) 에서 얻어진 주유동방향의 속도의 시간 측정데이터로부터 다양한 난류 통계량을 구해보았으며, 이 결과는 Table 1에 정리되었다. 이때 소산등을 구하기 위해 국소 등방성 가정과 Taylor 가정을 이용하였다. 여기서 Taylor 미세 스케일에 기반한 레이놀즈수가 약 50~70 정도로서 난류로의 천이가 진행중인 유동장의 특성을 나타낸다. 또한, 주어진 격자로 해상 가능한 최소스케일이 Kolmogorov 스케일의 3-5배 정도임을 알 수 있는 데, 이는 일반적으로 DNS라고 인정할 수 있는 격자 해상도이다.

Table 1. Turbulence characteristics from DNS.

	ϵ	λ	Re_λ	η	$K_{max}\eta$
x/D=5.0	0.034	0.069	54.8	0.005	0.21
x/D=7.0	0.017	0.094	73.2	0.006	0.25
x/D=10.0	0.009	0.110	71.7	0.007	0.30

ϵ : Homogeneous dissipation rate

λ : Taylor microscale

η : Kolmogorov length scale

K_{max} : Maximum resolvable wavenumber

Fig. 1는 후류의 중심 ($y/D=0$) 을 따라가면서 주유동방향 속도분포를 나타낸 것이다. 여기서 본 연구의 결과 및 Kravchenko와 Moin⁽⁷⁾ 의 LES 결과는 Ong과 Wallace⁽⁸⁾ 및 Lourenco와 Shih⁽⁹⁾의 실험

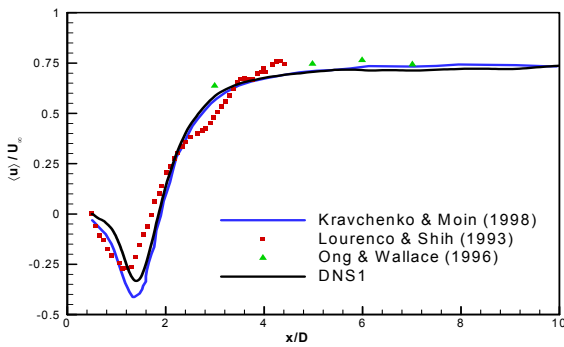


Fig. 1 Mean streamwise velocity along the centerline of the wake ($y/D=0$).

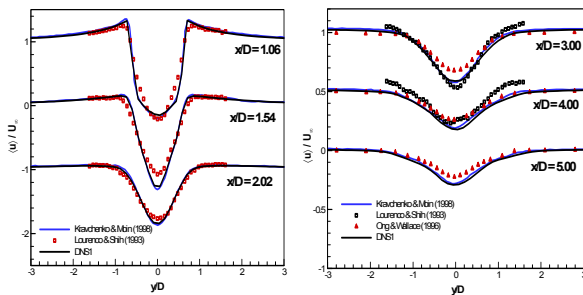
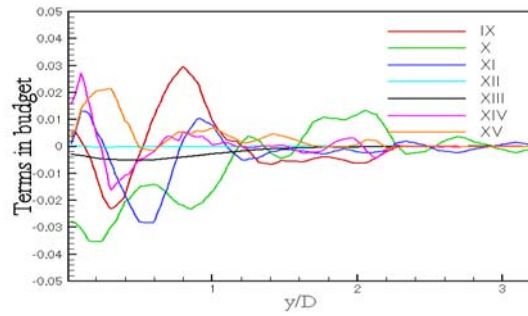


