

# 입자와법에 의한 급 출발하는 타원형 실린더 주위 유동해석

주남수<sup>†</sup> · 이상환<sup>\*</sup>

## Numerical study of Flow around Impulsively Started Elliptic Cylinder using Vortex Particle Method

Namsoo Joo , Sanghwan Lee

**Key Words :** Vortex particle method(입자와법), Elliptic cylinder(타원형실린더), Vorticity redistribution(와도재분배), Particle Strength Exchange(입자강도교환), Vorticity creation(와도생성), Viscous splitting algorithm(점성분할 알고리즘)

### Abstract

In this paper, the unsteady behavior of the viscous flow field past an impulsively started elliptic cylinder is studied numerically. In order to analyze flow field, we introduce vortex particle method. The vorticity transport equation is solved by fractional step algorithm which splits into convection term and diffusion term. The convection term is calculated with Biot-Savart law, the no-through boundary condition is employed on solid boundaries. The diffusion term is modified based on the scheme of particle strength exchange. The particle redistributed scheme for general geometry is adapted. The flows around an elliptic cylinder are investigated for various attack angles at Reynolds number 200. The comparison between numerical results of present study and experimental data shows good agreements.

### 1. 서 론

급 출발하는 와 발생체(bluff body)에 대한 문제는 비정상 상태의 유동을 해석하는데 시도되어지는 대표적인 예이다. 이런 와 발생체 주위의 비정상 유동들은 여러 공학분야에서 해석이 요구되어지고 있으며 유체기계 및 열교환기 설계, 핵연료 다발 설계 등에 사용되어진다. 이와 같은 연구는 비정상 유동해석에 적합한 라그랑지 방법(Lagrangian method)으로 접근하는 것이 타당하며, 따라서 본 연구에서는 와법(vortex method)을 사용하여 수치해석을 하였다.

이러한 와법은 확산항을 어떻게 처리하느냐에

따라 분류된다. 최근 들어 와법에 사용되는 여러 확산항의 모델 중에서 어떤 방법이 정확하며 계산이 용이한가에 중점을 두어 연구가 이루어졌다.

본 연구에서는 여러 가지 확산항의 모델을 비교 분석한 연구결과<sup>(7)</sup>에 따라 가장 정확도가 높은 입자강도교환법(particle strength exchange)을 사용하여 확산항을 계산하였다.

급 출발하는 와 발생체에 대한 여러 가지 실험적, 수치적 접근이 시도되어왔지만 타원형 실린더(elliptic cylinder)의 경우 여러 분야에 응용되고 있는데 반해 이에 대한 비정상 상태에 대한 접근은 활발히 이루어지지 못 하였다.

타원형 실린더는 원형 실린더에 비해 유동저항이 상대적으로 매우 작고<sup>(9)-(10)</sup>, 이에 반해 비슷한 열전달 효율을 올릴 수 있어 유체기계 및 열교환기 형상에 많이 사용되어지고 있다.

실험적 연구로는 Honji<sup>(5)</sup>에 의해 가시화가 이루어 졌으며 Lugt & Haussling<sup>(8)</sup>와 Patel<sup>(11)</sup>에 의해 수치적인 해석이 시도 되었다.

<sup>†</sup> 삼성중공업

<sup>\*</sup> 한양대학교 기계공학부

E-mail : [shlee@hanyang.ac.kr](mailto:shlee@hanyang.ac.kr)

TEL : 02) 2290 - 0445

와법을 이용하여 원형 실린더 같은 간단한 형상의 물체 주위의 유동에 대하여 연구<sup>(6)</sup>가 이루어졌지만 입자재배치를 위한 격자구성이 어려운 형태주위의 유동장에 대해서는 적용이 어려워 많은 연구가 이루어지지 못하였다.

기존의 와법에서 이용한 입자재배치법의 경우 유동장내 형상이 바뀌면 그에 따른 경계밀착격자(body fitted grid)를 재구성하여 입자재배치를 수행하였다. 그러므로 본 연구에서 수행한 받음각의 변화에 따른 유동장해석을 할 경우, 기존의 와법에 의한 입자재배치법을 사용한다면 변화에 따른 격자 구성을 받음각이 변할 때 마다 재 구성 하여 재배치 과정을 수행하여야 한다.

따라서 본 연구에서는 격자구성이 어려운 형상에도 적용이 가능한 입자재배치법<sup>(12)</sup>을 사용하여 형상이 바뀔 때 마다 그 형상에 따라 격자를 재구성하지 않도록 하여 보다 일반적인 형상에 대하여 유동장 해석이 가능하도록 하였다.

또한 타원형 실린더의 초기 비정상 상태의 수치 해석을 수행하여 실험결과와 기존의 수치해석결과와 비교 분석을 통하여 본 연구의 타당성을 증명한다.

## 2. 입자와법

와도 방정식은 Chorin<sup>(2)</sup>이 제안한 점성분할 알고리즘(viscous splitting algorithm)에 따라 대류항과 확산항으로 분리될 수 있다.

대류방정식 :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (1)$$

확산방정식 :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2)$$

대류항과 확산항으로 구분되어진 방정식을 부분 단계 알고리즘(fractional step algorithm)에 적용하여 계산한다.

### 2.1 대류항

속도장은 포아송(Poisson) 방정식의 해에 대하여 Green 함수를 사용하는 와도장으로 결정된다.

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\pi} \int \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{y} + \mathbf{U}_0(\mathbf{x},t) \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{U}_0(\mathbf{x},t)$ 은 속도장에 대하여 불투과 경계조건(no-through-flow boundary condition)을 갖는 제차 포아송 방정식의 해이고,  $\mathbf{K}$ 는 속도계산을 위한 합성커널(convolution kernel)이다. 본 연구에서는 Beale & Majda<sup>(1)</sup>가 제안한 2차 속도커널을 사용하였다.

### 2.2 확산항

입자강도교환법은 유동을 묘사하는 입자들의 강도를 조절해서 확산방정식을 만족시키는 것이다. 일반적으로 이 방법은 최소의 입자 중복이 유지되어 확산과정을 정확하게 나타낼 수 있다. 그러나 대부분의 유동의 경우 대류로 인해 입자의 위치가 변하게 되어 정확한 결과를 얻을 수 없다. 그러므로, 정확한 결과를 얻기 위해서는 입자를 재배치시켜주는 알고리즘 기법을 사용해야 한다.

Degond & Mas-Gallic<sup>(4)</sup>에 의해 소개된 입자강도교환법은 Laplace 연산자  $\Delta$ 와 적분연산자  $\Delta^\epsilon$ 을 근사 하는데 근거하고 있다.

확산방정식은 와도에 대한 적분-미분방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{\delta^2} \int_{R^2} [\omega(\bar{y}) - \omega(\bar{x})] \phi_\delta(\bar{x} - \bar{y}) \bar{y} \quad (4)$$

이 적분연산자를 구적법을 이용해서 이산화하고 이를 와도에 관한 식에 적용하면 결과적으로 확산방정식의 해는 입자의 강도에 대한 두 상미분방정식의 문제와 같게 된다.

이 방법의 알고리즘은 다음과 같다.

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{\nu h^2}{\delta^2} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j^{n-1} - \Gamma_i^{n-1}) \phi_\delta(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \quad (5)$$

이 방법의 특징은 미분연산자를 적분연산자로 대체한다는 점이다. 적분연산자의 사용에 대한 이 점은 안정성과 효율에 있다. 다만, 이 방법의 정확도는 적당히 뿌려진 입자들의 위치가 구적법에 합당한가에 좌우된다. 따라서 이 방법은 입자재배치의 과정을 필요로 한다.

### 2.3 경계조건

지배방정식을 만족시키기 위해서는 유체역학적으로 점착 경계조건(no-slip boundary condition)이 만족되어야 한다. 점착 경계조건의 적용은 대류 과

정과 확산과정을 통하여 경계면에서 발생된 미끄럼 속도(slip velocity)를 경계면에서 생성된 와도로 변환하여 만족되는 Chorin<sup>(3)</sup>이 제안한 다음과 같은 와도 생성 알고리즘(vorticity creation algorithm)을 기반으로 한다.

$$v \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \quad (6)$$

따라서, 물체의 경계면을 와판(vortex sheet)으로 근사화하고 와판의 강도를 계산하기 위하여 경계 요소법을 사용한다. 이 방법은 물체의 표면을 입자의 개수로 이산화하고 그 선형 방정식을 풀어서 와판의 강도를 구한다. 이렇게 계산된 와판의 강도는 확산과정에서  $\Delta t$  시간 간격동안 유동장 안으로 방출되어야 하는 총 유속과 같다. 따라서, 식(6)로부터 새롭게 생성된 와도를 얻을 수 있다.