Fig. 2 Mean streamwise velocity profiles at several streamwise locations

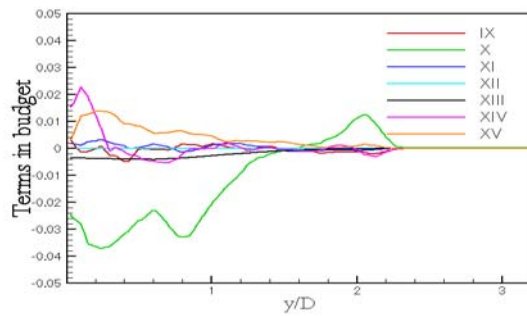
험 결과에 비해 전단층의 천이가 일찍 발생함을 알 수 있는 데, Kravchenko와 Moin⁽⁷⁾은 실험에서 발생한 배경 난류 (background turbulence)의 영향 때문일 것으로 예측하였다. 본 연구의 DNS는 이러한 예측을 입증하고 있다. 이러한 영향으로 후류 부근영역에서의 실험결과들은 V-형의 주유동 방향속도를 예측하는 반면 수치 실험 결과들은 U-형에 가깝다 (Fig. 2)

4. 스케일간 상호작용 분석

Fig. 3은 각각 절단필터와 박스필터를 사용하여 $x/D=5$ 에서 격자스케일 운동에너지의 평균값을 나타낸 것이다. 이 때 필터의 크기는 DNS격자 크기의 약 3배이다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 격자스케일 운동에너지 밸런스는 필터의 영향을 거의 받지 않는다. 또한 대류항 (GC) 과 압력항 (GPV) 들이 격자스케일 운동에너지 방정식에서 지배적이며 임의의 y/D 에서 대체적인 균형을 이룸을 볼 수 있다. 반면, 아격자 소산항과 전달항의 크기는 대류항 및 압력항에 비해 작지만 점성항의 크기

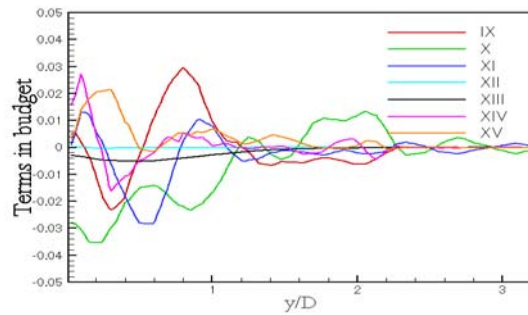


(a) cutoff filter

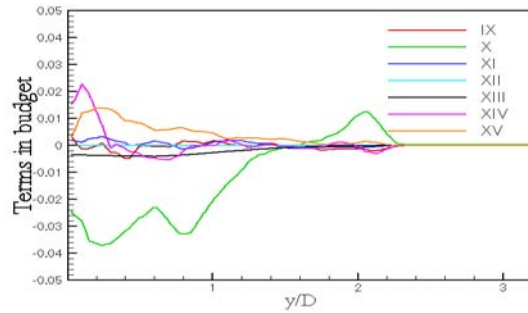


(b) tophat filter

Fig. 3 Grid scale kinetic energy balance at $x/D=5$; II, GC; III, GPV; IV, GVR; V, GVD; VI, G/SR; VII, SGSD



(a) cutoff filter



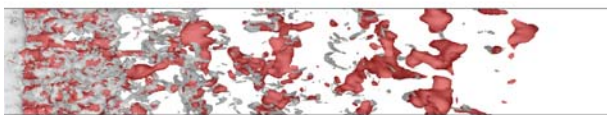
(b) tophat filter

Fig. 4 Subgrid scale kinetic energy balance at $x/D=5$; IX, SC; X, STT; XI, SPV; XII, SVR; XIII, SVD; XIV, -G/SR; XV, -SGSD

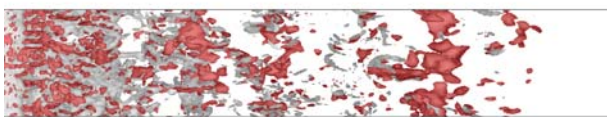
보다는 크며, 무시할 수 없는 크기를 가짐을 알 수 있다. 또한 아격자 소산항은 대부분의 위치에서 순수소산 (forward dissipation)임에 비해 아격자 전달항은 $0.2 < y/D < 0.4$ 영역에서 강한 생성항 (backward dissipation)이 됨을 볼 수 있다. 그러나 평균유동에서 강한 전달력이 발생하는 후류경계 ($y/D \sim 1$) 영역에서의 아격자항들은 크게 변하지 않음을 볼 수 있는데, 이는 아격자 응력이 평균 유동장에 지배되지 않음을 보여주는 것이다.