본 연구에서는 Ploumhans<sup>(12)</sup>가 제안한 방법을 사용하여 경계조건을 만족시켰다.

### 2.4 입자재배치

입자와법의 확산과정에서 각 입자의 강도를 교환할 때, 점성에 의한 영향을 효과적으로 모사하기 위하여 입자들간의 균일한 중첩이 요구된다. 따라서 입자간격이 균일하지 않으면 각 운동량 보존이 유지되지 않고 안정성이 떨어지게 된다<sup>(13)</sup>. 그러나 라그랑지 방법의 특성상 대류에 의한 입자간격의 변형이 불가피하므로 적절한 시간 간격마다 입자의 재배치가 요구된다.

$$\tilde{\Gamma}_i(\tilde{x}_i) \approx \sum_{j=1}^N \Gamma_j(x_j) \Lambda \left( \frac{|\tilde{x}_i - x_j|}{h} \right) \quad (7)$$

식(7)에서  $\tilde{\Gamma}$ ,  $\Gamma$  는 각각 새로운 입자와 기존 입자의 강도를 나타낸다. 또한  $\Lambda$  는 입자 재배치 커널을 의미한다.

입자재배치 커널은 와도장의 전체 순환과, 선형 운동량, 각운동량 보존을 만족해야 한다. 본 연구에서는 보다 일반적인 형상에 적용이 가능한  $\Lambda_3$ ,  $\Lambda'_2$ ,  $\Lambda'_3$ <sup>(12)</sup> 커널을 사용하였다.

### 3. 결과 및 고찰

초점거리 0.5, 곡률이 0.809 인 경우에 여러 가지 받음각(Angle of attack)을 가지는 경우에 대하여 수치해석을 실시하였다.

본 연구는 점성효과가 비교적 큰 층류 영역인  $Re=200$  에서 유동양상을 대상으로 하였다.

위와 같은 조건을 택하여 수치해석을 실시한 이유는 실험결과와 정확한 비교를 위하여 기존 실험 연구<sup>(5)</sup>의 실험조건을 따르기 위한 선택이다.

### 3.1 유동가시화<sup>(5)</sup>와의 비교

유동장 해석을 위해 본 연구에서는 타원형 실린더를 400 개의 와판으로 분리 하였고, 시간간격( $\Delta t$ )을 0.01 로 하였으며 입자의 코어반경( $\epsilon$ )을

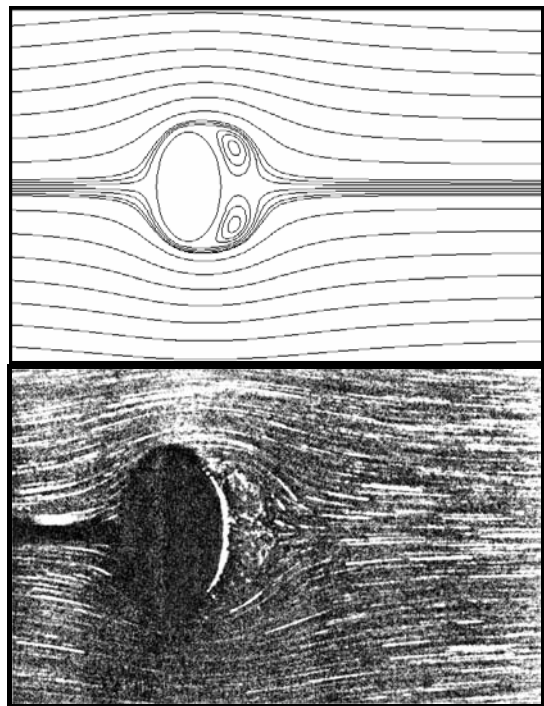
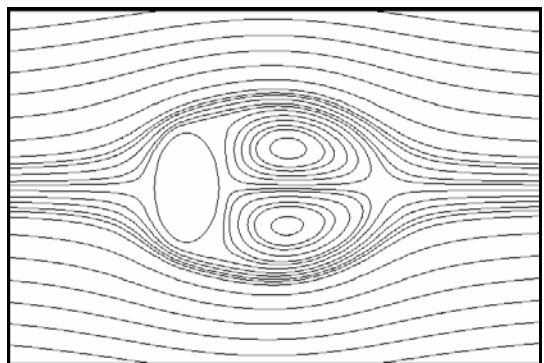


Fig. 1 Comparison of instantaneous stream line for  $Re = 200$ ,  $\phi = 90^\circ$  at  $T^* = 0.6$ : present study(top), Honji<sup>(5)</sup>(bottom).

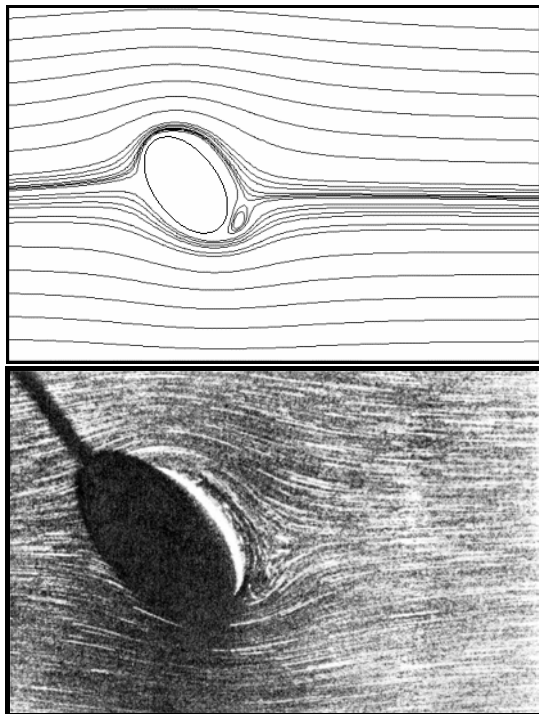




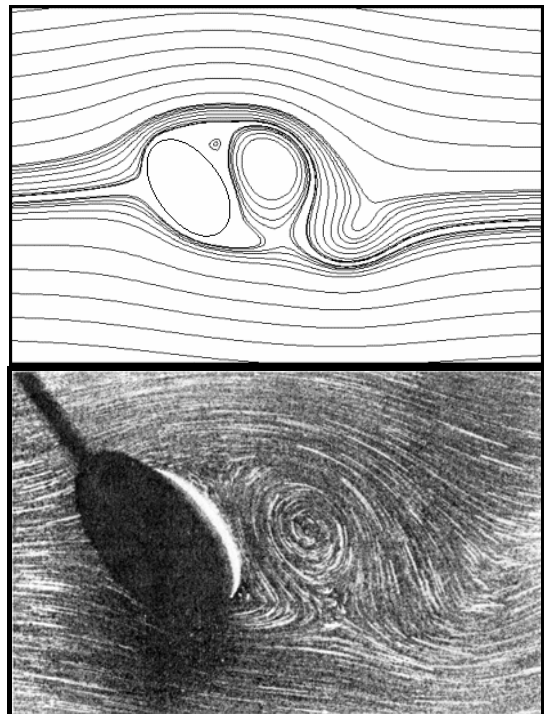
**Fig. 2** Comparison of instantaneous stream line for  $Re = 200, \phi = 90^\circ$  at  $T^* = 4.19$  : present study(top), Honji<sup>(5)</sup>(bottom).



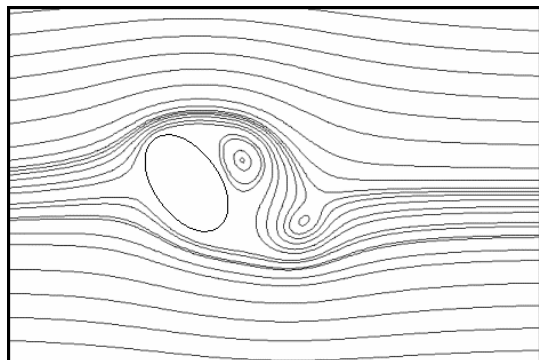
**Fig. 4** Comparison of instantaneous stream line for  $Re = 200, \phi = 54^\circ$  at  $T^* = 2.1$  : present study(top), Honji<sup>(5)</sup>(bottom).