Fig. 4는 같은 위치에서 아격자 운동에너지 (식 4)의 각항들의 평균값을 나타낸 것이다. 격자 스케일의 운동에너지의 밸런스와는 달리 아격자 스케일 운동에너지 방정식에서는 필터의 효과가 분명하게 나타난다. 절단 필터를 적용하여 얻어진 각 항들에는 특별히 지배적인 항을 찾기 어려운 반면, 박스 필터를 적용하여 얻어진 결과에서는 아격자 전달항이 지배적인 역할을 함을 알 수 있다. 그러나, Fig. 4에서 자세한 정보를 얻기 어려운 데, 이는 채널유동 등과 달리 평균유동장이 2차원이기 때문에 아격자 운동에너지의 평형에 대한 정보도 2차원적 분포를 고려해야만 얻을 수 있기 때문이다. 따라서 보다 정확한 격자/아격자 상호작용에 대한 정보는 유동 가시화와 상관관계 등으로부터 얻을 수 있다.

O'Neil과 Meneveau⁽³⁾는 혼합류유동의 실험데이터로부터 응집구조와 아격자소산을 가시화하기 위해 조건부 평균기법을 적용하였으나, 본 연구의 실린더 후류의 경우 간헐적으로 나타나는 응집구조보다는 Karman와열과 같은 결정론적 구조가 주를 이루므로, 순간 유동장의 가시화만으로 상호작용에 대한 충분한 정보가 얻어질 것으로 기대된다.

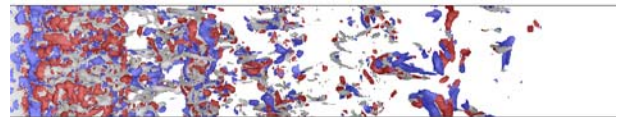


(a) tophat filter, $\rho(\tau_{ii}, \Omega) = 0.73$

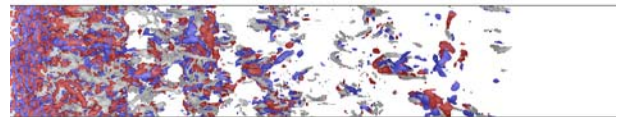


(b) cutoff filter, $\rho(\tau_{ii}, \Omega) = 0.08$

Fig. 5 Correlation between the vorticity magnitude and SGS kinetic energy: white, Ω red, τ_{ii}



(a) tophat filter $\rho(G/SR, \Omega) = 0.31$



(b) cutoff $\rho(G/SR, \Omega) = 0.10$

Fig. 6 Correlation between the vorticity magnitude and GS/SGS redistribution term: Red, forward; Blue, backward; white, Ω

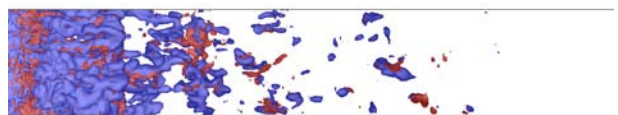


Fig. 7 Visualization on the local equilibrium hypothesis for the cutoff filter, $\rho(SVD, -SGSD) = -0.55$: Blue, SVD; Red, SGSD.

Fig. 5과 Fig. 6은 각각 아격자 운동에너지와 아격자분포항을 유동장의 와도와 비교한 것이다. Fig. 5에서 큰 아격자 운동에너지는 큰 와도의 근처에서 발생함을 알 수 있다. 그러나, 상관관계는 박스필터의 경우에만 큰 값을 가지고 절단필터에서는 매우 낮음을 볼 수 있는데, 이는 Fig. 5에 나타내지는 않았지만, 절단필터를 적용하는 경우, realizability⁽¹⁰⁾를 만족하지 않기 때문에 아격자 운동에너지가 음수인 영역이 존재하기 때문이다.