**Fig. 3** Comparison of instantaneous stream line for  $Re = 200, \phi = 54^\circ$  at  $T^* = 0.6$  : present study(top), Honji<sup>(5)</sup>(bottom).



**Fig. 5** Comparison of instantaneous stream line for  $Re = 200, \phi = 54^\circ$  at  $T^* = 3.1$  : present study(top), Honji<sup>(5)</sup>(bottom).



0.02, 입자 재배치를 위한 격자 크기를 0.02 로 하여 수치해석을 하였다. 입자의 개수는 시간이 지남에 따라 유동장의 확장을 고려하여 증가시켰다.

**Fig. 1~5** 은 시간이 지남에 따라 나타나는 유선(streamline)의 변화를 나타내었다.

**Fig. 1~2** 는 받음각을  $90^\circ$  로 변화 시켰을 때 일 반형상에 적용 가능한 입자재배치법을 이용하여 계산한 유선을 Honji<sup>(5)</sup> 의 유동 가시화 결과와 비교하였다.

$T^* = 0.6$  일때 이미 대칭인 와류가 나타나 있다

(Fig.1). Fig. 3-5 는 받음각이  $54^\circ$  일 때 유선을 Honji<sup>(5)</sup> 의 결과와 비교하였다.

급 출발 직후에는 비점성 유동양상이 나타나다가 시간이 지남에 따라 와류가 발생하여 후류쪽으로 이동 시작한다(Fig.3).  $T^*=0.6$  인 경우 이미 후연 근처에 와류가 생성된 것을 볼 수 있다.  $T^*=2.1$  일때 전연에서 생성된 와류는 후연 근처의 박리(separation)에 비하여 더 빠른 속도로 팁 쪽으로 성장하여 후류와로 바뀐다(Fig.4).

또한 전연에서 발생한 와류가 성장하는 동안 날개시위(chord)의  $\frac{1}{3}$  부근에서 2 차와류(secondary vortex)가 발생되어진다(Fig.5). 이렇게 발생한 와류에 의해 와이탈(vortex shedding)이 더 촉진되어진다.  $T^*=3.1$  인 경우에 와이탈의 전조 단계를 보이고 있다.

위에서 살펴본 바와같이 타원형 실린더는 익형(airfoil)과 원형실린더의 특징을 동시에 나타내고 있다. 받음각이  $90^\circ$  인 경우 대칭을 이루면서 와류가 성장하는 모습은 원형실린더의 성질과 유사하고 받음각이  $54^\circ$  인 경우의 와이탈 과정을 살펴보면 익형의 성질과 유사함을 보이고 있다.

3.2 기존 수치해<sup>(11)</sup> 와의 비교

계산결과의 타당성을 비교하기 위하여 본 연구의 결과와 실험결과, 기존의 수치해석 결과를 정량적으로 계산하였다. 받음각이  $0^\circ, 90^\circ, 54^\circ$  인 경우에 대해서 각각 와류길이를 측정하여 다른 방법의 수치해석 결과<sup>(11)</sup> 와 비교하였다.

일반적으로 비압축성 점성유동장에 놓인 물체주위의 유동장은 대부분의 경우 박리유동을 형성하고 물체의 형상에 따라 특성이 달라진다. 그러므로 이러한 형상을 정확하게 예측하는 것은 유동장을 해석함에 있어 중요한 요소가 된다.

Fig. 6-8 은 받음각에 따른 와류의 크기를 실 나타낸 그림이다.

Fig. 6 은 받음각이  $0^\circ$  일때 유동장에 나타나는 일차와류의 길이를 시간의 변화에 따라 측정한 실험결과와 기존의 수치해석결과<sup>(11)</sup> 를 함께 나타내었다.

실험결과에서 와류의 생성이 명확하게 표시되지 않아  $T^*=1.0$  인 경우부터 측정하였다. 실험결과와 비교를 위하여 와류길이를 측정할 때 초점거리의 2 배를 기준으로 하여 측정한 결과이다. 시간이 흐름에 따라 와의 성장이 어느 정도 선형적으로 증

가하고 있고  $T^*=4.0$  인 경우를 기준으로 기울기

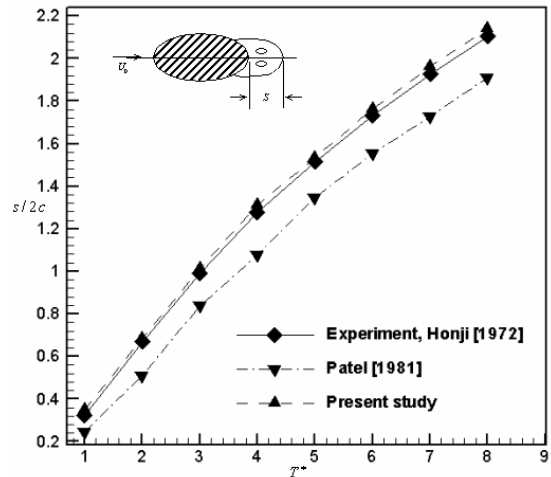


Fig. 6 Compare vortex length,  $\phi = 0^\circ$

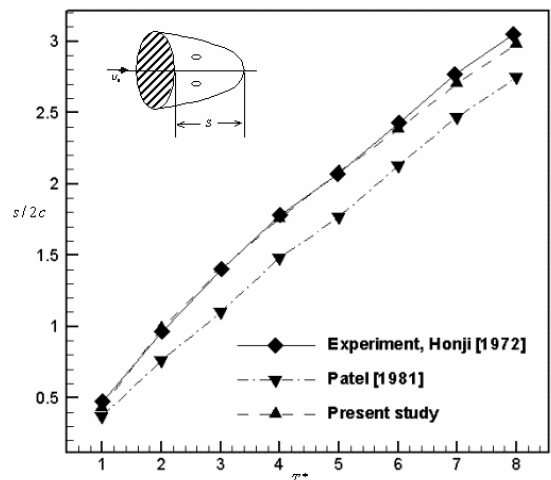


Fig. 7 Compare vortex length,  $\phi = 90^\circ$

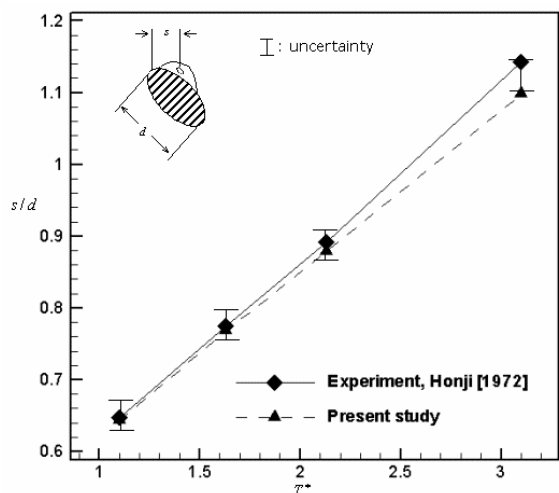


Fig. 8 Compare vortex length,  $\phi = 54^\circ$

의 변화가 조금 발생하고 있다.

**Fig. 7** 는 받음각이  $90^\circ$  일때 와류길이를  $0^\circ$  일때와 유사하게 측정하여 나타내었다.

$0^\circ$  인 경우와 비교하여 보면 시간에 따른 와류길이의 변화량이 더 큰 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 2 개의 박리점의 거리에 차이가 나기 때문에 후류에서 생성되는 와류의 크기와 거리에도 차이가 나게 되는데, 이러한 차이는 열전달 문제해석에 있어 매우 중요한 요소 중 하나이다<sup>(10)</sup>. 따라서 정확한 해석결과가 요구되어지고 있다.

기존의 수치해석결과도 경향은 비슷하게 나타나고 있으나 실험값과의 오차가 본 연구의 결과보다 크다. 그러므로 와법을 이용하여 수치해석을 할 경우 보다 정확하게 초기 유동장을 해석할 수 있을 것으로 사료된다.