Fig. 6에서 볼 수 있듯이, 격자/아격자 분포항은 소산항 (backscatter)과 생성항 (forward scatter)으로 나누는 데, Silva와 Metais⁽⁴⁾의 결과와 같이 이 두 항이 횡방향 롤러를 감싸고 있음을 볼 수 있다.

마지막으로 와점도 모델 (eddy viscosity model)의 이론적 근거가 되는 국소 평형가정 (local equilibrium hypothesis)의 타당성을 조사해보았다. 국소 평형 가정은 다음과 같이 SVD와 -SGSD가 평형을 이루고 있음을 나타내며 따라서 다음과

같이 쓸 수 있다.

$$-2\nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right) = 2\tau_{ik} \overline{S_{ik}}$$

Fig. 7은 절단필터에 대해 두항을 가시화 한 것으로 두항의 공간적 분포가 상당히 겹치고 있음을 볼 수 있으며, 두항은 약 0.55의 상관관계를 가지고 있다. 따라서, Silva와 Metais⁽⁴⁾의 결론과는 달리 국소 평형가정은 순간 유동장에서도 대체로 잘 성립함을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 레이놀즈 수 3900에서 원형 실린더 주변 유동에 관한 직접수치모사가 수행되었으며, 다양한 선형 검증을 위해 데이터베이스를 구축하였다. 얻어진 데이터베이스에 필터를 적용해 격자/아격자 스케일의 상호작용을 분석하였는데, 이를 위해 격자 및 아격자 스케일의 운동에너지 전달방정식의 각 항들이 분석되었다.

본 연구에서 계산된 직접수치모사 결과는 이전의 LES결과들과 및 실험결과들과 잘 일치함을 알 수 있었다. 또한, 유동가시화 및 상관관계를 통해 조사된 Karman 와열과 아격자스케일 운동에너지의 상관관계는 절단 필터를 적용하였을 경우 확연하게 감소함을 확인할 있었다. 이 결과는 큰 스케일의 응집구조가 존재하는 경우에도 여전히 작은 스케일의 보편성의 가설이 성립함을 암시하는 것이다.

후 기

본 연구는 KISTI 슈퍼컴퓨팅 센터의 ‘제5차 전략적 지원과제’ 및 BK21 프로젝트의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Langford, J. A. and Moser, R. D., 1999, "Optimal LES formulations for isotropic turbulence," *J. Fluid*

Mech. Vol. 398, pp. 321-347.

(2) Park, N., 2003, Diagnostics on numerical and modeling error estimation in large eddy simulation, Ph. D thesis, Seoul National University.

(3) O'Neil, J. and Meneveau, C., 1997, "Subgrid-scale stresses and their modelling in a turbulent plane wake," *J. Fluid Mech.* Vol. 349, pp. 253-293.

(4) Silva, C. B. and Metais, O., 2002, "On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets." *J. Fluid Mech.* Vol. 473, pp. 103-145.

(5) Lele, S. K., 1992 "Compact finite-difference schemes with spectral-like resolution," *J. Comput. Phys.* Vol. 103, pp. 16-42.

(6) Park, N, Yoo, J. Y. and Choi, H., 2004, "Discretization errors in large eddy simulation: On the suitability of centered and upwind-biased compact difference schemes," To appear in *J. Comput. Phys.*

(7) Kravchenko, G. and Moin, P., 1998, "B-spline methods and zonal grids for numerical simulations of turbulent flows." Report TF-73, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.

(8) Ong, L. and Wallace, J., 1996, The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder," *Experiments in Fluids*, Vol. 20, pp. 441-453.

(9) Lourenco, L. M. and Shih C., 1993, "Characteristics of the plane turbulent near wake of a circular cylinder. A particle image velocimetry study," private communication. data taken from (6).

(10) Vremen, B., Guerts, B. and Kuerten, H., 1994, "Realizability conditions for the turbulent stress tensor in large-eddy simulation," *J. Fluid Mech.* Vol. 278, pp. 351.