**Fig. 8** 에서 uncertainty 라고 표시된 이유는 실험결과에서 와류의 중심이 명확하지 않아 계산상의 오차를 감안하여 차이를 나타낸 것이다. 기존의 수치해석결과<sup>(17)</sup> 에는 받음각이  $54^\circ$  인 경우에 대하여 와류길이를 측정된 수치해석결과가 없어 비교를 하지 못 하여 실험결과만을 표시하였다. 그리고 실험결과와의 비교를 위하여 장축의 길이를 기준으로 하여 와류길이를 측정하였다.

2 차와류의 성장에 따라 와류의 중심의 거리가 커지고 이러한 와류는 시간이 흐름에 따라 박리가 이루어 지고 있다. 실험결과와 비교해 보면 와류 중심의 변화를 비교적 잘 나타내고 있다.

유동방향에 수직하는 면적이 클수록 와류의 크기가 커지고, 유동장내의 형상이 대칭을 이루면 후류의 형상 또한 대칭을 이루게 된다. 받음각이 변하면 박리점들의 위치가 변하고 또한 초기와류의 형상이 대칭을 이루지 않기 때문에 후류의 형상도 대칭을 유지하지 못하면서 진행을 하게 된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 입자와법을 사용하여 급 출발하는 타원형 실린더주위의 비정상 상태 거동을 여러 받음각의 변화에 따라 수치해석을 하였다. 유선과 와류거리에 대한 고찰을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 타원형 실린더와 같이 일반적 형상을 가진 와 발생체의 초기거동을 해석할 경우 개선된 입자재배치법을 적용한 입자와법을 이용하면 기존의 수치해석기법을 사용한 결과보다 정확한 유동장 예측이 가능하다.

(2) 타원형 실린더가 정지한 상태에서 급 출발

하는 경우 비 정상효과가 발생하여 유동장내의 여러 가지 요소에 공간적, 일시적으로 큰 구배가 발생하여 후류에 영향을 미치고 있음을 보였다.

(3) 일반적인 형상에 적용 가능한 입자재배치법을 적용하면, 형상이 변함에 따라 격자를 재구성하지 않고 유동장을 해석할 수 있어 활용범위가 보다 넓어질 것으로 사료된다.

#### 참고문헌

- (1) Beale, J. T. and Majda, A., 1985, "High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels", *J. Comp. Phys.*, Vol. 58, pp. 188-208.
- (2) Chorin, A. J., 1973, "Numerical study of slightly viscous flow", *J. Fluid Mech.* Vol. 57, pp. 785-796.
- (3) Chorin, A. J., 1978, "Vortex sheet approximation of boundary layers", *J. Comput. Phys.*, Vol. 27, pp. 428-442.
- (4) Degond, P. and Mas-Gallic, S., 1989, "The weighted particle method for convection-diffusion equations, Part I : The case of an isotropic viscosity, Part II : the anisotropic case", *Math. Comp.* Vol. 53, pp. 485-526.
- (5) Honji, H., 1972, "Starting flows past sphere and elliptic cylinder", *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.*, Kyushu University, Vol. 19, pp. 271-281.
- (6) Koumoutsakos, P., 1993, "Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods", Ph. D. thesis, Caltech.
- (7) Lee, S.H., Jin, D.S., 2002, "Comparison of two viscous models for vortex methods in parallel computation", *JSME. Intl. J.B-Fluid. T.*, Vol. 45, pp.231-239.
- (8) Lugt, H. J. and Haussling, H. J., 1974, "Laminar flow past an abruptly accelerated elliptic cylinder at  $45^\circ$  incidence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, pp. 711-734.
- (9) Modi, V. J and Wiland, E., 1970, "Unsteady aerodynamics of stationary elliptic cylinder in subcritical flow", *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 1814-1821.
- (10) Ota, T., Nishima, H. and Taoka, Y., 1984, "Heat transfer and flow around an elliptic cylinder", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.27, pp.1771-1779.
- (11) Patel, V. A., 1981, "Flow around the impulsively started elliptic cylinder at various angle of attack", *Comput. Fluids*. Vol. 9, pp. 435-462.
- (12) Ploumhans, P., Winckelmans, G. S., 2000, "Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry", *J. Comp. Phys.*, Vol. 165, pp. 354-406.
- (13) 박외철, 1999, "와류입자법에 의한 비정상 박리 흐름의 전산(II)", 대기기계학회 논문집 B 권, 제 23 권, 제 10 호, pp. 1223-1228.